



ESTADÍSTICA TEÓRICA I. JUNIO 2006
Código asignatura. 207. Código carrera 43.

Examen tipo A

PREGUNTAS TIPO TEST:

1ª.- Dos sucesos A y B son independientes cuando verifican:

- a) $P(A \cap B) = 0$ **b) $P(A/B) = P(A)$** c) $P(A/B) = P(B)$ d) Ninguna de las anteriores.

2ª.- La función de distribución $F(x)$ de una variable aleatoria, por su definición es:

- a) Negativa b) Decreciente **c) $0 \leq F(x) \leq 1$** d) Ninguna de las anteriores.

3ª.- La distribución Binomial $B(n, p)$ de una variable aleatoria converge a una distribución de Poisson $P(\lambda)$ cuando:

- a) $n \rightarrow \infty$ y $\lambda = 0$ b) $n \rightarrow 0$ y $\lambda = np$ constante **c) $n \rightarrow \infty$ y $\lambda = np$ constante** d) Ninguna es cierta.

4ª.- Dada una variable aleatoria ξ con función característica: $\varphi_{\xi}(t)$. Si $\eta = 3\xi$ su función característica es:

- a) $\varphi_{\eta}(t) = \varphi_{\xi}(3t)$** b) $\varphi_{\eta}(t) = 3\varphi_{\xi}(t)$ c) $\varphi_{\eta}(t) = \varphi_{\xi}(t^3)$ d) Ninguna es cierta.

5ª.- La varianza de una variable aleatoria $V(\xi)$ es siempre:

- a) $V(\xi) > 0$ **b) $V(\xi) \geq 0$** c) $V(\xi) \neq 0$ d) Ninguna es cierta.

6ª.- Dada una variable aleatoria continua ξ con distribución uniforme $U = [0; 1]$, la media de la variable aleatoria $\eta = 2\xi$ es:

- a) 1** b) -1 c) 1/2 d) Ninguna es correcta

7ª.- Dada una variable aleatoria con $f(x) = kx^2$ si $0 \leq x < 1$. ¿Cuál es su mediana?

- a) 0'5 b) $\approx 0'75$ **c) $\approx 0'7937$** d) Ninguna de las anteriores

8ª.- Sean las variables aleatorias independientes $\xi_1 \equiv N(0; 1)$ y $\xi_2 \equiv N(1; 1)$. ¿Cuál será la distribución de la variable aleatoria $\eta = 2\xi_1 - 2\xi_2$?

- a) $N(-2; 8)$ **b) $N(-2; \sqrt{8})$** c) $N(-2; 0)$ d) Ninguna de las anteriores.

9ª.- Si las variables aleatorias ξ_1 y ξ_2 tienen coeficiente de correlación lineal $\rho = 0$, siempre se puede afirmar:

- a) Son independientes **b) Están incorrelacionadas linealmente**
c) Su correlación es perfecta d) Ninguna es correcta.

10ª.- Cada vez que un alumno realiza un problema se equivoca con una probabilidad 0'01. La probabilidad de que realice tres problemas sin equivocación, antes de realizar el segundo problema equivocado, la proporciona una distribución de probabilidad:

- a) Geométrica b) Binomial **c) Binomial Negativa** d) Ninguna de las anteriores

Algunas aclaraciones.-

4º) $\varphi_{\eta}(t) = E[e^{it\eta}] = E[e^{3it\xi}] = E[e^{i(3t)\xi}] = \varphi_{\xi}(3t)$

7ª) Se obtiene en primer lugar que $k = 3$, luego $\frac{1}{2} = P[\xi \leq \text{Me}] = 3 \int_0^{\text{Me}} x^2 dx = (\text{Me})^3 \rightarrow$

$\rightarrow \text{Me} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx 0,7937$

EJERCICIOS PRÁCTICOS:

1º.- La demanda de un cierto producto se considera una variable aleatoria que viene dada por la siguiente distribución de probabilidad:

