



MATEMÁTICAS III. ECONOMÍA. SEPTIEMBRE 2003

Cuestiones:

1 a) Estúdiase la convergencia de la siguiente integral: $\int_1^3 \frac{dx}{x^2 - 4}$

b) Explíquese el concepto de factor integrante. Dar una expresión para la condición que debe cumplir un factor integrante que sea función de $x \cdot y$

Solución.-

$$a) \int_1^3 \frac{dx}{x^2 - 4} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_1^{2-\varepsilon} \frac{dx}{x^2 - 4} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{2+\varepsilon}^3 \frac{dx}{x^2 - 4}.$$

$$\text{El primer límite: } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_1^{2-\varepsilon} \frac{dx}{x^2 - 4} = \frac{1}{4} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_1^{2-\varepsilon} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \frac{1}{4} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| \right]_1^{2-\varepsilon} =$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\ln \frac{3\varepsilon}{4-\varepsilon} \right] = -\infty, \text{ luego la integral es divergente.}$$

b)

Consideremos la ecuación diferencial $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$, no exacta. Si existe una función $\mu(x, y)$, tal que la ecuación $\mu P dx + \mu Q dy = 0$, es exacta, entonces el factor $\mu(x, y)$ recibe el nombre de factor integrante de la ecuación diferencial.

Si μ es función del producto xy , hagamos el cambio $t = xy$. Se tendrá:

$$\mu = \mu(t), \quad \frac{\partial \mu}{\partial x} = y\mu'(t), \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = x\mu'(t)$$

$$\text{Así pues, se cumplirá: } x\mu'(t)P + \mu \frac{\partial P}{\partial y} = y\mu'(t)Q + \mu \frac{\partial Q}{\partial x} \Leftrightarrow x\mu'(t)P - y\mu'(t)Q = \mu \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

$$\text{de donde } \frac{\mu'(t)}{\mu(t)} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{xP - yQ} \text{ deberá ser función del producto } xy, \text{ que escribiremos } f(t). \text{ Luego :}$$

$$\frac{\mu'(t)}{\mu(t)} = f(t) \Rightarrow \mu(t) = C e^{\int f(t) dt}$$

2. a) Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias:

$$u_{n+2} - u_{n+1} - 2u_n = 0, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 5$$

Solución.-

La ecuación característica $r^2 - r - 2 = 0$, admite las soluciones 2 y -1, luego la solución general de la ecuación en diferencias será de la forma $u_n = C_1(-1)^n + C_2 \cdot 2^n$. Se tendrá:

$$\left. \begin{array}{l} -C_1 + 2C_2 = 0 \\ C_1 + 4C_2 = 5 \end{array} \right\} \text{ de donde } C_1 = \frac{5}{3} \text{ y } C_2 = \frac{5}{6}. \text{ Así pues: } u_n = \frac{5}{3} \left((-1)^n + 2^{n-1} \right).$$

b) Hallar el máximo de $z = 3x + 2y$ en la región factible definida por

$$3x + 4y \leq 23$$

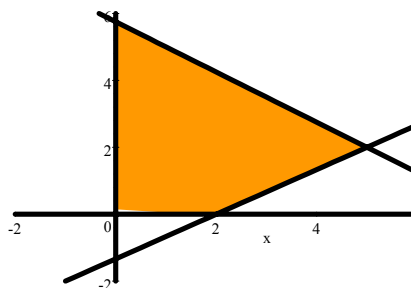
$$2x - 3y \leq 4$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

Solución.-

Sustituimos los vértices de la región factible en la función objetivo:

x	y	$z=3x+2y$
0	0	0
2	0	6
5	2	19
0	$\frac{23}{4}$	$\frac{23}{2}$



La función objetivo alcanza su valor máximo, 19, en el punto (5,2).

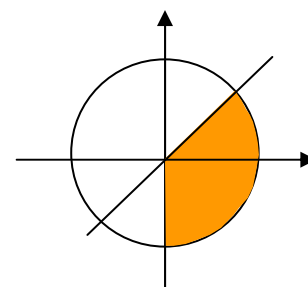
Problemas:

1.- Calcular $\iint_A \frac{xy}{x^2 + y^2} dx dy$ extendida al dominio $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \leq x$

Solución.-

Efectuamos un cambio a coordenadas polares, obteniéndose la

$$\begin{aligned} \text{integral: } \int_0^1 \rho d\rho \int_{-\pi/2}^{\pi/4} \sin\theta \cos\theta d\theta &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \rho \left[\frac{\cos 2\theta}{2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/4} d\rho = -\frac{1}{4} \int_0^1 \rho d\rho \\ &= -\frac{1}{8} [\rho^2]_0^1 = -\frac{1}{8} \end{aligned}$$



2.- Resuélvase la siguiente ecuación diferencial: $y'' + 2y' + y = x^3 + 6$

Solución.-

El polinomio característico $r^2 + 2r + 1$ tiene la raíz -1 , (doble), luego la solución general de la ecuación homogénea es $y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$.

Por otra parte una solución particular de la ecuación completa es de la forma $y_2 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ y sustituyendo en la ecuación se obtiene $y_2 = x^3 - 6x^2 + 18x - 18$. Luego la solución es:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + x^3 - 6x^2 + 18x - 18$$