e-mail: **imozas@elx.uned.es**
www.telefonica.net/web/imm

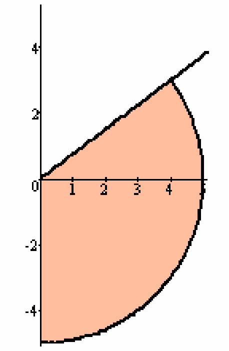
EJERCICIOS DE INTEGRAL DOBLE PROPUESTOS EN EXÁMENES

1º) Dada la región del plano $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \le 25,\ y \le \frac{3x}{4},\ x \ge 0\}$, calcúlese

$$\iint_A 2xy\,dx\,dy \quad \textit{(Feb 2003)}$$

Solución.-

Si efectuamos un cambio de variable a coordenadas polares, la región A (representada en la figura), queda:



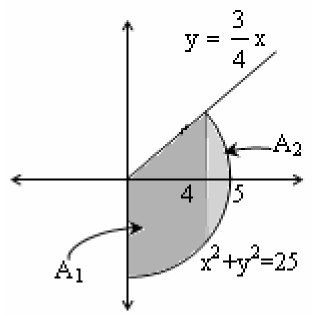
$$\rho \le 5;\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$$

Así pues, la integral sería:

$$\int_0^5 \rho^3 d\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\operatorname{arctg}\frac{3}{4}} 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,d\theta = -\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^5 \left[\cos^2\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\operatorname{arctg}\frac{3}{4}} = -\frac{625}{4}\cos^2\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)$$

Puesto que $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} \to \cos^2\left(\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{1}{1+\dfrac{9}{16}} = \dfrac{16}{25}$; la integral queda finalmente: $-\dfrac{625}{4}\cdot\dfrac{16}{25} = -100$

También puede resolverse directamente sin cambiar a polares, efectuando una partición de la región A, como se indica en al figura. Tendremos:



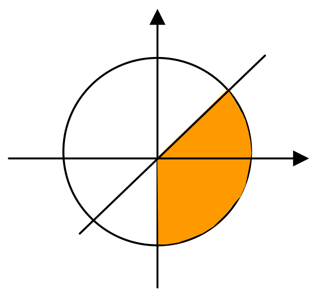
$$\iint_A 2xy\,dx\,dy = \iint_{A_1} 2xy\,dx\,dy + \iint_{A_2} 2xy\,dx\,dy = 2\int_0^4 x\,dx \int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\frac{3x}{4}} y\,dy +$$

$$+\ 2\int_4^5 x\,dx \int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} y\,dy = \int_0^4 x\left(\frac{9x^2}{16} - 25 + x^2\right)dx =$$

$$= \left[\frac{9x^4}{64} - \frac{25x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right]_0^4 = 36 - 200 + 64 = -100$$

2º) Calcular $\displaystyle\iint_A \frac{xy}{x^2+y^2}dx\,dy$ extendida al dominio $x^2 + y^2 \le 1,\ \ x \ge 0,\ y \le x$ *(Sep 2003)*

Solución.-



Efectuamos un cambio a coordenadas polares, obteniéndose la integral: $\displaystyle\int_0^1 \rho\,d\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}\theta\cos\theta\,d\theta = -\frac{1}{2}\int_0^1 \rho\left[\frac{\cos 2\theta}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} d\rho = -\frac{1}{4}\int_0^1 \rho\,d\rho$

$$= -\frac{1}{8}\left[\rho^2\right]_0^1 = -\mathbf{\frac{1}{8}}$$

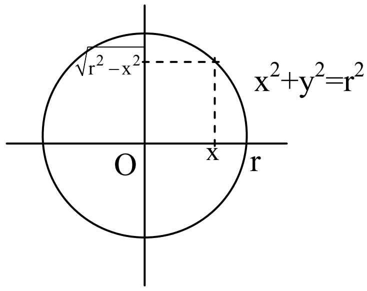
3º) Resuélvase, pasando a coordenadas polares: $\displaystyle\int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \ln\left(1+x^2+y^2\right)dx\,dy$ *(Sep 2003 Res)*