Unidades demandadas (x_i)	1	2	3
Probabilidades (p_i)	0'25	0'30	0'45

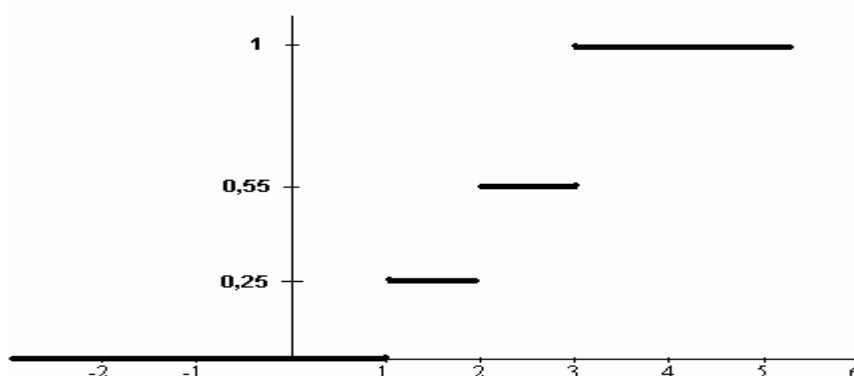
- a) ¿Es realmente una distribución de probabilidad?; Obtener la función de distribución y realizar su representación gráfica.
b) Calcular la Esperanza y Varianza de la variable aleatoria.

Solución.-

a) Es una función de probabilidad porque $p_i \geq 0, \forall i$ y $\sum_{i=1}^3 p_i = 1$. La función de distribución:

$$F(x) = P[\xi \leq x] = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 0,25, & 1 \leq x < 2 \\ 0,55, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

cuya gráfica:



$$b) E[\xi] = \sum_{i=1}^3 x_i p_i = 0,25 + 0,60 + 1,35 = 2,2$$

$$E[\xi^2] = \sum_{i=1}^3 x_i^2 p_i = 0,25 + 1,2 + 4,05 = 5,5$$

$$\text{Var}[\xi] = E[\xi^2] - E[\xi]^2 = 5,5 - 4,84 = 0,66$$

2º.-Se sabe que el 1% de las piezas producidas en un proceso de fabricación son defectuosas.

- Si tomamos una muestra formada por 30 piezas. ¿Cuál es la probabilidad de que dos o más de ellas sean defectuosas?
- Si las piezas se empaquetan en lotes de 10 y se sabe que en cada lote el número de piezas defectuosas es de dos. ¿Cuál es la probabilidad de no obtener ninguna pieza defectuosa cuando se seleccionan aleatoriamente cinco piezas de un lote?

Solución.-

a) La variable ξ = “nº de piezas defectuosas” es binomial $B[30; 0,01]$, cuya media es 0,3 y cuya desviación típica es $\sqrt{30 \cdot 0,01 \cdot 0,99} \cong 0,545$, por lo que, de acuerdo con el teorema de Moivre, la variable $Z = \frac{\xi - 0,3}{0,545}$ es aproximadamente normal $N(0, 1)$. Tendremos entonces:

$$P[\xi \geq 2] = P\left[Z \geq \frac{2 - 0,3}{0,545}\right] = P[Z \geq 3,12] = (\text{tablas}) = 0,0009.$$

[Nota: al aproximar una variable discreta (la binomial) por una continua (la normal), los números enteros deben considerarse como intervalos de longitud 1 (por ejemplo, el número 2 sería el intervalo $[1,5, 2,5]$); este proceso se denomina

“corrección por continuidad” y si lo efectuamos en el problema, se tendría que $P[\xi \geq 2] = P[\xi \geq 1,5] = P\left[Z \geq \frac{1,5 - 0,3}{0,545}\right] = P[Z \geq 2,20] = (\text{tablas}) = 0,0139]$



b) Sea S_i el suceso “la pieza i -ésima no es defectuosa”. Se desea calcular:

$$\begin{aligned} & P[S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \cap S_5 \cap S_6] = \\ &= P[S_1] \cdot P[S_2/S_1] \cdot P[S_3/S_1 \cap S_2] \cdot P[S_4/S_1 \cap S_2 \cap S_3] \cdot P[S_5/S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4] \cdot P[S_6/S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \cap S_5] = \\ &= \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

Puede también resolverse por la fórmula de Laplace, siendo el número de casos posibles

$$\binom{10}{5} \text{ y el número de casos favorables } \binom{8}{5}, \text{ de donde } P = \frac{\binom{8}{5}}{\binom{10}{5}} = \frac{2}{9}$$