e-mail: **imozas@elx.uned.es**
www.telefonica.net/web/imm

EJERCICIOS DE INTEGRAL DEFINIDA PROPUESTOS EN EXÁMENES

1.- *(Febrero 2003)* **a)** Definición y propiedades de la función gamma de Euler.
Solución:

Se define la función gamma de Euler: $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$, siendo p un número real positivo. Por partes se obtiene que $\Gamma(p) = \underbrace{-\left[x^{p-1}e^{-x}\right]_0^\infty}_{=0} + (p-1)\int_0^\infty x^{p-2}e^{-x}dx = (p-1)\,\Gamma(p-1)$

Si p es entero positivo se deduce de lo anterior que $\Gamma(p) = (p-1)!$.

Se cumple además la *fórmula de los complementos*: $\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p) = \dfrac{\pi}{\operatorname{sen}(p\pi)}$.

De esta fórmula podemos deducir, haciendo $p = \dfrac{1}{2}$, que $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

b) Calcular $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2}{x(x+2)}dx$

Solución.-

Por descomposición en suma de fracciones simples se obtiene: $\dfrac{2}{x(x+2)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+2}$,

luego $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2}{x(x+2)}dx = \left[\ln\left|\frac{x}{x+2}\right|\right]_1^\infty = \underbrace{\lim_{x\to\infty}\left(\ln\left|\frac{x}{x+2}\right|\right)}_{=0} - \ln\frac{1}{3} = -\ln\frac{1}{3} = \ln 3$

2 a) Estúdiese la convergencia de la siguiente integral: $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x^2-4}$ *(Sep 2003)*

Solución.- $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x^2-4} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_1^{2-\varepsilon}\frac{dx}{x^2-4} + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{2+\varepsilon}^3 \frac{dx}{x^2-4}$.

El primer límite: $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_1^{2-\varepsilon}\frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_1^{2-\varepsilon}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right)dx = \frac{1}{4}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right]_1^{2-\varepsilon} =$

$\displaystyle = \frac{1}{4}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\ln\frac{3\varepsilon}{4-\varepsilon}\right] = -\infty$, luego la integral es divergente.

3.- *(Feb. 04 Res)*

a) Estúdiese la convergencia de la siguiente integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+5x+5}$

b) Partiendo de la defnición de función Beta, comprobar que $\beta(p,q)$ $\displaystyle = \int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(y+1)^{p+q}}dy$ mediante el cambio de variable $x = \dfrac{y}{1+y}$

e-mail: **imozas@elx.uned.es**
www.telefonica.net/web/imm

Solución.-

a) $$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+5x+5} = \lim_{h\to\infty}\int_0^h \frac{dx}{x^2+5x+5} = \frac{1}{\sqrt{5}}\lim_{h\to\infty}\int_0^h\left(\frac{1}{x-\frac{-5+\sqrt{5}}{2}}-\frac{1}{x-\frac{-5-\sqrt{5}}{2}}\right)dx =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\lim_{h\to\infty}\left[\ln\left(\frac{x-\frac{-5+\sqrt{5}}{2}}{x-\frac{-5-\sqrt{5}}{2}}\right)\right]_0^h = \frac{1}{\sqrt{5}}\lim_{h\to\infty}\left[\ln\left(\frac{h-\frac{-5+\sqrt{5}}{2}}{h-\frac{-5-\sqrt{5}}{2}}\right)-\ln\left(\frac{5-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}\right)\right] = -\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left(\frac{5-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}\right) =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

b) $$x=\frac{y}{1+y} \leftrightarrow y=\frac{x}{1-x} \rightarrow \begin{cases} \text{Si } x=0 \Rightarrow y=0 \\ \text{Si } \quad x\to 1^- \Rightarrow y=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x}{1-x}=+\infty \\ dx=\frac{1}{(1+y)^2}dy \end{cases}$$. tendremos pues:

$$\beta(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\int_0^\infty\left(\frac{y}{1+y}\right)^{p-1}\left(\frac{1}{1+y}\right)^{q-1}\frac{1}{(1+y)^2}dy=\int_0^\infty\frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}dy$$

4. Estúdiese la convergencia de la siguiente integral $\int_0^\infty \frac{\ln x}{x}dx$ *(Sep 04)*

Solución.-

Como $\int_0^\infty \frac{1}{x}dx$ es divergente y $\frac{1}{x}<\frac{\ln x}{x}$, para x > e, la integral propuesta es divergente.

