e-mail: **imozas@elx.uned.es**
http://telefonica.net/web/imm

EJERCICIOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES PROPUESTOS EN EXÁMENES

1) Encuéntrese un factor integrante de la forma $\mu(y)$ para

$$y(1 + xy)dx - xdy = 0$$

y resuélvase la ecuación.*(Feb 2003)*

Solución.-

$\mu(y)y(1 + xy)dx - \mu(y)xdy = 0$ será diferencial exacta, luego debe ser

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(y)y(1+xy)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(y)x\right)$$

efectuando las derivadas y simplificando queda: $\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = -\frac{2}{y} \leftrightarrow \ln\mu(y) = \ln y^{-2} \leftrightarrow \boldsymbol{\mu(y) = y^{-2}}$.

Luego: $\frac{1+xy}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy = 0$ es diferencial exacta. Se tiene:

$F(x,y) = \int \frac{1+xy}{y}dx = \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + C(y) \Rightarrow \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + C'(y) = -\frac{x}{y^2} \Rightarrow C'(y) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow C(y) = K$ (constante). Luego: $\mathbf{F(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + K = 0}$

2.- Explíquese el concepto de factor integrante. Dar una expresión para la condición que debe cumplir un factor integante que sea función de $x\cdot y$ *(Sep. 2003)*

Respuesta.-

Consideremos la ecuación diferencial $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$, no exacta. Si existe una función $\mu(x, y)$, tal que la ecuación $\mu\,P\,dx + \mu\,Q\,dy = 0$, es exacta , entonces el factor $\mu(x, y)$ recibe el nombre de factor integrante de la ecuación diferencial.

Si μ es función del producto xy, hagamos el cambio $t = xy$. Se tendrá:

$$\mu = \mu(t), \qquad \frac{\partial\mu}{\partial x} = y\mu'(t), \qquad \frac{\partial\mu}{\partial y} = x\mu'(t)$$

Así pues, se cumplirá: $x\mu'(t)P + \mu\frac{\partial P}{\partial y} = y\mu'(t)Q + \mu\frac{\partial Q}{\partial x} \leftrightarrow x\mu'(t)P - y\mu'(t)Q = \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$

de donde $\frac{\mu'(t)}{\mu(t)} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{xP - yQ}$ deberá ser función del producto xy, que escribiremos $f(t)$. Luego :

$$\frac{\mu'(t)}{\mu(t)} = f(t) \quad \Rightarrow \quad \mu(t) = Ce^{\int f(t)dt}$$

3.- Resuélvase la siguiente ecuación diferencial: $y'' + 2y' + y = x^3 + 6$ *(Sep. 2003)*

Solución.-

El polinomio característico $r^2 + 2r + 1$ tiene la raiz -1, (doble), luego la solución general de la ecuación homogénea es $y_1 = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$.

Por otra parte una solución particular de la ecuación completa es de la forma $y_2 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ y sustituyendo en la ecuación se obtiene $y_2 = x^3 - 6x^2 + 18x - 18$. Luego la solución es:

$$y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + x^3 - 6x^2 + 18x - 18$$

4.-Encuéntrese un factor integrante función del producto xy para resolver la ecuación:

e-mail: **imozas@elx.uned.es**
http://telefonica.net/web/imm

$$ydx + (x - 3x^2y^2)dy = 0 \qquad \textit{(Sep. 2003 Res)}$$

Solución.-

Sea $\mu = \mu(x\cdot y)$ el factor integrante $\Rightarrow \mu\cdot ydx + \mu\cdot(x - 3x^2y^2)dy = 0$ será diferencial exacta $\Rightarrow \frac{d}{dy}\left(\mu\cdot y\right) = \frac{d}{dx}\left(\mu\cdot(x - 3x^2y^2)\right) \Rightarrow$

[Para facilitar los cálculos hagamos el cambio de variable $x\cdot y = t$ obsérvese que $\frac{d}{dy}\mu = \frac{d}{dt}\mu\cdot\frac{d}{dy}t = x\cdot\frac{d}{dt}\mu$; escribiremos, para simplificar $\frac{d}{dt}\mu = \mu'$; análogamente se obtendría $\frac{d}{dx}\mu = y\cdot\mu'$]

$\Rightarrow xy\mu' + \mu = y\mu'(x - 3x^2y^2)+\mu(1-6xy^2) \Rightarrow -3x^2y^3\mu' - 6xy^2\mu = 0 \Rightarrow \frac{\mu'}{\mu} = -\frac{2}{xy} = -\frac{2}{t} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln\mu = \ln(t^{-2}) \Rightarrow \mu = \frac{1}{t^2} = \frac{1}{x^2y^2}$.

