

ESTADÍSTICA TEÓRICA I. SEPTIEMBRE 2007. Examen tipo A
Código asignatura. 207. Código carrera 43.

PREGUNTAS TIPO TEST:

1ª.- Sean los sucesos A y B, tales que la $P(A) = 1/4$, $P(A/B) = 1/4$. y $P(B/A) = 1/2$ ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?:

- a) $A \subset B$ b) $P(\bar{A}/\bar{B}) = 1/2$ **c) A y B son independientes** d) Ninguna

2ª.- Dadas las v.a. independientes $\xi_1 = N(3,1)$; $\xi_2 = N(4,2)$ y $\xi_3 = N(2,1)$. ¿Cuál es la distribución de la variable aleatoria (v.a.): $\lambda = \xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3$?:

- a) $N(7, \sqrt{6})$ b) $N(5,2)$ c) $N(5, \sqrt{6})$ **d) Ninguna de las anteriores**

3ª.- La convergencia de una distribución binomial a una normal se prueba a partir del teorema de:

- a) Chebychef b) Bernouille **c) Moivre** d) Ninguno de los anteriores

4ª.- Dada la v. a. continua ξ con distribución uniforme en el intervalo $(-5, 5)$. ¿Cuál es la $P[|\xi - 3| > 2]$?

- a) 3/5** b) 2/5 c) 0 d) Ninguna es cierta

5ª.- Dada la v. a. ξ cuya función característica es $\varphi(t) = \frac{1}{1+t^2}$. ¿Cuál es la $\varphi(t)$ de la v.a.: $\eta = 2-\xi$?

- a) $\frac{e^{2it}}{1-t^2}$ **b) $\frac{e^{2it}}{1+t^2}$** c) e^{2it} d) Ninguna de las anteriores

6ª.- ¿Cuál de las siguientes distribuciones no cumple la propiedad aditiva o reproductiva?

- a) Gamma **b) Geométrica** c) Binomial d) χ^2 de Pearson

7ª.- La función $g(x) = 2x^2 - 1$, en el intervalo $-1 < x < 1$, se corresponde con una función de:

- a) Densidad b) Cuantía c) Distribución **d) Ninguna**

8ª.- Sea la v.a. $\xi = N(-4, 3)$, ¿cuál debe ser el valor de k para que $P(\xi \leq -k) = 0.25$?

- a) ≈ 5.24 b) ≈ -0.67 c) ≈ 5.62 **d) Ninguno de los anteriores**

9ª.- El coeficiente de correlación es invariante ante los cambios de:

- a) Origen **b) Origen y escala** c) Escala d) Ninguna es cierta

10ª.- La función de distribución de una variable aleatoria nos indica:

- a) La probabilidad en un punto. b) La densidad media de probabilidad en un intervalo infinitesimal.
c) La probabilidad acumulada. d) Ninguna es correcta.

ALGUNAS ACLARACIONES.-

1ª) Puesto que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ y también $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B) = P(B) \cdot \frac{1}{2}$, resulta que $\frac{1}{16} = P(B) \cdot \frac{1}{2} \rightarrow P(B) = \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$ valor que es igual a $P(B/A)$. Luego $P(B) = P(B/A)$ es decir, A y B son independientes.

2ª) $E(\lambda) = E(\xi_1) + 2E(\xi_2) - E(\xi_3) = 3 + 8 - 2 = 9$

4ª) La función de densidad es $f(x) = \frac{1}{10}$ en $(-5, 5)$ y cero en el resto. Por tanto:

$$P[|\xi - 3| > 2] = 1 - P[|\xi - 3| \leq 2] = 1 - P[-2 \leq \xi - 3 \leq 2] = 1 - P[1 \leq \xi \leq 5] = 1 - \int_1^5 \frac{1}{10} dx = 1 - \frac{4}{10} = \frac{3}{5}$$

$$5^a) \varphi_{\eta}(t) = E[e^{it\eta}] = E[e^{(2-\xi)it}] = E[e^{2it-\xi it}] = e^{2it} E[e^{-\xi it}] = e^{2it} E[e^{\xi i(-t)}] = e^{2it} \varphi_{\xi}(-t) = \frac{e^{2it}}{1+t^2}$$

$$7^a) \text{ La función dada es negativa en el intervalo } \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \subset [-1, 1]$$

$$8^a) P[\xi \leq -k] = (\text{tipificando}) = P\left[Z \leq \frac{-k+4}{3}\right] = 0,25. \text{ De las tablas obtenemos que debe}$$

