



INTRODUCCIÓN A LA ESTADÍSTICA. - EXAMEN PRINCIPAL

CURSO 2.002-2.003. Convocatoria de febrero. Código de carrera 43. Código de asignatura 203.

Preguntas teóricas

1.- Una determinada empresa ha realizado un estudio sobre la intención de voto en las próximas elecciones municipales y autonómicas. En las conclusiones, que ha presentado al partido que le contrató, proporciona la media y la moda de la muestra seleccionada. ¿Qué observaciones puede hacer usted a estas conclusiones? Razone la respuesta.

Respuesta.-

La “intención de voto” es una característica poblacional **cualitativa** (es un atributo). Difícilmente se comprende cómo puede proporcionarse la media.

2.- Curva de Lorentz. Expresión analítica de la misma. Gráfico en caso de equidistribución.

Respuesta.-

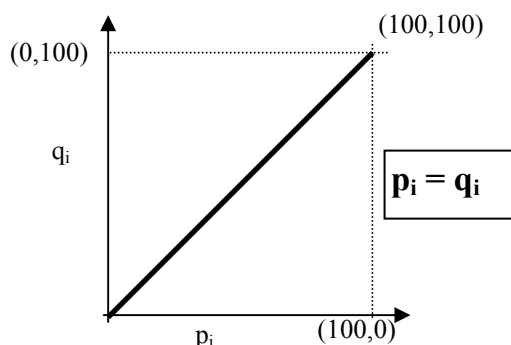
Consideremos una población de N individuos y la variable estadística $X = \{x_i, n_i\}$, $i = 1, 2, 3, \dots, r$, donde x_i es la renta correspondiente a cada uno de los n_i individuos, siendo $N = \sum_{i=1}^r n_i$. Supongamos además que $x_1 < x_2 < \dots < x_r$. Llamemos $u_i = \sum_{j=1}^i x_j \cdot n_j$ es decir, la renta

total poseída por los individuos cuya renta es menor o igual que x_i . Sea $p_i = \frac{N_i^\uparrow}{N} \cdot 100$, es decir, el porcentaje de individuos poseedores de la renta u_i (N_i^\uparrow es la frecuencia acumulada ascendente, es decir, el número de individuos poseedores de la renta u_i); sea $q_i = \frac{u_i}{u_r} \cdot 100$ es

decir, el porcentaje de renta poseída por los N_i^\uparrow individuos anteriores.

La curva de Lorentz es la poligonal que une los puntos $(0, 0)$, (p_1, q_1) , (p_2, q_2) , (p_3, q_3) , ..., (p_r, q_r) .

Se considera que existe equidistribución de la renta cuando $p_i = q_i$, y en ese caso, la curva de Lorentz



3.- Asociación entre variables cualitativas. Coeficiente de contingencia de Pearson.

Respuesta.-

Consideremos un atributo M del que existen r modalidades y un atributo M' del que existen s modalidades. Sea n_{ij} el número de individuos con la modalidad i ($i = 1, 2, \dots, r$) del

atributo M y la modalidad j ($j = 1, 2, 3, \dots, s$) del atributo M'. Sea $N = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s n_{ij}$ el total de individuos de la población, $n_{i\cdot}$ el total de individuos de la modalidad i de M y $n_{\cdot j}$ el total de individuos de la modalidad j de M'. Los atributos son independientes si se cumple que $\frac{n_{ij}}{N} = \frac{n_{i\cdot}}{N} \cdot \frac{n_{\cdot j}}{N}$ que equivale a que $n_{ij} = \frac{n_{i\cdot} \cdot n_{\cdot j}}{N}$, que es también equivalente a $n_{ij} = n'_{ij}$, habiendo llamado $n'_{ij} = \frac{n_{i\cdot} \cdot n_{\cdot j}}{N}$.

Se llama **cuadrado de contingencia** al coeficiente $\chi^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{(n'_{ij} - n_{ij})^2}{n'_{ij}}$

Se llama **coeficiente de contingencia de Pearson** a $C = \sqrt{\frac{\chi^2}{N + \chi^2}}$.

Se cumple que $0 \leq C < 1$. Si los atributos son independientes entonces $C = 0$; a medida que aumenta el grado de asociación, C se aproxima a 1.

