



ESTADÍSTICA TEÓRICA I. SEPTIEMBRE 2004.
Código asignatura. 207. Código carrera 43. Examen tipo Reserva

PREGUNTAS TIPO TEST:

1ª.- Dos sucesos A y B son disjuntos cuando se verifica:

- a) $P(A \cap B) = P(A) + P(B)$ b) $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ c) $P(A \cap B) = 0$ **d) Ninguna de las anteriores.**

2ª.- Dadas las v.a. independientes ξ_i con función de probabilidad $P(\xi = 1) = 1, P(\xi \neq 1) = 0$. La función característica de la

v.a. $\eta = \sum_{i=1}^n \xi_i$ es:

- a) e^{nit}** b) ne^{it} c) 0 d) Ninguna de las anteriores.

3ª.- Dada una v. a. con función de distribución $F(x) = kx(1 - x/2)$ para $0 \leq x < 1$; 0 si $x < 0$; 1 si $x \geq 1$. ¿Cuál es el valor de k para que sea función de distribución?

- a) $k = 3$ **b) $k = 2$** c) $k = 1$ d) Ninguna es cierta.

4ª.- Un servicio de urgencias recibe una media de 6 enfermos por hora. ¿Cuál es la probabilidad de que no acuda ningún enfermo en una hora seleccionada al azar?

- a) $\approx 0'0025$** b) 0 c) $\approx 0'0149$ d) Ninguna de las anteriores.

5ª.- La v.a. ξ tiene como función de densidad $f(x) = 1/2$ si $2 \leq x \leq 4$. ¿Cuál será $P(\xi = 3)$?

- a) 1 b) 0'5 **c) 0** d) Ninguna es cierta.

6ª.- Una v.a. ξ se distribuye $B(2, 0'4)$, si la v.a. η es la media de 200 v. a. independientes ξ . La $P(\eta \geq 0'8955)$ es:

- a) 0'1711 b) 0'9744 **c) 0'0256** d) Ninguna de las anteriores.

7ª.- Si las v.a. ξ_1 y ξ_2 son estadísticamente independientes. Se puede afirmar que:

- a) $E(\xi_1 \cdot \xi_2) = E(\xi_1) \cdot E(\xi_2)$** b) $E(\xi_1 \cdot \xi_2) = E(\xi_1) + E(\xi_2)$ c) $E(\xi_1 \cdot \xi_2) = 0$ d) Ninguna es cierta.

8ª.- Dada la v.a. $\xi \equiv N(3, \sigma)$. ¿Qué valor debe tomar σ^2 para que $P(|\xi - 3| \leq 2) = 0'95$?

- a) $\approx 3'8416$ **b) $\approx 1'0412$** c) $\approx 0'2603$ d) Ninguna es correcta.

9ª.- Si el coeficiente de asimetría de Fisher $\gamma_1 > 0$, podemos afirmar que la distribución es:

- a) Simétrica b) Simétrica positiva **c) Asimétrica positiva** d) Ninguna de las anteriores.

10ª.- Dadas las v.a. independientes $\gamma \equiv N(0, 2)$, $\eta_i \equiv N(0, 2)$ y la v.a. $\xi = 3\gamma \left[\sum_{i=1}^9 (\eta_i)^2 \right]^{-1/2}$. ¿Cuál será $P(\xi \leq 0'7027)$?

- a) 0'25 **b) 0'75** c) 0'56 d) Ninguna es correcta.

Aclaraciones.-

1ª.- Si suponemos que ξ es una variable aleatoria continua definida en \mathbb{R} y consideramos por ejemplo los sucesos $A = \{3, 4\}$ y $B = \{4, 5\}$ se verifica que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, $P(A \cap B) = P(A) + P(B)$ y $P(A \cap B) = 0$ y sin embargo A y B no son disjuntos.

$$2ª.- \varphi_{\eta}(t) = E(e^{it\eta}) = E\left(e^{i\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right)t}\right) = \prod_{i=1}^n E(e^{i\xi_i t}) = \prod_{i=1}^n e^{it} = e^{nit}$$

3ª.- Como la función de distribución de una variable continua es continua, $\lim_{x \rightarrow 1} F(x) = F(1)$,

$$\text{es decir, } 1 = \lim_{x \rightarrow 1} kx\left(1 - \frac{x}{2}\right) = \frac{k}{2} \rightarrow k = 2$$



4ª.- El número de enfermos que llegan en una hora seleccionada al azar es una variable aleatoria ξ que se distribuye como una Poisson de parámetro $\lambda = 6$. Se tiene que $P(\xi = 0) = \frac{6^0}{0!} e^{-6} \cong 0,0025$

