



**ESTADÍSTICA TEÓRICA I. SEPTIEMBRE 2004.**  
**Código asignatura. 207. Código carrera 43. Examen tipo A.**

**PREGUNTAS TIPO TEST:**

1ª.- Si dos sucesos  $A$  y  $B$  son independientes, se verifica :

- a)  $P(A \cap B) = 0$     b)  $P(A \cap B) = P(A) + P(B)$     **c)  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$**     d) Ninguna de las anteriores.

2ª.- Dada una v. a  $\xi$  con  $f(x) = 1$   $0 \leq x \leq 1$ , su función característica es:

- a)  $\frac{e^{it}}{it}$     **b)  $\frac{e^{it} - 1}{it}$**     c) 0    d) Ninguna de las anteriores.

3ª.- La v. a bidimensional  $(\xi, \eta)$ , tiene como función de densidad conjunta  $f(x, y) = k(3x + 3y)$   $0 \leq x \leq 1$  ;  $0 \leq y \leq 1$ . Se dice que las v. a  $\xi$  y  $\eta$  :

- a) No son Independientes**    b) Son Independientes    c) Son Condicionales    d) Ninguna es cierta.

4ª.- Un examen de estadística consta de 10 preguntas tipo test, se sabe que un alumno tiene una probabilidad de 0'2 de contestar mal cada pregunta. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera pregunta que conteste mal sea la sexta?

- a)  $\approx 0'08192$     b)  $\approx 0'0064$     **c)  $\approx 0'0655$**     d) Ninguna de las anteriores.

5ª.- La v.a.  $\eta$  se distribuye  $N(-5, 10)$ . ¿Cuál será  $P(\eta = 2)$ ?

- a) 0**    b) 0'2420    c) 0'758    d) Ninguna es cierta.

6ª.- Las v.a  $\xi_1 \equiv N(-1, 1)$  y  $\xi_2 \equiv N(-2, 2)$  no son independientes. Si la v.a  $\eta = \xi_1 - 2\xi_2$  tiene  $V(\eta) = 10$ . ¿Cuál será el coeficiente de correlación lineal entre las v.a  $\xi_1$  y  $\xi_2$ ?

- a) -0'875    **b) 0'875**    c) 1'75    d) Ninguna de las anteriores.

7ª.- ¿Cuál será la esperanza matemática de la v.a. que tiene como función de densidad  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  ;  $1 \leq x < \infty$ ?

- a) No existe**    b) 0    c) 1    d) Ninguna de las anteriores.

8ª.- Dada una v.a  $\eta$  con  $\varphi(t) = e^{-2t^2}$ . ¿Cuál es el valor de  $\alpha$  que verifica la  $P(|\eta| \leq \alpha) = 0'95$ ?

- a)  $\alpha = \pm 1'96$     b)  $\alpha = \pm 0'025$     c)  $\alpha = \pm 3'92$     **d) Ninguna. es correcta.**

9ª.- En una distribución de probabilidad, el valor de la distribución que presenta la máxima probabilidad es:

- a) Moda**    b) Media    c) Mediana    d) Ninguna de las anteriores.

10ª.- Dadas las v.a independientes  $\eta_i \equiv N(0, 3)$  y la v.a  $\omega = \sum_{i=1}^6 (\eta_i)^2$ . ¿Cuál será  $P(\omega \leq 19'836)$ ?

- a) 0'90    **b) 0'1**    c) 0'01    d) Ninguna es correcta.

**Aclaraciones.-**

$$2^a.- \varphi(t) = \int_0^1 e^{itx} dx = \frac{1}{it} [e^{itx}]_0^1 = \frac{e^{it} - 1}{it}$$

$$3^a.- \text{Calculamos } k: 1 = \int_0^1 \left( \int_0^1 k(3x + 3y) dx \right) dy = 3k \rightarrow k = \frac{1}{3} \text{ Así pues:}$$

$$f_1(x) = \int_0^1 \frac{1}{3}(3x + 3y) dy = x + \frac{1}{2} \quad y \quad f_2(y) = \int_0^1 \frac{1}{3}(3x + 3y) dx = y + \frac{1}{2}. \text{ Si } \xi \text{ y } \eta \text{ fuesen}$$

independientes, debería ser  $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$ , cosa que no ocurre.

4ª.- La probabilidad pedida es  $0,8^5 \cdot 0,2 \approx 0,0655$

6ª.- Se cumplirá que  $10 = \text{Var}(\eta) = \text{Var}(\xi_1) + 4\text{Var}(\xi_2) - 4\text{Cov}(\xi_1, \xi_2) = 1 + 16 - 4\text{Cov}(\xi_1, \xi_2)$ , de donde  $\text{Cov}(\xi_1, \xi_2) = \frac{7}{4} = 1,75$ . Así pues, el coeficiente de correlación lineal será

$$\frac{\text{Cov}(\xi_1, \xi_2)}{\sqrt{\text{Var}(\xi_1)} \sqrt{\text{Var}(\xi_2)}} = \frac{1,75}{1 \cdot 2} = 0,875.$$



7ª.- No existe puesto que la integral  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$  no es convergente.

