



## MATEMÁTICAS III. ECONOMÍA SEPTIEMBRE 04. RESERVA

CÓD. CARRERA 43 CÓD. ASIGNATURA 204

### Cuestiones:

1. a) Explíquese cómo se haría un cambio a coordenadas polares para calcular  $\iint_A f(x,y)dx dy$

b) Resuélvase la ecuación  $u_{n+3} - u_{n+1} = 0$ .

### Respuestas.-

a) En el cambio a polares,  $x = \rho \cos \varphi$ ;  $y = \rho \sin \varphi$  y el jacobiano  $J = \rho$ . El recinto  $A$ , en coordenadas cartesianas, se transformará en un recinto  $A'$  en coordenadas polares. La integral quedaría:

$$\iint_{A'} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi$$

b) La ecuación propuesta es equivalente a  $u_{n+2} - u_n = 0$  cuya ecuación característica es  $r^2 - 1 = 0 \rightarrow r_1 = 1, r_2 = -1$ , luego la solución general es:  $u_n = C_1 + C_2(-1)^n$ .

2. a) ¿Qué forma tiene una ecuación diferencial de Bernoulli? ¿Cómo se resuelve?.

b) Escribese un problema de programación lineal con cuatro variables y tres restricciones en su forma primal de máximo. Escribese su problema dual.

### Solución.-

a) Una ecuación de Bernoulli es de la forma  $y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha$ , siendo  $\alpha \notin \{0, 1\}$ . El cambio de variable  $z = y^{1-\alpha}$  la convierte en una lineal de primer orden.

b) Por ejemplo: maximizar:  $f = 2x - 3y + z + t$

sujeto a:

$$x + 2y - z \leq 10$$

$$2x - 3y - t \leq 5$$

$$y + 2z - 5t \leq 8$$

además de las condiciones de no negatividad.

La matriz correspondiente es: 
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 10 \\ 2 & -3 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & 8 \\ 2 & -3 & 1 & 1 & * \end{pmatrix}$$
 y su transpuesta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 1 \\ 10 & 5 & 8 & * \end{pmatrix}$$
, luego el problema dual:

minimizar:  $g = 10u + 5v + 8w$

sujeto a :

$$u + 2v \geq 2$$

$$2u - 3v + w \geq -3$$

$$-u + 2w \geq 1$$

$$-v - 5w \geq 1$$

## Problemas:

### 1. Dada la ecuación diferencial

$$\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx + (x^2 + y^2)dy = 0$$

a) Encuéntrese un factor integrante que solo dependa de  $x$  ( $\mu = \mu(x)$ )

b) Resuélvase la ecuación usando el factor integrante hallado.

### Solución.-

$$a) \frac{\frac{\partial \mu}{\partial x}}{\mu} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = 1 \rightarrow \ln \mu = x \rightarrow \mu = e^x.$$

b) La ecuación diferencial exacta será:  $\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)e^x dx + (x^2 + y^2)e^x dy = 0$ ; se

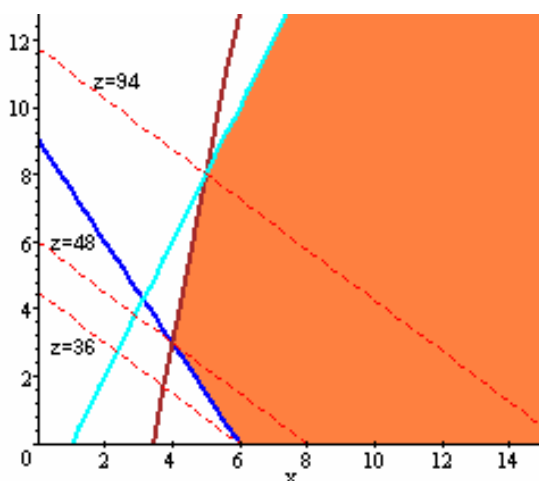
tiene:

$$\begin{aligned} \int \left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)e^x dx &= \left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)e^x - \int (2y + 2xy)e^x dx = \\ &= \left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)e^x - (2y + 2xy)e^x + \int 2ye^x dx = \left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)e^x - (2y + 2xy)e^x + 2ye^x + \\ &+ C(y) = \left(x^2y + \frac{y^3}{3}\right)e^x + C(y). \text{ Derivando respecto de } y \text{ e igualando a } (x^2 + y^2)e^x, \\ (x^2 + y^2)e^x + C'(y) &= (x^2 + y^2)e^x \rightarrow C'(y) = 0 \rightarrow C(y) = K \text{ (constante). Así pues, la solución es:} \\ (3x^2y + y^3)e^x &= C \end{aligned}$$

### 2. Resuélvase el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{aligned} \min z &= 6x + 8y \\ \text{S. a. } 3x + 2y &\geq 18 \\ 5x - y &\geq 17 \\ 2x - y &\geq 2 \\ x &\geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

### Solución.-



Los vértices de la región factible son los puntos (4, 3); (5, 8) y (6, 0). El valor de  $z$  en cada caso:

| x | y | z  |
|---|---|----|
| 4 | 3 | 48 |
| 5 | 8 | 94 |
| 6 | 0 | 36 |

El valor mínimo,  $z = 36$ , se obtiene en el punto (6, 0).