Resolvamos la ecuación:

$F(x,y) = \int\frac{1}{x^2y}dx = \frac{1}{y}\int\frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{xy} + C(y) \Rightarrow \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = -\frac{1}{xy^2} + C'(y) = \frac{1}{xy^2} - 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow C'(y) = -3 \Rightarrow C(y) = -3y$, luego:

$$F(x,y) = -\frac{1}{xy} - 3y = K$$

5.- Resolver $(x^2 + y^2)dx = xydy$.

Solución:

Escribiendo la ecuación en la forma $(x^2 + y^2)dx - xydy=0$, podemos comprobar que no es diferencial exacta. Como $\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{-3}{x}$, la ecuación posee un factor integrante que depende de x: $\frac{\mu'}{\mu} = \frac{-3}{x} \rightarrow \ln\mu = \ln x^{-3} \rightarrow \mu = x^{-3}$, luego:

$\left(\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^3}\right)dx - \frac{y}{x^2}dy = 0$ es diferencial exacta, de donde:

$f(x,y) = \int\left(\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^3}\right)dx = \ln x - \frac{y^2}{2x^2} + C(y)$. Derivando respecto de y e igualando a $-\frac{y}{x^2}$:

$\frac{-y}{x^2} + C'(y) = -\frac{y}{x^2} \rightarrow C'(y) = 0 \rightarrow C(y) = C$ (constante). Luego la solución es:

$$\ln x - \frac{y^2}{2x^2} + C = 0$$

6.- Resuélvase la siguiente ecuación diferencial: *(Feb 2004)*

$$y^{IV}+2y^{III}+2y''+2y'+y = 5e^x$$

Solución.-

La ecuación característica $r^4 + 2r^3 + 2r^2 +2r + 1 = 0$ admite las soluciones i, –i y –1(doble), luego la solución general de la homogénea es:

$$y_1 = C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}+C_3\cos x+C_4\operatorname{sen} x$$

Una solución particular de la ecuación completa será de la forma $y_2 = Ae^x$.

e-mail: **imozas@elx.uned.es**
http://telefonica.net/web/imm

Sustituyendo:

$Ae^x + 2A\,e^x + 2A\,e^x + 2A\,e^x + A\,e^x = 5\,e^x \rightarrow A = \frac{5}{8}$. Así pues la solución general será:

$$y = y_1 + y_2 = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + C_3\cos x + C_4\operatorname{sen} x + \frac{5}{8}e^x$$

7.- Dada la ecuación diferencial

$$(x+y^2)dx - 2xydy = 0$$

a) Encuéntrese un factor integrante que solo dependa de x ($\mu = \mu\,(x)$).
b) Resuélvase la ecuación usando el factor integrante hallado. *(Sep 2004)*

Solución.-

a) Debe ser $\dfrac{\frac{\partial \mu}{\partial x}}{\mu} = \dfrac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \dfrac{2y + 2y}{-2xy} = \dfrac{-2}{x} \rightarrow \ln \mu = -2\ln x = \ln x^{-2} \rightarrow \mu = \dfrac{1}{x^2}$

b) $\displaystyle\int \frac{x+y^2}{x^2}dx = \ln x - \frac{y^2}{x} + C(y) \rightarrow -\frac{2y}{x} + C'(y) = -\frac{2xy}{x^2} \rightarrow C'(y) = 0 \rightarrow C(y) = C.$

La solución es: $\ln x - \dfrac{y^2}{x} + C = 0$.

8.- ¿Qué forma tiene una ecuación diferencial de Bernoulli? ¿Cómo se resuelve?.