4.-El índice de precios de un determinado bien en los años 2.000 y 2.001 con base año 1.999 alcanza, respectivamente, los siguientes valores: 110 y 121. Expresa analíticamente el índice del año 2.001 con base 2.000 en función de los anteriores y halle su valor. ¿Qué propiedad de los números índices ha utilizado?

Respuesta.-

Dispongamos los datos en la tabla:

	Base 1999
1999	$I_0^0 \cdot 100 = 100$
2000	$I_0^1 \cdot 100 = 110$
2001	$I_0^2 \cdot 100 = 121$

Para obtener los índices en base 2000, basta dividir los índices base 1999 entre 110 y multiplicar por 100. El índice del año 2001 en base 2000 sería $I_1^2 \cdot 100 = \frac{121}{110} \cdot 100 = 110$.

Las propiedades utilizadas han sido la de **inversión** y su generalización la **circular**: en efecto, por la propiedad circular $I_0^1 I_1^2 I_2^0 = 1 \Rightarrow I_1^2 = \frac{1}{I_0^1 I_2^0} = (\text{propiedad de inversión}) = \frac{I_0^2}{I_0^1}$

Problemas

1.- Dada la siguiente distribución

x_i	n_i
1	5
3	12
4	20
6	8
10	5



calcule: **a)** Coeficiente de asimetría de Fisher. **b)** Coeficiente de apuntamiento o curtosis de Fisher.

Solución.-

$$\left. \begin{array}{l} \text{Coeficiente de asimetría: } g_1 = \frac{m_3}{s^3} \\ \text{Coeficiente de apuntamiento } g_2 = \frac{m_4}{s^4} - 3 \end{array} \right\}$$

siendo $m_3 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^r (x_i - \bar{x})^3 n_i$ y $m_4 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^r (x_i - \bar{x})^4 n_i$ los momentos de 3^{er} y 4º orden

respecto de la media, y $s = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^r (x_i - \bar{x})^2 n_i}$ la desviación típica.

Efectuando los cálculos necesarios:

x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 n_i$	$(x_i - \bar{x})^3$	$(x_i - \bar{x})^3 n_i$	$(x_i - \bar{x})^4$	$(x_i - \bar{x})^4 n_i$
1	5	5	-3,38	11,42	57,12	-38,61	-193,07	130,52	652,58
3	12	36	-1,38	1,90	22,85	-2,63	-31,54	3,63	43,52
4	20	80	-0,38	0,14	2,89	-0,05	-1,10	0,02	0,42
6	8	48	1,62	2,62	21,00	4,25	34,01	6,89	55,10
10	5	50	5,62	31,58	157,92	177,50	887,52	997,57	4987,87
	50	219			261,78		695,83		5739,49

y de aquí obtenemos:

$$g_1 = \frac{13,92}{2,29^3} \cong 1,16 ; g_2 = \frac{114,79}{2,29^4} - 3 \cong 1,19$$

Así pues, esta distribución resulta **asimétrica positiva** o a la derecha y **leptocúrtica** (más apuntamiento que la normal)

2.- El precio medio de un cierto producto, así como los índices de precios, fueron, para los últimos años, los siguientes:

Años	Precio (€)	I_i
1.995	7,6	110
1.996	8,0	117
1.997	8,5	125
1.998	9,1	132
1.999	9,8	140
2.000	11,4	148
2.001	12,3	155

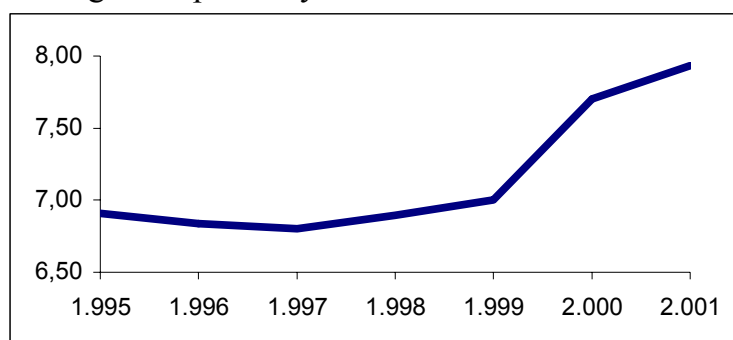
a) Realícese un estudio comparativo de los precios de estos productos, en términos reales.
b) ¿Cuál es el incremento medio anual, en términos reales? **c)** Si estos productos sufren en 2.002 un incremento de sus precios, en términos reales, del 6%, y el índice de precios se incrementa en un 5%, ¿cuál sería el valor medio del producto en unidades monetarias corrientes de este año?