8ª.- Desde luego a no puede tomar mas que un único valor positivo, lo que descarta las respuestas a), b) y c). Pero, precisando algo más:  $\varphi(t) = e^{-2t^2}$  es la función característica de una v.a. normal  $N(0, 2)$ . Por otra parte:  $0,95 = P(|\eta| \leq a) = P(-a \leq \eta \leq a) \rightarrow 0,975 = P(\eta \leq a) =$  (tipificando)  $= P\left(Z \leq \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$  y de las tablas se deduce que  $a = 3,92$ .

10ª.- Las variables  $\frac{\eta_i}{3}$  son normales  $N(0, 1)$ , luego la variable  $\sum_{i=1}^6 \left(\frac{\eta_i}{3}\right)^2 =$   
 $= \frac{1}{9} \sum_{i=1}^6 (\eta_i)^2 = \frac{\omega}{9}$  es  $\chi_6^2$ . Así pues,  $P(\omega \leq 19,836) = P\left(\frac{\omega}{9} \leq 2,204\right) =$  (tablas)  $= 0,1$ .

### EJERCICIOS PRÁCTICOS:

1º.-Una cadena de supermercados constituida por 150 establecimientos ha comprobado que el volumen diario de ventas de cada uno de ellos, en miles de euros, se distribuye con función de densidad:  $f(x) = k x(6-x)$  si  $0 \leq x \leq 6$ .

Suponiendo que las ventas de los establecimientos son independientes entre sí, calcúlese:

- La probabilidad de que la venta total de la organización en un cierto día sea menor de 500.000 euros.
- El volumen total de ventas al que le corresponde una probabilidad del 30% de ser superado.

2º.-Un individuo ha recibido una herencia que ha invertido en su totalidad en acciones y bonos, cuyas tasas respectivas de rendimiento  $X$  e  $Y$  son aleatorias. El rendimiento total de la inversión, es:  $RT = 2X + Y$

Se conoce que  $X$  tiene  $\mu_X = 0,10$  y  $\sigma_X^2 = 0,2$ , para  $Y$  la  $\mu_Y = 0,5$  y  $\sigma_Y^2 = 0,9$ . Suponemos que  $X$  e  $Y$  son variables aleatorias dependientes. Hallar la media y la varianza del rendimiento total, determinando cuál de las dos situaciones es más conveniente:

- $\rho_{XY} = 0,5$
- $\rho_{XY} = -0,5$

### Soluciones.-

1º.-

Calculamos en primer lugar k:

$$1 = \int_0^6 kx(6-x)dx \text{ de donde se obtiene que } k = \frac{3}{100}.$$

Sea  $\xi_i$  la variable aleatoria que expresa el volumen diario de ventas del establecimiento i-ésimo.

(en miles de euros). Entonces  $\mu_i = E(\xi_i) = \frac{3}{100} \int_0^6 x^2(6-x)dx = \frac{45}{16}$  y  $E(\xi_i^2) =$

$= \frac{3}{100} \int_0^6 x^3(6-x)dx = \frac{75}{8}$ , de donde  $\text{Var}(\xi_i) = \frac{75}{8} - \left(\frac{45}{16}\right)^2 = \frac{375}{256}$ . Por tanto la variable aleatoria

$\eta = \sum_{i=1}^{150} \xi_i$  se distribuirá aproximadamente normal  $N\left(150 \cdot \frac{45}{16}, \sqrt{150} \cdot \sqrt{\frac{375}{256}}\right) \cong$

$\cong N(421,875; 14,823)$ . Así pues:

- $P(\eta < 500) =$  (tipificando)  $= P(Z < 5,27) \cong 1$ .



b)  $P(\eta > x) = 0,3 \Leftrightarrow P(\eta \leq x) = 0,7 \Leftrightarrow$  (tipificando)  $P\left(Z \leq \frac{x - 421,875}{14,823}\right) = 0,7$ , y de las tablas se obtiene que  $\frac{x - 421,875}{14,823} \cong 0,5244 \Leftrightarrow x = 429,648$ . El volumen de ventas pedido es pues de 429648 euros.

2º.-

La media del rendimiento total sería:  $E(RT) = 2E(X) + E(Y) = 2 \cdot 0,1 + 0,5 = 0,7$ .

Por ser X e Y variables dependientes,  $Var(RT) = 4 \cdot Var(X) + Var(Y) + 4 \cdot Cov(X, Y)$ .

Tenemos pues:

a) Si  $\rho_{XY} = 0,5 \rightarrow 0,5 = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)}} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{0,2 \cdot 0,9}} \rightarrow Cov(X, Y) \cong 0,2121$ , de donde:

$$Var(RT) = 4 \cdot 0,2 + 0,9 + 4 \cdot 0,2121 \cong 2,55$$

b) Si  $\rho_{XY} = -0,5 \rightarrow Cov(X, Y) \cong -0,2121$ , de donde:  $Var(RT) = 4 \cdot 0,2 + 0,9 - 4 \cdot 0,2121 \cong 0,85$ .

Respecto a cual de las dos situaciones es más conveniente, depende:

- si se desea una inversión con más riesgo, entonces sería más conveniente la situación del a) pues al ser la correlación positiva, significa que al aumentar uno de los dos rendimientos (X o Y) aumenta el otro. Pero también, y ahí está el riesgo, al disminuir un rendimiento, disminuye el otro.
- si se desea una inversión más conservadora, la situación más conveniente sería la del b) pues al ser la correlación negativa, al disminuir un rendimiento aumenta el otro y viceversa con lo que las pérdidas se compensarían.