

ESTADÍSTICA TEÓRICA II. Tercer curso de Economía
CURSO 2007/2008. CONVOCATORIA DE FEBRERO. 1ª SEMANA
Código de la Carrera 43 Código de la Asignatura 305.

PRIMERA PARTE: CUESTIONES TEÓRICO-CONCEPTUALES

1.- Explique las razones que, con carácter general, justifican la elección de los estimadores de máxima verosimilitud frente a los estimadores obtenidos por el método de los momentos.

2.- Estimador eficiente: definición. Expresión analítica de su varianza en función de la cota de Frechet-Cramer-Rao.

3.- ¿Cómo se comporta la potencia de un contraste ante un incremento del tamaño muestral?. Razone la respuesta.

4.- Contrastes χ^2 de Pearson para la bondad de un ajuste dado.

PROBLEMAS

1.- Dada una población definida por la función de cuantía

$$P(\xi = x) = \theta^x (1+\theta)^{-x-1} \text{ para } x=0,1,2,\dots,n,\dots,\text{ siendo } \theta > 0$$

se extrae una muestra aleatoria simple de tamaño n .

a) Obtenga el estimador máximo verosímil del parámetro θ

b) ¿Es insesgado?

Solución.-

a) La función de verosimilitud $L(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n) = \theta^{\sum_{i=1}^n \xi_i} (1+\theta)^{-\sum_{i=1}^n \xi_i - n}$. Tomamos logaritmos: $\log L = \left(\sum_{i=1}^n \xi_i \right) \log \theta - \left(\sum_{i=1}^n \xi_i + n \right) \log(1+\theta)$. Derivando respecto de θ e igualando

$$\text{a cero: } \frac{\partial \log L}{\partial \theta} = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{\theta} - \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i + n}{1+\theta} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^n \xi_i = n\theta. \text{ Luego el estimador máximo}$$

$$\text{verosímil es: } \hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n} = \bar{\xi}, \text{ es decir, la media muestral.}$$

El estimador $\hat{\theta}$ será insesgado si $E(\hat{\theta}) = \theta$.

$$\text{Se tiene que } E(\hat{\theta}) = E\left[\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n}\right] = \frac{\sum_{i=1}^n E(\xi_i)}{n} = \frac{nE(\xi)}{n} = E(\xi).$$

Calculemos entonces $E(\xi) = \sum_{x=0}^{\infty} x\theta^x (1+\theta)^{-x-1}$. Es la suma de una serie aritmético-geométrica, siendo $\theta(1+\theta)^{-1}$ la razón de la componente geométrica. Para calcularla podemos hacerlo así:

$$\text{Llamemos } S_n = \sum_{x=0}^n x\theta^x (1+\theta)^{-x-1} = \theta(1+\theta)^{-2} + 2\theta^2(1+\theta)^{-3} + 3\theta^3(1+\theta)^{-4} + \dots + n\theta^n(1+\theta)^{-n-1}$$

multiplicando los dos miembros por $\theta(1+\theta)^{-1}$:

$$\theta(1+\theta)^{-1}S_n = \theta^2(1+\theta)^{-3} + 2\theta^3(1+\theta)^{-4} + 3\theta^4(1+\theta)^{-5} + \dots + n\theta^{n+1}(1+\theta)^{-n-2}$$

restando miembro a miembro:

$$[1-\theta(1+\theta)^{-1}]S_n = \theta(1+\theta)^{-2} + (\theta^2(1+\theta)^{-3} + 2\theta^3(1+\theta)^{-4} + \dots + \theta^n(1+\theta)^{-n-1}) - n\theta^{n+1}(1+\theta)^{-n-2}.$$

Si hacemos que $n \rightarrow \infty$ entonces $S_n \rightarrow E(\xi)$; la expresión que está entre paréntesis sería la suma de una serie geométrica de razón $\theta(1+\theta)^{-1} < 1$, y por tanto valdría $\frac{\theta^2(1+\theta)^{-3}}{1-\theta(1+\theta)^{-1}}$; y la expresión $n\theta^{n+1}(1+\theta)^{-n-2} \rightarrow 0$. Así pues queda:

$$[1-\theta(1+\theta)^{-1}]E(\xi) = \theta(1+\theta)^{-2} + \frac{\theta^2(1+\theta)^{-3}}{1-\theta(1+\theta)^{-1}}. \text{ Despejando } E(\xi) \text{ y simplificando se}$$

obtiene $E(\xi) = \theta$.

Luego $\hat{\theta}$ es insesgado.

2.- Se está realizando la recuperación de una zona afectada por una oleada de incendios hace cinco años. Para ello se mide la altura de los árboles plantados en dicha zona. Si se toma una

muestra aleatoria simple de 25 árboles se obtiene $\sum_{i=1}^{25} x_i = 26,2425 \text{ m}$; $\sum_{i=1}^{25} x_i^2 = 27,649 \text{ m}^2$

En la hipótesis de distribución normal construya un intervalo de confianza al 95% para la variabilidad de la altura de dichos árboles.

Solución.-

La variable $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ se distribuye χ^2 con $n-1$ grados de libertad. Para 24 grados de libertad, obtenemos en las tablas el intervalo de probabilidad 0,95:

$$12,401 \leq \frac{24S^2}{\sigma^2} \leq 39,36, \text{ que, invirtiendo los valores equivale a: } 0,0254 \leq \frac{\sigma^2}{24S^2} \leq 0,0806 \Leftrightarrow 0,6098S^2 \leq \sigma^2 \leq 1,9353S^2.$$

$$\text{Por otra parte, } S^2 = \frac{n}{n-1}(\overline{X^2} - \bar{X}^2) = \frac{25}{24} \left[\frac{27,649}{25} - \left(\frac{26,2425}{25} \right)^2 \right] = 0,0043.$$

Así pues, el intervalo del 95% de confianza para la varianza sería:

$$0,6098 \cdot 0,0043 \leq \sigma^2 \leq 1,9353 \cdot 0,0043 \Leftrightarrow 0,0026 \leq \sigma^2 \leq 0,0082$$

Extrayendo la raíz cuadrada obtenemos el intervalo de confianza para la desviación típica:

$$0,05 \leq \sigma \leq 0,09$$

Así pues, la variabilidad de la altura, al 0,95 de probabilidad, está entre 5 y 9 cm.