Respuesta.-

Tiene la forma $y' + yP(x) = y^{\alpha}Q(x)$, con $\alpha \notin \{0, 1\}$. Se resuelve haciendo el cambio $z = y^{1-\alpha}$, que la convierte en una lineal. En efecto, multiplicando los dos miembros de la ecuación por $(1-\alpha)y^{-\alpha}$, queda: $(1-\alpha)y^{-\alpha}\,y' + (1-\alpha)y^{-\alpha}\,yP(x) = (1-\alpha)Q(x)$. Teniendo en cuenta que $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}\,y'$, la ecuación queda: $z' + (1-\alpha)zP(x) = (1-\alpha)Q(x)$

9.- Dada la ecuación diferencial

$$\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx + \left(x^2 + y^2\right)dy = 0$$

a) Encuéntrese un factor integrante que solo dependa de x ($\mu = \mu\,(x)$)
b) Resuélvase la ecuación usando el factor integrante hallado. *(Sep 2004 Res)*

Solución.-

a) $\dfrac{\frac{\partial \mu}{\partial x}}{\mu} = \dfrac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = 1 \rightarrow \ln \mu = x \rightarrow \mu = e^x$.

b) La ecuación diferencial exacta será: $\left(2xy + x^2y + \dfrac{y^3}{3}\right)e^x dx + \left(x^2 + y^2\right)e^x dy = 0$; se tiene:

$$\int\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)e^x dx = \left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)e^x - \int(2y + 2xy)e^x dx =$$

$$= \left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)e^x - (2y + 2xy)e^x + \int 2ye^x dx = \left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)e^x - (2y + 2xy)e^x + 2ye^x +$$

$+C(y) = \left(x^2y + \dfrac{y^3}{3}\right)e^x + C(y)$. Derivando respecto de y e igualando a $(x^2 + y^2)e^x$,

e-mail: **imozas@elx.uned.es**
http://telefonica.net/web/imm

$(x^2 + y^2)e^x + C'(y) = (x^2 + y^2)e^x \rightarrow C'(y) = 0 \rightarrow C(y) = K$ (constante). Así pues, la solución es:

$$(3x^2y + y^3)e^x = C$$

10.- Encuéntrese un factor integrante $\mu(x, y) = \mu(x\cdot y)$ que permita resolver la siguiente ecuación diferencial

$$ydx+(x - 3x^3y^2)dy = 0$$

(No se pide resolver la ecuación) *(Feb 2005)*

Solución.-

Si hacemos $x\cdot y = t \rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{\partial\mu}{\partial x} &= \frac{\partial\mu}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x} = \mu' y \\ \frac{\partial\mu}{\partial y} &= \frac{\partial\mu}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y} = \mu' x \end{aligned}\right\}$. Si $\mu ydx+\mu(x - 3x^3y^2)dy = 0$ es diferencial exacta, deberá ser: $\mu' xy + \mu = \mu' y(x - 3x^3y^2)+\mu\,(1 - 9x^2y^2) \rightarrow 3x^3y^3\mu' = -9\,x^2y^2\mu \rightarrow \frac{\mu'}{\mu} = \frac{-3}{xy} = \frac{-3}{t} \rightarrow \ln\mu = \ln t^{-3} \rightarrow \mu = t^{-3} = (xy)^{-3}$.

11.- Resuélvase la siguiente ecuación diferencial:

$$y'' - y' - 2y = e^{-x}. \quad \textit{(Feb 2005- 2ª)}$$

Solución.-

Las raices de la ecuación característica $t^2 - t - 2 = 0$, son 2 y -1, por lo que una solución particular de la ecuación completa será de la forma: $y = Axe^{-x}$. Sustituyendo en la ecuación se obtiene que $A = -\frac{1}{3}$, con lo que la solución de la ecuación propuesta es:

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x} - \frac{1}{3}xe^{-x}.$$

12 Resuélvase la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{2xdx}{y^3} + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$$

Solución.-

Puede comprobarse que es diferencial exacta. Por lo tanto:

$f(x, y) = \int \frac{2x}{y^3}dx = \frac{x^2}{y^3} + C(y)$. Derivando este resultado respecto de y, debe ser:

$\frac{-3x^2}{y^4} + C'(y) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} \rightarrow C'(y) = \frac{1}{y^2} \rightarrow C(y) = -\frac{1}{y} + C$. Así pues la solución puede expresarse:

$$\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = K$$