



## MATEMÁTICAS III (ECONOMÍA) COD. 43204 FEBRERO 2003

### Cuestiones:

1.- a) Definición y propiedades de la función gamma de Euler.

### Solución:

Se define la función gamma de Euler:  $\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$ , siendo  $p$  un número real

positivo. Por partes se obtiene que  $\Gamma(p) = \underbrace{-[x^{p-1} e^{-x}]_0^{\infty}}_{=0} + (p-1) \int_0^{\infty} x^{p-2} e^{-x} dx = (p-1) \Gamma(p-1)$

Si  $p$  es entero positivo se deduce de lo anterior que  $\Gamma(p) = (p-1)!$ .

Se cumple además la *fórmula de los complementos*:  $\Gamma(p) \cdot \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}$ .

De esta fórmula podemos deducir, haciendo  $p = \frac{1}{2}$ , que  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

b) Calcular  $\int_1^{\infty} \frac{2}{x(x+2)} dx$

### Solución.-

Por descomposición en suma de fracciones simples se obtiene:  $\frac{2}{x(x+2)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}$ ,

$$\text{luego } \int_1^{\infty} \frac{2}{x(x+2)} dx = \left[ \ln \left| \frac{x}{x+2} \right| \right]_1^{\infty} = \underbrace{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \ln \left| \frac{x}{x+2} \right| \right)}_{=0} - \ln \frac{1}{3} = -\ln \frac{1}{3} = \ln 3$$

2.- a) Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$u_{n+3} - 5u_{n+2} + 3u_{n+1} + 9u_n = 0$$

b) Escribir la forma canónica del siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & z = 4x_1 + 3x_2 \\ \text{sujeto a:} \quad & 7x_1 + 3x_2 \geq 13 \\ & 3x_1 + 2x_2 \geq 15 \\ & 2x_1 + 5x_2 \geq 14 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

### Solución.-

a) La ecuación característica  $t^3 - 5t^2 + 3t + 9 = 0$  tiene por soluciones  $-1$  y  $3$  (doble), luego la solución es  $u_n = C_1(-1)^n + C_2 \cdot 3^n + C_3 \cdot n \cdot 3^n$ .

b) Escribiendo el programa dual e introduciendo las variables de holgura:

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & f = 13u_1 + 15u_2 + 14u_3 \\ \text{sujeto a:} \quad & 7u_1 + 3u_2 + 2u_3 + u_4 = 4 \\ & 3u_1 + 2u_2 + 5u_3 + u_5 = 3 \\ & u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0, u_4 \geq 0, u_5 \geq 0 \end{aligned}$$

### Problemas:

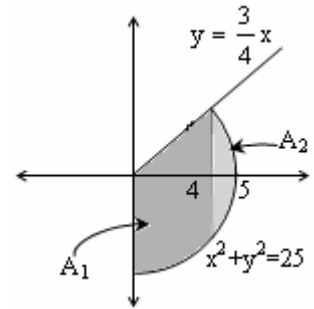
1.- Dada la región del plano  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 25, y \leq \frac{3x}{4}, x \geq 0\}$ , calcúlese

$$\iint_A 2xy dx dy$$

### Solución.-

La región A, así como la partición que estableceremos, aparece representada en la figura. Tendremos:

$$\begin{aligned} \iint_A 2xy dx dy &= \iint_{A_1} 2xy dx dy + \iint_{A_2} 2xy dx dy = 2 \int_0^4 x dx \int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\frac{3x}{4}} y dy + \\ &+ 2 \int_4^5 x dx \int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} y dy = \int_0^4 x \left( \frac{9x^2}{16} - 25 + x^2 \right) dx = \\ &= \left[ \frac{9x^4}{64} - \frac{25x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \right]_0^4 = 36 - 200 + 64 = -100 \end{aligned}$$



2.- Encuéntrese un factor integrante de la forma  $\mu(y)$  para  
 $y(1 + xy)dx - xdy = 0$

y resuélvase la ecuación.

### Solución.-

$\mu(y)y(1 + xy)dx - \mu(y)xdy = 0$  será diferencial exacta, luego debe ser

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu(y)y(1 + xy)) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu(y)x)$$

efectuando las derivadas y simplificando queda:  $\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = -\frac{2}{y} \Leftrightarrow \ln \mu(y) = \ln y^{-2} \Leftrightarrow \mu(y) = y^{-2}$ .

Luego:  $\frac{1 + xy}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy = 0$  es diferencial exacta. Se tiene:

$$F(x, y) = \int \frac{1 + xy}{y} dx = \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + C(y) \Rightarrow \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + C'(y) = -\frac{x}{y^2} \Rightarrow C'(y) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C(y) = K \text{ (constante). Luego: } F(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + K = 0$$