



MATEMÁTICAS III. ECONOMÍA SEPTIEMBRE 04

CÓD. CARRERA 43 CÓD. ASIGNATURA 204

Cuestiones:

1. a) Estúdiase la convergencia de la siguiente integral $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx$

b) Obténgase la ecuación característica asociada a la siguiente ecuación en diferencias:

$$u_{n+3} - 6u_{n+2} + 9u_{n+1} = 0$$

Solución.-

a) Como $\int_0^{\infty} \frac{1}{x} dx$ es divergente y $\frac{1}{x} < \frac{\ln x}{x}$, para $x > e$, la integral propuesta es divergente.

b) Puesto que la ecuación equivale a $u_{n+2} - 6u_{n+1} + 9u_n = 0$, la ecuación característica será: $r^2 - 6r + 9 = 0$.

2. a) Obténgase la condición que debe cumplir un factor integrante que sea función del producto $\mu(x,y) = \mu(x \cdot y)$

b) Escribese la forma canónica del siguiente problema de programación lineal:

$$\max z = 2x_1 - 3x_2 - 4x_3$$

$$\text{s.a. } x_1 + x_2 + x_3 \leq 5$$

$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 7$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Solución.-

a) Llamemos $t = x \cdot y$ y sea $\mu = \mu(t)$. Sea $Pdx + Qdy = 0$ la ecuación diferencial. Entonces, si μ es factor integrante, $\mu Pdx + \mu Qdy = 0$ es diferencial exacta, por lo que:

$$\frac{\partial P}{\partial y} \cdot \mu + P \frac{\partial \mu}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot \mu + P \frac{\partial \mu}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \mu + P \frac{\partial \mu}{\partial t} \cdot x = \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot \mu + P \frac{\partial \mu}{\partial t} \cdot y \Leftrightarrow \frac{\frac{\partial \mu}{\partial t}}{\mu} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Px + Qy}.$$

Por tanto, para que μ exista, $\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Px + Qy}$ debe ser función de $x \cdot y$

b)

$$\max z = 2x_1 - 3x_2 - 4(x_6 - x_7)$$

$$\text{s.a. } x_1 + x_2 + x_6 - x_7 + x_4 = 5$$

$$x_1 + 2x_2 + 5x_6 - 5x_7 + x_5 = 7$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0, x_7 \geq 0$$

Problemas:

1. Calcúlese la siguiente integral

$$\iint_A e^{-(x^2+y^2)} dx dy, \text{ siendo } A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Solución.-

Hacemos un cambio a coordenadas polares con lo que la integral queda:

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho e^{-\rho^2} d\rho = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2} e^{-\rho^2} \right]_0^1 d\theta = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (e^{-1} - 1) d\theta = \frac{e-1}{2e} 2\pi = \frac{\pi(e-1)}{e}$$

2. Dada la ecuación diferencial

$$(x+y^2)dx - 2xydy = 0$$

a) Encuéntrase un factor integrante que solo dependa de x ($\mu = \mu(x)$).



b) Resuélvase la ecuación usando el factor integrante hallado.

Solución.-

a) Debe ser $\frac{\frac{\partial \mu}{\partial x}}{\mu} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{2y + 2y}{-2xy} = \frac{-2}{x} \rightarrow \ln \mu = -2 \ln x = \ln x^{-2} \rightarrow \mu = \frac{1}{x^2}$

b) $\int \frac{x + y^2}{x^2} dx = \ln x - \frac{y^2}{x} + C(y) \rightarrow -\frac{2y}{x} + C'(y) = -\frac{2xy}{x^2} \rightarrow C'(y) = 0 \rightarrow C(y) = C.$

La solución es: $\ln x - \frac{y^2}{x} + C = 0.$