



ESTADÍSTICA TEÓRICA I. JUNIO 2005. 1ª semana
Código asignatura. 207. Código carrera 43. Tipo examen A.

PREGUNTAS TIPO TEST:

- 1ª.- Lanzamos dos veces un dado ideal. La probabilidad de obtener un número par es igual a:
☒ a) 1/2 b) 1/4 c) 1/6 d) Ninguna de las anteriores.
- 2ª.- La función característica de una v.a. ξ es: $\varphi(t) = e^{-2t^2}$, ¿cuál es su varianza?
☐ a) 2 ☒ b) 4 c) 1 d) Ninguna de las anteriores.
- 3ª.- La desviación típica es una medida de:
☐ a) Posición ☒ b) Dispersión c) Forma d) Ninguna es cierta.
- 4ª.- Dada una v. a con $f(x) = k \left[\frac{1}{x^2} \right]$ si $1 \leq x < 3$. ¿Cuál es su media?
☐ a) No se puede conocer b) 0 ☒ c) $\approx 1,6479$ d) Ninguna de las anteriores.
- 5ª.- Dadas ξ_1, \dots, ξ_n v.a independientes distribuidas $N(0,2)$. La distribución de la v.a $\eta = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2$ es:
☒ a) $4\chi^2(n)$ b) $\frac{1}{4}\chi^2(n)$ c) $N(0, 2n)$ d) Ninguna de las anteriores.
- 6ª.- Cada vez que una secretaria efectúa un cálculo se equivoca con una probabilidad 0'01. La probabilidad de obtener dos cálculos sin equivocación, antes de obtener el tercer cálculo equivocado, la proporciona una distribución de probabilidad:
☒ a) Geométrica b) Binomial Negativa c) Binomial d) Ninguna de las anteriores.
- 7ª.- Dada una v.a bidimensional continua (ξ, η) , se dice que ξ y η son independientes si:
☒ a) $f\left(\frac{x}{y}\right) = f_1(x)$ b) $f\left(\frac{y}{x}\right) = f_1(x)$ c) $f\left(\frac{x}{y}\right) = f_2(y)$ d) Ninguna es correcta.
- 8ª.- Sean las v.a independientes $\xi_1 \equiv N(2, 2)$ y $\xi_2 \equiv N(1, 1)$, se define la v.a. $\eta = 2\xi_1 - 2\xi_2 - 2$ ¿cuál es la $P(\eta \geq 1,74)$?
☐ a) $\approx 0,2389$ b) $\approx 0,1094$ ☒ c) $\approx 0,3483$ d) Ninguna de las anteriores.
- 9ª.- Dada una v. a con $f(x) = kx$ si $0 \leq x < 1$. ¿Cuál es su mediana?
☒ a) $\approx 0,7071$ b) 1 c) $\approx 0,6666$ d) Ninguna de las anteriores
- 10ª.- Dada una v.a. ξ con distribución $U = [-2, 1]$, la media de la v.a $\eta = -2\xi$ es:
☒ a) 1 b) -1 c) 1/2 d) Ninguna es correcta.

Aclaraciones.-

1ª.- Sea A el suceso "obtener par en el primer lanzamiento e impar en el segundo" y B el suceso "obtener impar en el primer lanzamiento y par en el segundo". Ambos sucesos son incompatibles y la probabilidad pedida es $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{9}{36} + \frac{9}{36} = \frac{1}{2}$

2ª.- La varianza $\sigma^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \frac{\varphi''(0)}{i^2} - \left(\frac{\varphi'(0)}{i} \right)^2$ En nuestro caso: $\varphi'(t) = -4te^{-2t^2}$ de donde $\varphi'(0) = 0$; $\varphi''(t) = -4e^{-2t^2} + 16t^2e^{-2t^2} \rightarrow \varphi''(0) = -4$, de donde se obtiene que $\sigma^2 = 4$.

4ª.- Calculamos primeramente el valor de k, para el que se obtiene $k = \frac{3}{2}$. A continuación calculamos $\mu = \int_1^3 xf(x)dx$, obteniéndose $\mu = \frac{3}{2} \ln 3 \approx 1,6479$.



5ª.- $\frac{\eta}{4} = \frac{\xi_1^2}{4} + \frac{\xi_2^2}{4} + \dots + \frac{\xi_n^2}{4}$ es una suma de n variables normales $N(0, 1)$ luego es una variable $\chi^2(n)$. Así pues, η será $4\chi^2(n)$.

8ª.- η es normal $N(0, 2\sqrt{3})$. Tipificando y usando las tablas se obtiene que $P(\eta \geq 1,74) = 0,3483$.

9ª.- Calculamos primeramente el valor de k, para el que se obtiene $k = 2$. Para la mediana Me, se cumple: $\int_0^{Me} f(x)dx = 0,5$, obteniéndose $Me^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow Me = \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0,7071$.

$$10ª.- E(\eta) = -2E(\xi) = -2 \cdot \frac{-2+1}{2} = 1$$

EJERCICIOS PRÁCTICOS:

1º.- Una cadena de fabricación consta de 3 maquinas que deben funcionar simultáneamente para producir un producto. Si los tiempos de funcionamiento, de las 3 maquinas, son independientes y se distribuyen (en horas) respectivamente $N(42, 2)$, $N(46, 3)$ y $N(49, 6)$:

- a) Calcular la probabilidad de que la cadena de fabricación funcione las 40 horas laborables de una semana, si al comienzo de la semana se renuevan los subsistemas.

Solución.-

Llamando ξ_i al tiempo de funcionamiento de la máquina i ($i = 1, 2, 3$), la probabilidad pedida, puesto que las variables son independientes, será:

$$P(\xi_i \geq 40)P(\xi_i \geq 40)P(\xi_i \geq 40) = (\text{tipificando}) = P(Z \geq -1)P(Z \geq -2)P(Z \geq -3) = (\text{tablas}) = (1 - 0,1587)(1 - 0,0228)(1 - 0,0068) = 0,7672.$$

2º.- Una compañía de seguros ha observado que la media de las ventas mensuales de pólizas de seguro de hogar es de 6.000, con una desviación típica de 500. Obtener:

- a) La probabilidad de que las ventas mensuales de estas pólizas estén comprendidas entre 5.000 y 7.000.
b) El menor intervalo que incluya al menos el 95% de las ventas mensuales de estas pólizas.

Solución.-

Como desconocemos la distribución de las ventas mensuales, aplicaremos la desigualdad

de Chebychev: $P[|\xi - \mu| < k] \geq 1 - \frac{\sigma^2}{k^2}$

- a) Poniendo en la desigualdad anterior $\mu = 6000$ y $\sigma = 500$, tenemos:

$$P[5000 < \xi < 7000] = P[|\xi - 6000| < 1000] \geq 1 - \frac{250000}{1000000} = 0,75.$$

- b) Si $1 - \frac{\sigma^2}{k^2} \geq 0,95 \Rightarrow k^2 \geq \frac{\sigma^2}{1 - 0,95} \Rightarrow k \geq \frac{\sigma}{\sqrt{0,05}} = \frac{500}{\sqrt{0,05}} \cong 2236$. Luego el intervalo sería: [3764, 8236]