



MATEMÁTICAS III (ECONOMÍA) COD. 43204 Febrero 2005. 2ª semana

Cuestiones:

1. a) Calcúlese $\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ haciendo previamente el cambio $x = \sin^2 t$

b) Obtener una solución particular de la siguiente ecuación en diferencias finitas para $u_1 = 1; u_2 = 2$:

$$u_{n+2} - 6u_{n+1} + 9u_n = 0$$

Solución.-

a)

$$\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx = \left\{ \begin{array}{l} x = \sin^2 t \\ dx = 2 \sin t \cos t dt \\ x = 0 \rightarrow t = 0 \\ x = 1 \rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{-1} t \cdot \cos^{-1} t \cdot \sin t \cdot \cos t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \pi$$

b) El polinomio característico $t^2 - 6t + 9$ admite la raíz $t = 3$ (doble) luego la solución general: $u_n = C_1 \cdot 3^n + C_2 \cdot n3^n$. Para las condiciones dada se obtiene $C_1 = \frac{4}{9}$ y $C_2 = -\frac{1}{9}$, de donde la solución será:

$$u_n = \frac{4}{9} \cdot 3^n - \frac{1}{9} \cdot n3^n$$

2. a) Escribanse las formas canónica y estándar del siguiente problema de programación lineal

$$\begin{array}{ll} \max z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a.} & 6x_1 + 7x_2 \geq 53 \\ & 2x_1 - 5x_2 \leq -19 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \leq 0 \end{array}$$

b) Escribese el problema dual del enunciado en el ejercicio anterior:

Solución.-

a) Cambiando x_2 por $-x_2$ y añadiendo las variables de holgura, tendremos el problema escrito en su forma canónica o estándar:

$$\begin{array}{ll} \max z = 2x_1 - 3x_2 \\ \text{s.a.} & 6x_1 - 7x_2 - x_3 = 53 \\ & 2x_1 + 5x_2 + x_4 = -19 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{array}$$

b) El problema en su forma primal lo podemos escribir así:

$$\begin{array}{ll} \max z = 2x_1 - 3x_2 \\ \text{s.a.} & -6x_1 + 7x_2 \leq -53 \\ & 2x_1 + 5x_2 \leq -19 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

La matriz del dual es la transpuesta de la matriz del primal:

$$\begin{pmatrix} -6 & 7 & -53 \\ 2 & 5 & -19 \\ 2 & -3 & * \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 2 \\ 7 & 5 & -3 \\ -53 & -19 & * \end{pmatrix}$$

con lo que el problema dual sería:

$$\begin{aligned} \min g &= -53u_1 - 19u_2 \\ \text{s.a.} \quad &-6u_1 + 2u_2 \geq 2 \\ &7u_1 + 5u_2 \geq -3 \\ &u_1 \geq 0, u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Problemas:

1. Calcúlese la siguiente integral $\iint_A \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$

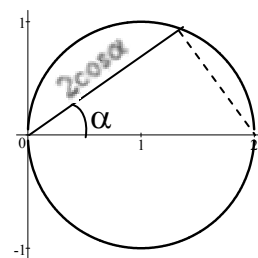
siendo $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$

Solución.-

El recinto es la circunferencia de la figura.

Efectuando el cambio a polares $\begin{cases} x = \rho \cos \alpha \\ y = \rho \sin \alpha \end{cases}$, el nuevo

recinto sería $\left. \begin{aligned} -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \rho \leq 2 \cos \alpha \end{aligned} \right\}$, con lo que la integral queda:



$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\alpha \int_0^{2 \cos \alpha} \rho^2 d\rho &= \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\rho^3]_0^{2 \cos \alpha} d\alpha = \frac{8}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \alpha d\alpha = \frac{8}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha (1 - \sin^2 \alpha) d\alpha = (\text{inmediata}) = \\ &= \frac{8}{3} \left[\sin \alpha \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{3} \left[\sin^3 \alpha \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3} \left(2 - \frac{1}{3} \cdot 2 \right) = \frac{32}{9} \end{aligned}$$

2. Resuélvase la siguiente ecuación diferencial:

$$y'' - y' - 2y = e^{-x}.$$

Solución.-

Las raíces de la ecuación característica $t^2 - t - 2 = 0$, son 2 y -1, por lo que una solución particular de la ecuación completa será de la forma: $y = A x e^{-x}$. Sustituyendo en la ecuación se obtiene que $A = -\frac{1}{3}$, con lo que la solución de la ecuación propuesta es:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} - \frac{1}{3} x e^{-x}.$$