Solución.-

El recinto de integración es el cuadrante positivo del círculo limitado por la circunferencia

e-mail: **imozas@elx.uned.es**
www.telefonica.net/web/imm

de ecuación $x^2+y^2=r^2$:



$$\int_0^r\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}}\ln\left(1+x^2+y^2\right)dxdy=\int_0^r\rho\ln\left(1+\rho^2\right)d\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=$$

$$\frac{\pi}{2}\left(\left[\frac{\rho^2}{2}\ln\left(1+\rho^2\right)\right]_0^r-\int_0^r\frac{\rho^3}{1+\rho^2}d\rho\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\left[\frac{r^2}{2}\ln\left(1+r^2\right)\right]_0^r-\int_0^r\left(\rho-\frac{\rho}{1+\rho^2}\right)d\rho\right)=\frac{\pi}{2}\left(\frac{r^2}{2}\ln\left(1+r^2\right)-\left[\rho^2-\frac{1}{2}\ln\left(1+\rho^2\right)\right]_0^r\right)=$$

$$=\frac{\pi}{4}\left[\left(1+r^2\right)\ln\left(1+r^2\right)-r^2\right]$$

4º) Dada la integral:

$$\iint_\Delta \operatorname{arctg}\frac{y}{x}dxdy$$

siendo Δ la región: $x^2+y^2\geq 1$, $x^2+y^2\leq 9$, $y\geq\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y\leq x\sqrt{3}$

a) Encuéntrese el Jacobiano de la transformación dada por:

$$\begin{cases}x^2+y^2=u\\ \dfrac{y}{x}=v\end{cases}$$

b) Plantéese la integral que resolveríamos tras hacer el cambio de variable del apartado anterior. *(Feb 2004)*

Solución.-

a) Del sistema $\begin{cases}x^2+y^2=u\\ \dfrac{y}{x}=v\end{cases}$ despejamos x e y, obteniéndose $\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{u}}{\sqrt{1+v^2}}\\ y=\dfrac{v\sqrt{u}}{\sqrt{1+v^2}}\end{cases}$. Efectuando las correspondientes derivadas, se obtiene el jacobiano:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{2\sqrt{u}\sqrt{1+v^2}} & \dfrac{-v\sqrt{u}}{\left(1+v^2\right)^{\frac{3}{2}}}\\ \dfrac{v}{2\sqrt{u}\sqrt{1+v^2}} & \dfrac{\sqrt{u}}{\left(1+v^2\right)^{\frac{3}{2}}}\end{vmatrix}=\frac{1}{2\sqrt{u}\sqrt{1+v^2}}\cdot\frac{\sqrt{u}}{\left(1+v^2\right)^{\frac{3}{2}}}\begin{vmatrix}1 & -v\\ v & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2\left(1+v^2\right)}$$

b) El recinto de integración, en función de u y v sería: $1\leq u\leq 9$; $\frac{1}{\sqrt{3}}\leq v\leq\sqrt{3}$, luego la integral resultará: $\frac{1}{2}\int_1^9 du\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+v^2}\operatorname{arctg}v\,dv=\frac{8}{2}\left[\frac{(\operatorname{arctg}v)^2}{2}\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}=2\left(\frac{\pi^2}{9}-\frac{\pi^2}{36}\right)=\frac{\pi^2}{6}$

5º) Calcúlese la siguiente integral

$\iint_A e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy$, siendo $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x^2+y^2\leq 1\}$ *(Sep 2004)*

e-mail: **imozas@elx.uned.es**
www.telefonica.net/web/imm

Solución.-

Hacemos un cambio a coordenadas polares con lo que la integral queda:

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho e^{-\rho^2} d\rho = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2} e^{-\rho^2} \right]_0^1 d\theta = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(e^{-1} - 1 \right) d\theta = \frac{e-1}{2e} 2\pi = \frac{\pi(e-1)}{e}$$

6º) a) Explíquese cómo se haría un cambio a coordenadas polares para calcular $\iint_A f(x,y)dxdy$ *(Sep 2004 res)*

Respuesta.-

a) En el cambio a polares, $x = \rho\cos\varphi$; $y = \rho \operatorname{sen}\varphi$ y el jacobiano $J = \rho$. El recinto A, en coordenadas cartesianas, se transformará en un recinto A' en coordenadas polares. La integral quedaría:

$$\iint_{A'} f(\rho\cos\varphi, \rho\operatorname{sen}\varphi)\rho d\rho d\varphi$$

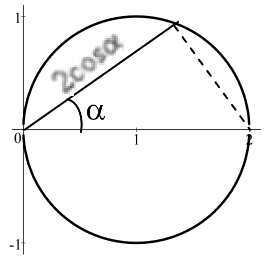
6º) Calcúlese la siguiente integral $\iint_A \cos\left(x^2 + y^2\right) dxdy$, siendo $A=\{(x, y)\in R^2/x^2+y^2 \le 1\}$ *(Feb 2005)*

Solución.- Efectuando el cambio a coordenadas polares, la integral queda: $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho\cos\rho^2 d\rho = 2\pi\left[\frac{\operatorname{sen}\rho^2}{2}\right]_0^1 = \pi\operatorname{sen}1$.

