

**ESTADÍSTICA TEÓRICA II. Tercer curso de Economía**  
**CURSO 2007/2008. CONVOCATORIA DE FEBRERO. 2ª SEMANA**  
**Código de la Carrera 43 Código de la Asignatura 305.**

**PRIMERA PARTE: CUESTIONES**

- 1.- Propiedades de los estimadores de máxima verosimilitud.
- 2.- Estimador consistente. Concepto. ¿Son consistentes los estimadores obtenidos por el método de máxima verosimilitud y el de los momentos?.
- 3.- ¿Por qué se utilizan los contrastes de significación si, en general, no son uniformemente más potentes?.
- 4.- Concepto de nivel de significación y potencia de un contraste. Relación entre ambos.

**PROBLEMAS**

- 1.- Dada una población definida por la función de densidad

$$f(x) = 2x\theta^{-2} \text{ para } 0 \leq x \leq \theta$$

se pide

- a) Estimador por el método de los momentos.
- b) Error cuadrático medio de dicho estimador.

**Solución.-**

a) Momento poblacional de 1º orden:  $E(X) = \int_0^\theta 2x^2\theta^{-2}dx = \frac{2}{3}\theta^{-2}[x^3]_0^\theta = \frac{2}{3}\theta$

Momento muestral de 1º orden: la media muestral  $\bar{X}$

El estimador se obtiene de la igualdad:  $\frac{2}{3}\hat{\theta} = \bar{X} \rightarrow \hat{\theta} = \frac{3}{2}\bar{X}$

b) El error cuadrático medio  $E[(\hat{\theta} - \theta)^2] = \text{Var}(\hat{\theta}) + (\text{Sesgo } \hat{\theta})^2$ . Calculemos:

$$\text{Var}(\hat{\theta}) = \text{Var}\left(\frac{3}{2}\bar{X}\right) = \frac{9}{4}\text{Var}(\bar{X}) = \frac{9\text{Var}(X)}{4n}, \text{ siendo } n \text{ el tamaño de la muestra.}$$

Necesitamos conocer  $\text{Var}(X)$ . Para ello, calcularemos  $E(X^2) = \int_0^\theta 2x^3\theta^{-2}dx = \frac{2}{4}\theta^{-2}[x^4]_0^\theta = \frac{\theta^2}{2}$

luego  $\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{\theta^2}{2} - \frac{4\theta^2}{9} = \frac{\theta^2}{18}$ . Además  $\text{Sesgo } \hat{\theta} = E(\hat{\theta}) - \theta = E\left(\frac{3}{2}\bar{X}\right) - \theta$

$$= \frac{3}{2}E(\bar{X}) - \theta = \frac{3}{2}E(X) - \theta = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}\theta - \theta = 0.$$

Por tanto,  $E[(\hat{\theta} - \theta)^2] = \frac{9\text{Var}(X)}{4n} = \frac{\theta^2}{8n}$

2.- Una determinada compañía de transporte de viajeros por carretera ha iniciado una campaña de captación de nuevos clientes. El Departamento Comercial de la misma trabaja con la hipótesis de que el tiempo medio de retraso de sus autobuses, considerando todos los imponderables, no supera los 20 minutos. En consecuencia, propone al Comité de Dirección la devolución del importe del billete a los clientes afectados por una demora mayor. El resto del equipo directivo considera arriesgado tomar esa decisión sin proceder previamente a un estudio científico, para lo cual encarga a una consultora que realice el contraste de hipótesis pertinente. Ésta selecciona una muestra de 21 viajes, en los que se observa un retraso medio de 17 minutos y  $s^2 = 25$ . Con un 5% de significación y suponiendo normalidad en la distribución de la variable ¿cuál será la conclusión de la consultora?. ¿Y la decisión de la compañía de transportes respecto a la propuesta del Departamento Comercial?.

### Solución.-

Sea  $\mu$  el tiempo medio de retraso de los autobuses. El contraste a efectuar:

$$H_0: \mu \leq 20$$

$$H_1: \mu > 20$$

La variable  $t_{n-1} = \frac{\bar{X} - \mu}{S} \sqrt{n}$  se distribuye t-Student con  $n-1$  grados de libertad. Puesto

que  $n = 21$ , obtenemos de las tablas de la t-Student para 20 grados de libertad la región crítica para un 5% de significación:

$$0,05 = P(t_{20} > 1,725)$$

Para la muestra obtenida y bajo la hipótesis nula:  $t_{20} = \frac{17 - 20}{5} \sqrt{21} = -2,7495$ .

Por tanto, la conclusión de la consultora será la de admitir la hipótesis nula ya que  $-2,7495 < 1,725$ .

La compañía podría no admitir la hipótesis nula pero, con la muestra obtenida este rechazo supondría un riesgo, que sería el p-valor:  $P(t_{20} > -2,7495)$ , probabilidad que, buscando en las tablas, da un valor superior a 0,99, que es obviamente un riesgo muy elevado. La compañía pues debería aceptar la propuesta de Departamento Comercial.