Solución.-

a) Se trata de deflactar la serie de precios, dividiendo cada precio por su índice y multiplicando por 100:

Años	Precio (€)	I _i	Precio (€ constantes)
1.995	7,6	110	6,91
1.996	8	117	6,84
1.997	8,5	125	6,80
1.998	9,1	132	6,89
1.999	9,8	140	7,00
2.000	11,4	148	7,70
2.001	12,3	155	7,94

Una representación gráfica puede ayudar a ver la evolución real de los precios:



se observa un descenso real de los precios hasta 1997 y a partir de ahí un aumento más pronunciado en los dos últimos años.

b)

Años	Precio (€ constantes)	Incremento
1.995	6,91	
1.996	6,84	-0,07
1.997	6,80	-0,04
1.998	6,89	0,09
1.999	7,00	0,11
2.000	7,70	0,70
2.001	7,94	0,23
Promedios:	7,15	0,17

Es decir, el incremento medio de los precios es de 0,17 €/año, en € constantes del año base. Puesto que el precio medio, también en € del año base, es de 7,15, el incremento medio, en porcentaje, resulta ser $\frac{0,17}{7,15} \cdot 100 \cong 2,39\%$.

c) Precio en el año 2002, en € constantes del año base: $7,94 + \frac{7,94 \cdot 6}{100} \cong 8,41$.

Índice de precios del año 2002: $155 + \frac{155 \cdot 5}{100} = 162,75$.

Precio en el año 2002, expresado en € corrientes (del año 2002): $\frac{8,41 \cdot 162,75}{100} \cong 13,69$.



INTRODUCCIÓN A LA ESTADÍSTICA. - EXAMEN DE RESERVA

CURSO 2.002-2.003. Convocatoria de febrero. Código de carrera 43. Código de asignatura 203.

Preguntas teóricas

1.-Una empresa ha realizado dos operaciones con una compañía con sede en Nueva York, que han ascendido a:

Importe (Mpts)	Cambio del \$
270	158,5
187	162,1

¿Qué promedio debe utilizar para conocer el cambio medio de dichas operaciones? Razone la respuesta.

Respuesta.-

El promedio que se debe utilizar es la media armónica siendo el cambio la variable y el importe la frecuencia:

$$\text{Cambio medio} = \frac{270+187}{\frac{270}{158,5} + \frac{187}{162,1}} \cong 159,95$$

En efecto, hemos cambiado un total de $(270 + 187)$ Mpts; en el primer caso hemos obtenido $\frac{270}{158,5}$ M\$ y en el segundo caso $\frac{187}{162,1}$ M\$ es decir $\frac{270}{158,5} + \frac{187}{162,1}$ M\$ en total, luego el cambio medio (pts/\$) es la media armónica expresada más arriba.

2.- El coeficiente de variación de Pearson definición y aplicaciones. ¿Es siempre la mejor medida para comparar la dispersión de dos distribuciones? Razone la respuesta.

Respuesta.-

Se define: $CV = \frac{s}{\bar{x}}$, donde s es la desviación típica y \bar{x} es la media aritmética de la variable.

Tiene principalmente dos aplicaciones:

1.- Comparar la dispersión de dos distribuciones diferentes: por ejemplo, en la distribución X : $\bar{x} = 5$ y $s_x = 2$ y en la distribución Y: $\bar{y} = 1$; $s_y = 1$. Aunque la variable X tenga mayor desviación típica, pero al tener mayor media, está menos dispersa que la Y. Se tiene:

$$CV_X = 0,4 \text{ y } CV_Y = 1$$

2.- Proporcionar una medida de la representatividad de la media: si el CV es (en valor absoluto) mayor que uno (es decir, la dispersión es grande), la media aritmética se considera poco representativa.

En ocasiones (si $\bar{x} = 0$ no se puede calcular CV) puede ser recomendable usar otra medida de dispersión relativa, como el recorrido semi-intercuartílico, o la desviación media dividida por la mediana.

3.- Covarianza de dos variables estadísticas. Interpretación de sus posibles valores.