6ª.- Tendremos que $E(\xi) = 2 \cdot 0,4 = 0,8$ y $DT(\xi) = \sqrt{2 \cdot 0,4 \cdot 0,6} = \sqrt{0,48}$ luego $E(\eta) = \frac{1}{200} \sum_{i=1}^{200} \xi_i = 0,8$ y $DT(\eta) = \sqrt{\frac{1}{200^2} \sum_{i=1}^{200} \text{Var}(\xi_i)} = \sqrt{\frac{\text{Var}(\xi_i)}{200}} = \frac{\sqrt{0,24}}{10}$. Así pues, η será aproximadamente normal $N\left(0,8; \frac{\sqrt{0,24}}{10}\right) \cong N(0,8; 0,049)$, de donde $P(\eta \geq 0,8955) =$
 $=$ (tipificando) $= P\left(Z \geq \frac{0,8955 - 0,8}{0,049}\right) \cong P(Z \geq 1,9494) =$ (tablas) $\cong 0,0256$.

8ª.- $0,95 = P(|\xi - 3| \leq 2) = P(-2 \leq \xi - 3 \leq 2) \rightarrow P(\xi - 3 \leq 2) = 0,975$. Tipificando: $P\left(Z \leq \frac{2}{\sigma}\right) = 0,975$ y buscando en las tablas, debe ser $\frac{2}{\sigma} = 1,96 \rightarrow \sigma = \frac{2}{1,96} \cong 1,0204 \rightarrow \sigma^2 \cong 1,0412$.

10ª.- La variable ξ se distribuye t-Student con 9 grados de libertad y de las tablas se obtiene que $P(\xi \leq 0,7027) \cong 0,75$.

EJERCICIOS PRÁCTICOS:

1º.- Una compañía farmacéutica ha observado que los gastos (ξ) y los ingresos (η) son variables aleatorias, que tienen como función de densidad conjunta (ξ, η): $f(x, y) = k(x + y)$ si $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$. Determinar:

- Si los gastos y los ingresos son variables aleatorias independientes.
- La probabilidad de que los ingresos sean mayores que los gastos.

2º.- Una entidad financiera cuando realiza la revisión de sus préstamos hipotecarios efectúa, en cada uno de ellos, un redondeo al número entero más próximo. Se supone que el redondeo en el importe de cada préstamo produce un error que sigue una distribución uniforme entre $-0'05$ y $0'05$ euros. Calcular la probabilidad de que la suma del importe de los 1.500 préstamos hipotecarios, que tiene concedidos la entidad, tenga un error total entre -1 y 1 euros

Soluciones.-

1º.-

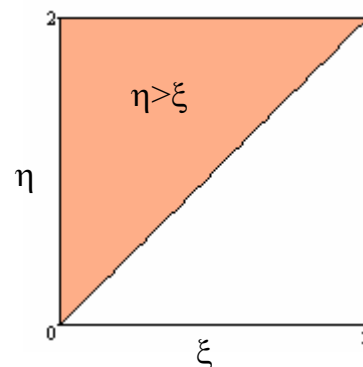
Calculamos k: $1 = \int_0^2 \left(\int_0^2 k(x + y) dy \right) dx$ de donde se obtiene $k = \frac{1}{8}$. Las funciones de

densidad marginales:

$$f_1(x) = \frac{1}{8} \int_0^2 (x + y) dy = \frac{y+1}{4}; \quad f_2(y) = \frac{1}{8} \int_0^2 (x + y) dx = \frac{x+1}{4}.$$

Se tendrá:

- Puesto que $f(x, y) \neq f_1(x) \cdot f_2(y)$, las variables ξ y η no son independientes.
- El recinto $\eta > \xi$ viene dado por las desigualdades $0 \leq x < y \leq 2$, luego la probabilidad:





$$P(\eta > \xi) = \frac{1}{8} \int_0^2 \left(\int_x^2 (x+y) dy \right) dx = \frac{1}{2}$$

2º.-

Si llamamos ξ_i a la variable uniforme en el intervalo $[a, b] = [-0,05 ; 0,05]$ se tiene:

- media $\mu_i = \frac{a+b}{2} = 0$
- desviación típica $= \frac{b-a}{\sqrt{12}} = \frac{0,1}{\sqrt{12}}$

Entonces, la variable $\eta = \sum_{i=1}^{1500} \xi_i$ se distribuye aproximadamente normal $N\left(0, \frac{0,1 \cdot \sqrt{1500}}{\sqrt{12}}\right) =$
 $= N\left(0, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$, de donde: $P(-1 < \eta < 1) = (\text{tipificando}) = P\left(-\frac{2}{\sqrt{5}} < Z < \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 2P\left(Z < \frac{2}{\sqrt{5}}\right) - 1 \cong$
 $\cong 2P(Z < 0,8944) - 1 = (\text{tablas}) = 0,6289$