



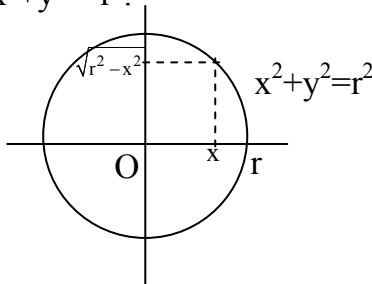
## MATEMÁTICAS III. ECONOMÍA. SEPTIEMBRE 2003. RESERVA

### Cuestiones:

1 . Resuélvase, pasando a coordenadas polares:  $\int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2) dx dy$

### Solución.-

El recinto de integración es el cuadrante positivo del círculo limitado por la circunferencia de ecuación  $x^2+y^2=r^2$ :



$$\begin{aligned} \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2) dx dy &= \int_0^r \rho \ln(1+\rho^2) d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2} \left( \left[ \frac{\rho^2}{2} \ln(1+\rho^2) \right]_0^r - \int_0^r \frac{\rho^3}{1+\rho^2} d\rho \right) = \\ &= \frac{\pi}{2} \left( \left[ \frac{r^2}{2} \ln(1+r^2) \right]_0^r - \int_0^r \left( \rho - \frac{\rho}{1+\rho^2} \right) d\rho \right) = \frac{\pi}{2} \left( \frac{r^2}{2} \ln(1+r^2) - \left[ \rho^2 - \frac{1}{2} \ln(1+\rho^2) \right]_0^r \right) = \\ &= \frac{\pi}{4} \left[ (1+r^2) \ln(1+r^2) - r^2 \right] \end{aligned}$$

2 a) Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias:

$$u_{n+4} + 2u_{n+2} + u_n = 0$$

b) Resumir las distintas formas que puede tener una ecuación en diferencias, lineal homogénea y de coeficientes constantes según las raíces de la ecuación característica asociada.

### Solución.-

a) La ecuación característica  $r^4 + 2r^2 + 1 = 0$  tiene las raíces complejas  $i$  y  $-i$  (ambas dobles). Así pues la solución general es:  $u_n = A_1 \sin \frac{n\pi}{2} + B_1 \cos \frac{n\pi}{2} + n(A_2 \sin \frac{n\pi}{2} + B_2 \cos \frac{n\pi}{2})$ .

b) - Si  $r_0$  es una solución real de la ecuación característica, entonces  $n^{h-1} r_0^n$  es una solución particular de la ecuación en diferencias, siendo  $h$  el orden de multiplicidad de la solución.

- Si  $\rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$  y  $\rho(\cos \alpha - i \sin \alpha)$  son raíces complejas de la ecuación característica, entonces  $n^{h-1} \sin n\alpha$  y  $n^{h-1} \cos n\alpha$  son soluciones particulares de la ecuación en diferencias, siendo  $h$  el orden de multiplicidad de las soluciones.

La solución general se obtiene formando una combinación lineal, a coeficientes indeterminados, con todas las soluciones particulares asociadas a las distintas soluciones de la ecuación característica.

### Problemas:

1.-Encuéntrese un factor integrante función del producto  $xy$  para resolver la ecuación:

$$y dx + (x - 3x^2 y^2) dy = 0$$

### Solución.-



Sea  $\mu = \mu(x,y)$  el factor integrante  $\Rightarrow \mu \cdot y dx + \mu \cdot (x - 3x^2y^2) dy = 0$  será diferencial exacta  $\Rightarrow \frac{d}{dy}(\mu \cdot y) = \frac{d}{dx}(\mu \cdot (x - 3x^2y^2)) \Rightarrow$

[Para facilitar los cálculos hagamos el cambio de variable  $x \cdot y = t$  obsérvese que  $\frac{d}{dy} \mu = \frac{d}{dt} \mu \cdot \frac{d}{dy} t = x \cdot \frac{d}{dt} \mu$ ;

escribiremos, para simplificar  $\frac{d}{dt} \mu = \mu'$ ; análogamente se obtendría  $\frac{d}{dx} \mu = y \cdot \mu'$ ]

$$\Rightarrow xy\mu' + \mu = y\mu'(x - 3x^2y^2) + \mu(1 - 6xy^2) \Rightarrow -3x^2y^3\mu' - 6xy^2\mu = 0 \Rightarrow \frac{\mu'}{\mu} = -\frac{2}{xy} = -\frac{2}{t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln \mu = \ln(t^{-2}) \Rightarrow \mu = \frac{1}{t^2} = \frac{1}{x^2y^2}.$$

Resolvamos la ecuación:

$$F(x,y) = \int \frac{1}{x^2y} dx = \frac{1}{y} \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{xy} + C(y) \Rightarrow \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = -\frac{1}{xy^2} + C'(y) = \frac{1}{xy^2} - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C'(y) = -3 \Rightarrow C(y) = -3y, \text{ luego:}$$

$$F(x,y) = -\frac{1}{xy} - 3y = K$$

2.- Resuélvase el siguiente problema de programación lineal usando el método símplex:

$$\text{Maximizar } z = 20x_1 + 15x_2$$

sujeto a:

$$4x_1 + 5x_2 \leq 19$$

$$3x_1 + x_2 \leq 6$$

$$6x_1 + 5x_2 \leq 27$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

**Solución.-**

Construyamos las sucesivas tablas:

	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>				
P <sub>1</sub>	4	5	1	0	0	19
	③	1	0	1	0	6
	6	5	0	0	1	27
	-20	-15	0	0	0	0

	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>				
P <sub>2</sub>	0	① $\frac{11}{3}$	1	$-\frac{4}{3}$	0	11
P <sub>1</sub>	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	2
	0	3	0	-2	1	15
	0	$-\frac{25}{3}$	0	$\frac{20}{3}$	0	40



	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>				
P <sub>2</sub>	0	1	$\frac{3}{11}$	$-\frac{4}{11}$	0	3
P <sub>1</sub>	1	0	$-\frac{1}{11}$	$\frac{15}{33}$	0	1
	0	0	$-\frac{9}{11}$	$-\frac{10}{11}$	1	6
	0	0	$\frac{25}{11}$	$\frac{40}{11}$	0	65

Esta última ya es una tabla terminal, luego la solución es:

$$\mathbf{x_1 = 1, x_2 = 3; Valor\ máximo = 65}$$