Respuesta.-

Consideremos la variable aleatoria bidimensional $(X, Y) = \{(x_i, y_i), i = 1, 2, 3, \dots, n\}$ donde cada punto (x_i, y_i) tiene frecuencia 1. Sean $a_{10} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ y $a_{01} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ las medias marginales.

Se define la covarianza $m_{11} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - a_{10})(y_i - a_{01})$. Puede adoptar cualquier valor y

es quien proporciona el signo a la pendiente de las rectas de regresión y al coeficiente de correlación. Si es positiva, hay correlación directa y al aumentar los valores de X aumentan los de Y; si es negativa, hay correlación inversa y al aumentar X disminuye Y; si es cero, el coeficiente de correlación también y en ese caso no existe correlación entre las variables.

4.-Deflactación de una serie de valores a precios corrientes. ¿Qué índice debe utilizarse para ello?

Respuesta.-

Supongamos que la serie de precios es por años. Deflactación de la serie de precios corrientes (uno de cada año) consiste en convertirlos en precios constantes (de un mismo año). Ello se consigue dividiendo el precio de cada año por el índice correspondiente (y multiplicando por 100, si el índice se expresa en %). Suele usarse cualquier índice pero **el verdadero deflactor es el de Paasche**. En efecto:

Deflactemos con un índice de Laspeyres:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Valor a precios corrientes del año } t: V_t = \sum_i p_{it} q_{it} \\ \text{Índice de precios de Laspeyres: } P_L = \frac{\sum_i p_{it} q_{i0}}{\sum_i p_{i0} q_{i0}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Valor deflactado:} \\ \frac{V_t}{P_L} = \sum_i p_{i0} q_{i0} \frac{\sum_i p_{it} q_{it}}{\sum_i p_{it} q_{i0}} = V_0 \cdot Q_p \end{array}$$

que es el valor a precios de año base por un índice cuántico de Paasche.

Deflactemos ahora con un índice de Paasche:

$$\text{Índice de precios de Paasche: } P_p = \frac{\sum_i p_{it} q_{it}}{\sum_i p_{i0} q_{it}} \Rightarrow \frac{V_t}{P_p} = \sum_i p_{i0} q_{it}, \text{ que son las cantidades}$$

actuales a precios del año base.

Problemas

1.- En el curso de la negociación de un convenio colectivo los trabajadores de una empresa plantean subidas lineales con el fin de lograr una mayor equidad en el reparto de la masa salarial. puesto que, argumentan, el 5% de la plantilla recibe el 25% de las retribuciones. Con los datos de la tabla que se adjunta comprobar si el dato es cierto y si no lo fuera proporcionar el correcto.

Salarios mensuales (en euros)	nº de trabajadores
300 – 600	12.000
600 – 1.200	6.000
1.200 – 1.500	1.000
1.500 – 3.000	800
3.000 – 6.000	200

Solución.-

Construyamos la siguiente tabla:

Salarios mensuales (euros)	Marcas de clase (x_i)	nº de trabajadores (n_i)	Acumulación de n_i	p_i	Masa salarial $x_i \cdot n_i$	Acumulación de $x_i n_i$	q_i
300 – 600	450	12.000	12.000	60,00%	5400000	5400000	36,36%
600 –1.200	900	6.000	18.000	90,00%	5400000	10800000	72,73%
1.200 –1.500	1350	1.000	19.000	95,00%	1350000	12150000	81,82%
1.500 –3.000	2250	800	19.800	99,00%	1800000	13950000	93,94%
3.000 –6.000	4500	200	20.000	100,00%	900000	14850000	100,00%
		20.000			14850000		

Las columnas p_i y q_i son respectivamente, los porcentajes de la acumulación del nº de trabajadores y de la masa salarial. Observamos que el 95% del total de trabajadores recibe el 81,82% de las retribuciones, luego el **5% recibirá el 18,18%**.

2.- Un inversionista acude con 600.000 € a una oferta pública de acciones de una cierta sociedad que sale a bolsa el año 1.994. Los índices de precios y de cotizaciones de los años siguientes son:

Años	Índice de cotizaciones	Índice de precios
1.995	84,6	118
1.996	75,3	124
1.997	80,5	142
1.998	71,3	160

¿Cuál será el valor de su inversión en 1.998 a precios constantes de 1.994?

Solución.-

$$600000 \cdot \frac{71,3}{100} \cdot \frac{100}{160} = 267375 \text{ €}$$