



## MATEMÁTICAS III (ECONOMÍA) COD. 43204 Febrero 2005. 1ª semana

### Cuestiones:

1. a) Estúdiese si la siguiente integral es convergente y en caso afirmativo hallar su

valor  $\int_e^\infty \frac{dx}{x \ln^2 x}$

### Solución.-

Una primitiva de  $\frac{1}{x \ln^2 x}$  es  $\frac{-1}{\ln x}$ , luego  $\int_e^\infty \frac{dx}{x \ln^2 x} = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_e^h \frac{dx}{x \ln^2 x} = -\lim_{h \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{\ln x} \right]_e^h =$   
 $= -\lim_{h \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\ln h} - \frac{1}{\ln e} \right) = -(0 - 1) = 1.$

b) Que forma tiene y como se resuelve una ecuación diferencial de Bemoulli.

### Respuesta.-

Tiene la forma  $y' + yP(x) = y^\alpha Q(x)$ , con  $\alpha \notin \{0, 1\}$ . Se resuelve haciendo el cambio  $z = y^{1-\alpha}$ , que la convierte en una lineal. En efecto, multiplicando los dos miembros de la ecuación por  $(1 - \alpha)y^{-\alpha}$ , queda:  $(1 - \alpha)y^{-\alpha} y' + (1 - \alpha)y^{-\alpha} yP(x) = (1 - \alpha)Q(x)$ . Teniendo en cuenta que  $z' = (1 - \alpha)y^{-\alpha} y'$ , la ecuación queda:  $z' + (1 - \alpha)zP(x) = (1 - \alpha)Q(x)$

2. a) Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas

$$u_{n+3} - 6u_{n+2} + 9u_{n+1} = 0$$

### Solución.-

La ecuación es equivalente a  $u_{n+2} - 6u_{n+1} + 9u_n = 0$  cuya ecuación característica  $t^2 - 6t + 9 = 0$  tiene la raíz  $t = 3$ , doble. Luego  $u_n = C_1 3^n + C_2 n 3^n$ .

b) Encuéntrase un factor integrante  $\mu(x, y) = \mu(x \cdot y)$  que permita resolver la siguiente ecuación diferencial

$$ydx + (x - 3x^3y^2)dy = 0$$

(No se pide resolver la ecuación)

### Solución.-

Si hacemos  $x \cdot y = t \rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial x} &= \frac{\partial \mu}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = \mu' y \\ \frac{\partial \mu}{\partial y} &= \frac{\partial \mu}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = \mu' x \end{aligned} \right\}$ . Si  $\mu y dx + \mu(x - 3x^3y^2)dy = 0$  es diferencial

exacta, deberá ser:  $\mu' xy + \mu = \mu' y(x - 3x^3y^2) + \mu(1 - 9x^2y^2) \rightarrow 3x^3y^3\mu' = -9x^2y^2\mu \rightarrow$   
 $\frac{\mu'}{\mu} = \frac{-3}{xy} = \frac{-3}{t} \rightarrow \ln \mu = \ln t^{-3} \rightarrow \mu = t^{-3} = (xy)^{-3}.$

### Problemas:

1. Calcúlese la siguiente integral  $\iint_A \cos(x^2 + y^2) dx dy$ , siendo  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$

Solución.- Efectuando el cambio a coordenadas polares, la integral queda:

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho \cos \rho^2 d\rho = 2\pi \left[ \frac{\sin \rho^2}{2} \right]_0^1 = \pi \sin 1.$$



2. Resuélvase el siguiente problema por el método simplex:

$$\min z = 6x_1 + 5x_2 + 2x_3$$

$$\text{s.a. } x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 5$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2$$

$$4x_1 - 2x_2 + 3x_3 \geq -1$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0$$

**Solución.-**

La matriz del problema dado (primal) es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 & -1 \\ 6 & 5 & 2 & * \end{pmatrix}$$

cuya transpuesta

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & -1 & * \end{pmatrix}$ 
 es la matriz del problema dual. Se tendrá:

| Tabla 1        |                |                |   |   |   |   |
|----------------|----------------|----------------|---|---|---|---|
| P <sub>1</sub> | P <sub>2</sub> | P <sub>3</sub> |   |   |   |   |
| 1              | 2              | 4              | 1 | 0 | 0 | 6 |
| 3              | 2              | -2             | 0 | 1 | 0 | 5 |
| 2              | ①              | 3              | 0 | 0 | 1 | 2 |
| -5             | -2             | 1              | 0 | 0 | 0 | 0 |

⇒

| Tabla 2        |                |                |   |   |    |   |   |
|----------------|----------------|----------------|---|---|----|---|---|
| P <sub>1</sub> | P <sub>2</sub> | P <sub>3</sub> |   |   |    |   |   |
| -3             | 0              | -2             | 1 | 0 | -2 | 2 |   |
| -1             | 0              | -8             | 0 | 1 | -2 | 1 |   |
| P <sub>2</sub> | ②              | 1              | 3 | 0 | 0  | 1 | 2 |
| -1             | 0              | 7              | 0 | 0 | 2  | 4 |   |

⇒

| Tabla 3        |                |                |   |   |      |   |   |
|----------------|----------------|----------------|---|---|------|---|---|
| P <sub>1</sub> | P <sub>2</sub> | P <sub>3</sub> |   |   |      |   |   |
| 0              | 3/2            | 5/2            | 1 | 0 | -1/2 | 5 |   |
| 0              | 1/2            | -13/2          | 0 | 1 | -3/2 | 2 |   |
| P <sub>1</sub> | 2              | 1              | 3 | 0 | 0    | 1 | 2 |
| 0              | 1/2            | 17/2           | 0 | 0 | 5/2  | 5 |   |

El mínimo valor es 5 y corresponde al punto (0, 0, 5/2).