e-mail: **imozas@elx.uned.es**
http://telefonica.net/web/imm

EJERCICIOS DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS PROPUESTOS EN EXÁMENES

1) Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$u_{n+3} - 5u_{n+2} + 3u_{n+1} + 9\,u_n = 0 \qquad \textit{(febr. 2003)}$$

Solución.-

La ecuación característica $t^3 - 5t^2 + 3t + 9 = 0$ tiene por soluciones -1 y 3 (doble), luego la solución es $\mathbf{u_n = C_1(-1)^n + C_2 \cdot 3^n + C_3 \cdot n \cdot 3^n}$.

2) Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias:

$$u_{n+2} - u_{n+1} - 2u_n = 0,\ u_1 = 0,\ u_2 = 5 \quad \textit{(sep. 2003)}$$

Solución.-

La ecuación característica $r^2 - r - 2 = 0$, admite las soluciones 2 y -1, luego la solución general de la ecuación en diferencias será de la forma $u_n = C_1(-1)^n + C_2 \cdot 2^n$. Se tendrá:

$\left.\begin{array}{r} -C_1 + 2C_2 = 0 \\ C_1 + 4C_2 = 5 \end{array}\right\}$ de donde $C_1 = \dfrac{5}{3}$ y $C_2 = \dfrac{5}{6}$. Así pues: $u_n = \dfrac{5}{3}\left((-1)^n + 2^{n-1}\right)$.

3) a) Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias:

$$u_{n+4} + 2u_{n+2} + u_n = 0$$

b) Resumir las distintas formas que puede tener una ecuación en diferencias, lineal homogénea y de coeficientes constantes según las raíces de la ecuación característica asociada. *(sep. 2003 res).*

Solución.-

a) La ecuación característica $r^4 + 2r^2 + 1 = 0$ tiene las raíces complejas i y $-i$ (ambas dobles). Así pues la solución general es: $u_n = A_1 \operatorname{sen} n\pi + B_1 \cos n\pi + n(A_2 \operatorname{sen} n\pi + B_2 \cos n\pi)$.

b) - Si $\mathbf{r_0}$ es una solución real de la ecuación característica, entonces $\mathbf{n^{h-1} r_0^n}$ es una solución particular de la ecuación en diferencias, siendo h el orden de multiplicidad de la solución.

- Si $\boldsymbol{\rho(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)}$ y $\boldsymbol{\rho(\cos\alpha - i \operatorname{sen}\alpha)}$ son raíces complejas de la ecuación característica, entonces $\mathbf{n^{h-1} \operatorname{sen} n\alpha}$ y $\mathbf{n^{h-1} \cos n\alpha}$ son soluciones particulares de la ecuación en diferencias, siendo h el orden de multiplicidad de las soluciones.

La <u>solución general</u> se obtiene formando una combinación lineal, a coeficientes indeterminados, con todas las soluciones particulares asociadas a las distintas soluciones de la ecuación característica.

4) Obtener la solución particular de: $u_{n+2} - 6u_{n+1} + 9u_n = 0$ tal que $u_1 = 1$ y $u_2 = 2$ *(feb. 2004)*

Solución.-

La ecuación característica: $r^2 - 6r + 9 = 0 \rightarrow r = 3$, doble. Luego

$$u_n = C_1 3^n + C_2 x 3^n.$$

De acuerdo con las condiciones dadas: $\left.\begin{array}{l} 1 = 3C_1 + 3C_2 \\ 2 = 9C_1 + 18C_2 \end{array}\right\}$ de donde se obtiene $C_1 = \dfrac{4}{9},\quad C_2 = -\dfrac{1}{9}$. La solución particular pedida es: $u_n = \dfrac{4}{9}3^n - \dfrac{1}{9}n3^n = (4-n)3^{n-2}$

5) Obténgase la ecuación característica asociada a la siguiente ecuación en diferencias:

$$u_{n+3} - 6u_{n+2} + 9u_{n+1} = 0 \qquad \textit{(sep 2004)}$$

Solución.-

$r^3 - 6r^2 + 9r = 0$

6) Resuélvase la ecuación $u_{n+3} - u_{n+1} = 0$. *(sep 2004 res)*

e-mail: **imozas@elx.uned.es**
http://telefonica.net/web/imm

Solución.-

La ecuación característica: $r^3 - r = 0 \rightarrow r_1 = 0$, $r_2 = 1$, $r_3 = -1$, luego la solución general es: $u_n = C_1 + C_2(-1)^n$.

6) Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas *(feb 2005)*

$$u_{n+3} - 6u_{n+2} + 9u_{n+1} = 0$$

Solución.-

La ecuación es equivalente a $u_{n+2} - 6u_{n+1} + 9u_n = 0$ cuya ecuación característica $t^2 - 6t + 9 = 0$ tiene la raiz $t = 3$, doble. Luego $u_n = C_1 3^n + C_2 n3^n$.

7) Obtener una solución particular de la siguiente ecuación en diferencias finitas para $u_1 = 1$; $u_2 = 2$:

$$u_{n+2} - 6u_{n+1} + 9u_n = 0 \qquad \textit{(feb 2005 – 2ª)}$$

Solución.-

El polinomio característico $t^2 - 6t + 9$ admite la raiz $t = 3$ (doble) luego la solución general: $u_n = C_1 \cdot 3^n + C_2 \cdot n3^n$. Para las condiciones dada se obtiene $C_1 = \frac{4}{9}$ y $C_2 = -\frac{1}{9}$, de donde la solución será:

$$u_n = \frac{4}{9}\cdot 3^n - \frac{1}{9}\cdot n3^n$$

8) Escríbase en notación de subíndices la siguiente ecuación.

$$\Delta^2 f(x) - 3\Delta f(x) = 0$$

(No se pide resolver la ecuación)

(feb 2006)

Solución.-

Se tiene que $\Delta^2 f(x) = f(x+2) - 2f(x+1) + f(x) = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n$

$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) = u_{n+1} - u_n$

Sustituyendo queda: $u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n - 3(u_{n+1} - u_n) = 0 \leftrightarrow \boldsymbol{u_{n+2} - 5u_{n+1} + 4u_n = 0}$

9) Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas.

$$3u_{n+2} - 11u_{n+1} + 8u_n = 0$$

(feb 2006 2ª)

Solución.-

La ecuación característica: $3r^2 - 11r + 8 = 0$, tiene las soluciones $r_1 = 1$, $r_2 = \frac{8}{3}$, luego la solución de la ecuación es:

$$u_n = C_1 + C_2\left(\frac{8}{3}\right)^n$$

10) Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas: *(Sep 2006)*

$$u_{n+3} - 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n = 0$$

Solución.-

La ecuación característica $t^3 - 2t^2 + t - 2 = 0$ tiene las soluciones $t_1 = 2$, $t_2 = i$, $t_3 = -i$, luego la solución general de la ecuación dada es:

$$u_n = C_1 2^n + C_2 \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} + C_3\cos\frac{n\pi}{2}$$