5.- Estúdiese si la siguiente integral es convergente y en caso afirmativo hallar su valor

$$\int_e^\infty \frac{dx}{x\ln^2 x} \quad \textit{(Feb 05)}$$

Solución.-

Una primitiva de $\frac{1}{x\ln^2 x}$ es $\frac{-1}{\ln x}$, luego $\int_e^\infty \frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim\limits_{h\to\infty}\int_e^h \frac{dx}{x\ln^2 x} = -\lim\limits_{h\to\infty}\left[\frac{1}{\ln x}\right]_e^h =$

$$= -\lim_{h\to\infty}\left(\frac{1}{\ln h}-\frac{1}{\ln e}\right) = -(0-1) = 1.$$

6.- Calcúlese $\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ haciendo previamente el cambio $x = \text{sen}^2 t$ *(Feb 05 2ª)*

Solución.-

e-mail: **imozas@elx.uned.es**
www.telefonica.net/web/imm

$$\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx = \left\{\begin{array}{l} x = \text{sen}^2 t \\ dx = 2\text{sent}\cos t dt \\ x = 0 \to t = 0 \\ x = 1 \to t = \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{-1}t\cdot\cos^{-1}t\cdot\text{sent}\cdot\cos t\cdot dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \pi$$

7.- Resuélvase la siguiente integral euleriana $\int_0^{\infty}\sqrt{x}e^{-x^3}dx$ *(Feb 06 2ª)*

Solución.-

Mediante el cambio $x^3 = t \to x = t^{\frac{1}{3}} \to dx = \frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}dt$, la integral se convierte en:

$$\frac{1}{3}\int_0^{\infty} t^{\frac{-1}{2}}e^{-t}dt = \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{3}$$

8.- Estúdiese si la siguiente integral es convergente y en caso afirmativo hallar su valor:

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2-7x+10} \quad \textit{(Sep 06 1ª)}$$

Solución.-

Puesto que el denominador se anula para los valores $x_1 = 2$ y $x_2 = 5$, la integral será convergente si es finito el límite:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2-\varepsilon}\frac{1}{x^2-7x+10}dx + \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \delta\to 0}}\int_{2+\varepsilon}^{5-\delta}\frac{1}{x^2-7x+10}dx + \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ h\to\infty}}\int_{5+\delta}^{h}\frac{1}{x^2-7x+10}dx$$

pero $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2-\varepsilon}\frac{1}{x^2-7x+10}dx = \frac{1}{3}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2-\varepsilon}\left(\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-2}\right)dx = \frac{1}{3}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\ln\left|\frac{x-5}{x-2}\right|\right]_0^{2-\varepsilon} =$

$= \frac{1}{3}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\ln\left|\frac{3+\varepsilon}{\varepsilon}\right| - \ln\frac{5}{2}\right] = \frac{1}{3}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\ln\left|\frac{6+2\varepsilon}{5\varepsilon}\right|\right] = \infty$. Luego la integral es divergente.

9.-Resuélvase la siguiente integral euleriana: $\int_0^{\infty}e^{-x^4}dx$ *(Sep 06 1ª)*

Solución.-

Hacemos el cambio $x^4 = t \to x = t^{\frac{1}{4}} \to dx = \frac{1}{4}t^{-\frac{3}{4}}dt$. Sustituyendo, la integral queda:

$$\frac{1}{4}\int_0^{\infty}e^{-t}t^{-\frac{3}{4}}dt = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$$