



MATEMÁTICAS III. ECONOMÍA FEBRERO 04

CÓD. CARRERA 43 CÓD. ASIGNATURA 204

Cuestiones:

1. Dada la integral:

$$\iint_{\Delta} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dx dy$$

siendo Δ la región: $x^2 + y^2 \geq 1$, $x^2 + y^2 \leq 9$, $y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}$, $y \leq x\sqrt{3}$

a) Encuéntrese el Jacobiano de la transformación dada por:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = u \\ \frac{y}{x} = v \end{cases}$$

b) Planteese la integral que resolveríamos tras hacer el cambio de variable del apartado anterior.

Solución.-

a) Del sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = u \\ \frac{y}{x} = v \end{cases}$ despejamos x e y, obtenéndose $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{1+v^2}} \\ y = \frac{v\sqrt{u}}{\sqrt{1+v^2}} \end{cases}$. Efectuando

las correspondientes derivadas, se obtiene el jacobiano:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{u}\sqrt{1+v^2}} & \frac{-v\sqrt{u}}{(1+v^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{v}{2\sqrt{u}\sqrt{1+v^2}} & \frac{\sqrt{u}}{(1+v^2)^{\frac{3}{2}}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{u}\sqrt{1+v^2}} \cdot \frac{\sqrt{u}}{(1+v^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{vmatrix} 1 & -v \\ v & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2(1+v^2)}$$

b) El recinto de integración, en función de u y v sería: $1 \leq u \leq 9$; $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq v \leq \sqrt{3}$,

luego la integral resultará: $\frac{1}{2} \int_1^9 du \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+v^2} \operatorname{arctg} v dv = \frac{8}{2} \left[\frac{(\operatorname{arctg} v)^2}{2} \right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} = 2 \left(\frac{\pi^2}{9} - \frac{\pi^2}{36} \right) = \frac{\pi^2}{6}$

2.a) Obtener la solución particular de: $u_{n+2} - 6u_{n+1} + 9u_n = 0$ tal que $u_1 = 1$ y $u_2 = 2$

b) Resolver $(x^2 + y^2)dx = xydy$.

Solución.-

a) La ecuación característica: $r^2 - 6r + 9 = 0 \rightarrow r = 3$, doble. Luego $u_n = C_1 3^n + C_2 n 3^n$.

De acuerdo con las condiciones dadas: $\begin{cases} 1 = 3C_1 + 3C_2 \\ 2 = 9C_1 + 18C_2 \end{cases}$ de donde se obtiene

$C_1 = \frac{4}{9}$, $C_2 = -\frac{1}{9}$. La solución particular pedida es: $u_n = \frac{4}{9} 3^n - \frac{1}{9} n 3^n = (4-n)3^{n-2}$

b) Escribiendo la ecuación en la forma $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$, podemos

comprobar que no es diferencial exacta. Como $\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{-3}{x}$, la ecuación posee un

factor integrante que depende de x : $\frac{\mu'}{\mu} = \frac{-3}{x} \rightarrow \ln \mu = \ln x^{-3} \rightarrow \mu = x^{-3}$, luego:

$\left(\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^3}\right)dx - \frac{y}{x^2}dy = 0$ es diferencial exacta, de donde:

$f(x,y) = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^3}\right)dx = \ln x - \frac{y^2}{2x^2} + C(y)$. Derivando respecto de y e igualando a $-\frac{y}{x^2}$:

$-\frac{y}{x^2} + C'(y) = -\frac{y}{x^2} \rightarrow C'(y) = 0 \rightarrow C(y) = C$ (constante). Luego la solución es:

$$\ln x - \frac{y^2}{2x^2} + C = 0$$

Problemas:

1. Resuélvase la siguiente ecuación diferencial:

$$y^{IV} + 2y^{III} + 2y'' + 2y' + y = 5e^x$$

Solución.-

La ecuación característica $r^4 + 2r^3 + 2r^2 + 2r + 1 = 0$ admite las soluciones i , $-i$ y -1 (doble), luego la solución general de la homogénea es:

$$y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

Una solución particular de la ecuación completa será de la forma $y_2 = A e^x$. Sustituyendo:

$A e^x + 2A e^x + 2A e^x + 2A e^x + A e^x = 5 e^x \rightarrow A = \frac{5}{8}$. Así pues la solución general será:

$$y = y_1 + y_2 = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x + \frac{5}{8} e^x$$

2.- Dado el problema: $\max z = 20x + 15y$

$$\text{en la región factible } \begin{cases} 4x + 5y \leq 19 \\ 3x + y \leq 6 \\ 6x + 5y \leq 27 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

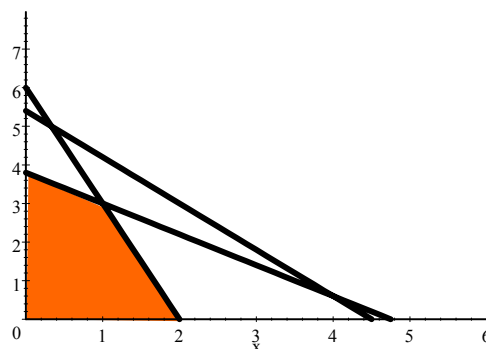
a) Resuélvase por el método gráfico

b) Resuélvase por el método simplex

Solución.-

a) Los vértices de la región factible, representada en la figura son los puntos $(0,0)$, $(2, 0)$

$\left(0, \frac{19}{5}\right)$ y $(1, 3)$. De la tabla:



x	y	z
0	0	0
2	0	40
0	$\frac{19}{5}$	57
1	3	65

se obtiene que la función z toma su valor máximo (65) en (1,3).

b)

P1	P2					
4	5	1	0	0	19	
3	1	0	1	0	6	
6	5	0	0	1	27	
-20	-15	0	0	0	0	

 \Rightarrow

P1	P2					
0	$\frac{11}{3}$	1	$-\frac{4}{3}$	0	11	
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	2	
0	3	0	-2	1	15	
0	$-\frac{25}{3}$	0	$\frac{20}{3}$	0	40	

 \Rightarrow
 \Rightarrow

P1	P2					
P2	0	1	$\frac{3}{11}$	$-\frac{4}{11}$	0	3
P1	1	0	$-\frac{1}{11}$	$\frac{15}{33}$	0	1
	0	0	$-\frac{9}{11}$	$-\frac{10}{11}$	1	6
	0	0	$\frac{25}{11}$	$\frac{120}{33}$	0	65

De esta última tabla se obtiene que el valor máximo de z (65) se obtiene en el punto (1, 3) .