$$\text{ser } \frac{-k+4}{3} \cong -0,67 \text{ de donde } k \cong 6,01$$

9ª) Sea $(X', Y') = (aX+b, cY+d)$. Se tiene entonces $E(X') = aE(X) + b$ y $E(Y') = cE(Y) + d$, luego $\text{Cov}(X', Y') = E[(X'-E(X')) \cdot (Y'-E(Y'))] = E[(aX-aE(X)) \cdot (cY-cE(Y))] = acE[(X-E(X)) \cdot (Y-E(Y))] = ac\text{Cov}(X, Y)$. Además $\sigma_{X'} = a\sigma_X$ y $\sigma_{Y'} = c\sigma_Y$, luego:

$$\rho_{X'Y'} = \frac{\text{Cov}(X', Y')}{\sigma_{X'}\sigma_{Y'}} = \frac{ac\text{Cov}(X, Y)}{a\sigma_X c\sigma_Y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \rho_{XY}$$

EJERCICIOS.-

1º.- Tenemos 9 urnas, de ellas 4 son del tipo U_1 que contiene 3 bolas azules y 3 rojas, 3 son del tipo U_2 que contiene 4 bolas azules y 2 rojas y 2 son del tipo U_3 que contiene 1 bola azul y 5 rojas. Hallar:

1º) Probabilidad de que una bola extraída al azar, de una de las 9 urnas, sea roja. 2º) Probabilidad de que habiendo sacado bola roja sea de las urnas del tipo U_2 . 3º) Si ha salido bola azul, ¿de qué tipo de urna es más probable que proceda?.

Solución.-

1) La probabilidad de elegir cada urna (que supondremos equiprobables) es $\frac{1}{9}$. Entonces, por el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de extraer una bola roja:

$$P(R) = \frac{1}{9} \left(4 \cdot \frac{3}{6} + 3 \cdot \frac{2}{6} + 2 \cdot \frac{5}{6} \right) = \frac{28}{54} \cong 0,52$$

$$2) \text{ Por el teorema de Bayes: } P(U_2/R) = \frac{P(U_2) \cdot P(R/U_2)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{9} \cdot \frac{2}{6}}{\frac{28}{54}} = \frac{6}{28} \cong 0,21$$

3) La probabilidad de bola azul $P(A) = 1 - P(R) = \frac{26}{54}$. Por el teorema de Bayes:

$$P(U_1/A) = \frac{P(U_1) \cdot P(A/U_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{9} \cdot \frac{3}{6}}{\frac{26}{54}} = \frac{12}{26}; \quad P(U_2/A) = \frac{P(U_2) \cdot P(A/U_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{9} \cdot \frac{4}{6}}{\frac{26}{54}} = \frac{12}{26}; \text{ por tanto}$$

debe ser $P(U_3/A) = \frac{2}{26}$. Luego la máxima probabilidad la proporcionan por igual, las urnas de tipo 1 ó 2.

2º.- La variable aleatoria bidimensional (ξ, η) tiene como función de densidad $f(x, y) = 2$, para $0 \leq x \leq 1$; $0 \leq y \leq x$. Hallar: 1º) Las esperanzas marginales. 2º) $P(\xi < 1/4 / \eta = 1/2)$. 3º) Función de densidad de η condicionada a que $\xi = 1/2$.

Solución.-

1) Calculemos las funciones de densidad marginales:

$$f_1(x) = \int_0^x 2 \, dy = 2x, \text{ para } 0 \leq x \leq 1, \text{ siendo cero en el resto.}$$

$$f_2(y) = \int_y^1 2 \, dx = 2(1 - y), \text{ para } 0 \leq y \leq 1, \text{ siendo cero en el resto.}$$

$$\text{Así pues: } E(\xi) = \int_0^1 2x^2 \, dx = 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} \text{ y } E(\eta) = \int_0^1 2y(1 - y) \, dy = 2 \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

2) La función de densidad $f(x/y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} = \frac{2}{2(1 - y)} = \frac{1}{1 - y}$ para $y \leq x \leq 1$, siendo cero

en el resto. Luego $f\left(x/y = \frac{1}{2}\right) = 2$ para $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, siendo cero en el resto. De aquí:

$$P\left[\xi < \frac{1}{4} / \eta = \frac{1}{2}\right] = \int_0^{\frac{1}{4}} f\left(x/y = \frac{1}{2}\right) \, dx = 0$$

3) La función de densidad $f(y/x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$ para $0 \leq y \leq x$, siendo cero en el

resto. Luego $f\left(y/x = \frac{1}{2}\right) = 2$, para $0 \leq y \leq \frac{1}{2}$, siendo cero en el resto.