



ESTADÍSTICA TEÓRICA I. JUNIO 2006. 2ª semana
Código asignatura. 207. Código carrera 43.

Examen tipo A

PREGUNTAS TIPO TEST:

1ª.- Para dos sucesos disjuntos A y B , se verifica:

- a) $P(A \cap B) = 0$ b) $P(A \cap B) = 1$ c) $P(A \cap B) \neq 0$ d) Ninguna de las anteriores.

2ª.- La función de densidad $f(x)$ de una variable aleatoria verifica que:

- a) Está definida exclusivamente en intervalos acotados b) $f(x) < 0$
c) $f(x) \geq 0$ d) Ninguna es cierta

3ª.- Dadas $\xi_1 \equiv B(2, 0'4)$ y $\xi_2 \equiv B(2, 0'4)$ variables aleatorias independientes de tipo Binomial. La distribución de la variable aleatoria $\eta = \xi_1 + \xi_2$ es:

- a) $\eta \equiv B(2, 0'4)$ b) $\eta \equiv B(4, 0'4)$ c) $\eta \equiv B(4, 0'8)$ d) Ninguna de las anteriores.

4ª.- Dadas dos variables aleatorias independientes ξ y η con funciones características: $\varphi_\xi(t)$ y $\varphi_\eta(t)$. Si $\omega = \xi + \eta$ su función característica es:

- a) $\varphi_\omega(t) = \varphi_\xi(t) + \varphi_\eta(t)$ b) $\varphi_\omega(t) = \varphi_\xi(t) \cdot \varphi_\eta(t)$ c) $\varphi_\omega(t) = \varphi_{\xi\eta}(t)$ d) Ninguna es cierta.

5ª.- La Curtosis hace referencia al apuntamiento de una distribución de probabilidad, cuando se la compara con la distribución:

- a) Normal b) Uniforme c) χ^2 de Pearson d) Ninguna es cierta.

6ª.- Dada una variable aleatoria $\xi \equiv N(-1; 1)$. ¿Cuál es $P(|\xi| \leq 1)$?

- a) 0'9544 b) 0'0228 c) 0'4772 d) Ninguna es correcta.

7ª.- Dada una variable aleatoria con $f(x) = kx^2$ si $0 \leq x < 1$. ¿Cuál es su media?

- a) 0'5 b) $\approx 0'75$ c) $\approx 0'7937$ d) Ninguna de las anteriores

8ª.- Sean las variables aleatorias independientes $\xi_1 \equiv N(0; 1)$ y $\xi_2 \equiv N(0; 1)$. ¿Cuál será la esperanza matemática de la variable aleatoria $\eta = \xi_1^2 + \xi_2^2$?

- a) $E(\eta) = 2$ b) $E(\eta) = 1$ c) $E(\eta) = 0$ d) Ninguna de las anteriores.

9ª.- El coeficiente de determinación lineal ρ^2 :

- a) $\rho^2 > 1$ b) $0 < \rho^2 < 1$ c) $0 \leq \rho^2 \leq 1$ d) Ninguna es correcta.

10ª.- Cada vez que una secretaria efectúa un cálculo se equivoca con una probabilidad 0'02. La probabilidad de obtener dos cálculos sin equivocación, antes de obtener el primer cálculo equivocado, la proporciona una distribución de probabilidad:

- a) Geométrica b) Binomial Negativa c) Binomial d) Ninguna de las anteriores.

Algunas aclaraciones.-

8º) La variable η se distribuye χ^2 con 2 grados de libertad y la esperanza matemática de la χ^2 coincide con el número de grados de libertad.

EJERCICIOS PRÁCTICOS:

1º.- La longitud de una pieza se considera una variable aleatoria con función:

$$f(x) = \begin{cases} k(x^2 - 1) & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Si la longitud está comprendida entre 1'2 y 1'8 la pieza es considerada válida, en caso contrario es considerada defectuosa.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que una determinada pieza sea válida?
b) Si tomamos un lote de 200 piezas, ¿cuál es la probabilidad de que el número de piezas defectuosas sea inferior a 50?



Solución.-

a) Debe ser $1 = \int_1^2 k(x^2 - 1)dx = k \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^2 = k \frac{4}{3} \rightarrow k = \frac{3}{4}$. La probabilidad de que una pieza sea válida será: $\frac{3}{4} \int_{1,2}^{1,8} (x^2 - 1)dx = \frac{3}{4} \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_{1,2}^{1,8} = 0,576$.

b) La probabilidad de que una pieza sea defectuosa será $1 - 0,576 = 0,424$. La variable ξ = “número de piezas defectuosas” es binomial $B(200; 0,424)$ y, por el teorema de Moivre, es aproximadamente normal $N(200 \cdot 0,424; \sqrt{200 \cdot 0,424 \cdot 0,576}) = N(84,8; 6,99)$. Así pues, si Z es normal $N(0, 1)$, se tiene:

$$P(\xi < 50) = P\left(Z < \frac{50 - 84,8}{6,99}\right) = P(Z < -4,98) \cong 0$$

2º.- El Ministerio de Sanidad tras la aplicación de la ley que prohíbe fumar en el lugar de trabajo, elabora el siguiente informe: el 95% de la población es favorable a la ley, el 10% de la población desfavorable a la ley son hombres, el 15% de la población favorable a la ley son mujeres y el 25% de las mujeres favorables a la ley trabajan en instituciones públicas.

- Calcular la probabilidad de que una persona elegida al azar sea favorable a la ley, mujer y esté trabajando en una institución pública.
- Sabiendo que una persona elegida al azar es un hombre, ¿cuál es la probabilidad de que sea favorable a la ley?

Solución.-

Sea F el suceso “ser favorable a la ley”, M el suceso “ser mujer” (\bar{M} será el suceso “ser hombre”, contrario de M) y T el suceso “trabajar en instituciones públicas”.

Los datos de que se dispone son:

$$\left. \begin{array}{l} P(F) = 0,95 \text{ (y en consecuencia } P(\bar{F}) = 0,05) \\ P(\bar{M} / \bar{F}) = 0,1 \\ P(M/F) = 0,15 \text{ (y en consecuencia } P(\bar{M}/F) = 0,85) \\ P(T/M \cap F) = 0,25 \end{array} \right\}$$

a) La probabilidad que se pide es $P(F \cap M \cap T) = P(F \cap M) \cdot P(T / F \cap M) = P(F) \cdot P(M/F) \cdot P(T / F \cap M) = 0,95 \cdot 0,15 \cdot 0,25 = \mathbf{0,0356}$.

b) La probabilidad que se pide es $P(F / \bar{M}) = (\text{fórmula de Bayes}) = \frac{P(F) \cdot P(\bar{M} / F)}{P(F) \cdot P(\bar{M} / F) + P(\bar{F}) \cdot P(\bar{M} / \bar{F})} = \frac{0,95 \cdot 0,85}{0,95 \cdot 0,85 + 0,05 \cdot 0,1} = \mathbf{0,9938}$