7º) Calcúlese la siguiente integral $\iint_A \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$

siendo $A = \{(x, y)\in \mathbb{R}^2 / (x-1)^2 + y^2 \le 1\}$ *(Feb 2005 2ª)*

Solución.-



El recinto es la circunferencia de la figura. Efectuando el cambio a polares $\left.\begin{array}{l} x = \rho\cos\alpha \\ y = \rho\operatorname{sen}\alpha \end{array}\right\}$, el nuevo recinto sería $\left.\begin{array}{c} -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le \rho \le 2\cos\alpha \end{array}\right\}$, con lo que la integral queda:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\alpha \int_0^{2\cos\alpha} \rho^2 d\rho = \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\rho^3\right]_0^{2\cos\alpha} d\alpha = \frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\alpha d\alpha = \frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\alpha\left(1-\operatorname{sen}^2\alpha\right)d\alpha = \textit{(inmediata)} =$$

$$= \frac{8}{3}\left[\left[\operatorname{sen}\alpha\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{3}\left[\operatorname{sen}^3\alpha\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right] = \frac{8}{3}\left(2 - \frac{1}{3}\cdot 2\right) = \frac{32}{9}$$

8º) *(Sep 2005)*

a) Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_0^2 \int_1^e x \ln y \, dxdy$$

b)Plantéese la integral $\iint_A f(x,y)\,dxdy$ siendo $A = \{(x,y)/ x>0, y>0, x+y \le 1\}$, mediante el cambio de variables $u = x + y, u\cdot v = y$

e-mail: **imozas@elx.uned.es**
www.telefonica.net/web/imm

Solución.-

a) Resolvemos la integral $\int_1^e \ln y dy$ por partes: $\int_1^e \ln y dy = [y \ln y]_1^e - \int_1^e dy = e - e + 1 = 1$, luego $\int_0^2 \int_1^e x \ln y dx dy = \int_0^2 x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2.$

9º) *(Feb 006)*

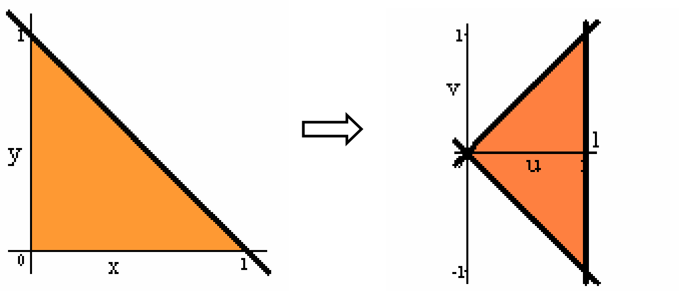
Calcúlese la integral

$$\iint_A e^{\frac{y-x}{y+x}} dxdy$$

Donde A es el dominio $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \leq 1\}$ mediante el cambio de variables $u = x + y, \quad v = y - x$

Solución.-

Se tiene que $\left.\begin{aligned} x &= \frac{u-v}{2} \\ y &= \frac{u+v}{2} \end{aligned}\right\}$ de donde el jacobiano $J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$. Con el cambio realizado el dominio se convierte en $A = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / u \geq v, \ u \geq -v, \ u \leq 1\}$



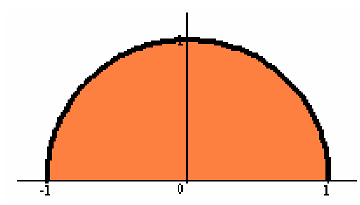
La integral pues, queda:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 du \int_{-u}^{u} e^{\frac{v}{u}} dv = \frac{1}{2}\int_0^1 u\left[e^{\frac{v}{u}}\right]_{-u}^{u} du = \frac{e - e^{-1}}{2}\int_0^1 u du = \frac{e - e^{-1}}{4}\left[u^2\right]_0^1 = \mathbf{\frac{e - e^{-1}}{4}}$$

10º) *(Feb 2006 2ª)*

Invertir el orden de integración en la siguiente integral:

$$\int_{-1}^{1}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\, dydx$$



Solución.- Los límites de integración establecen el recinto: $-1 \leq x \leq 1$; $0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$, que es el semicírculo de radio unidad representado en la figura adjunta. Puede también escribirse:

$$0 \leq y \leq 1; \ -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}$$

con lo que la integral quedaría:

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dxdy$$