



MATEMÁTICAS III (ECONOMÍA) COD. 43204 Febrero 2006. 1ª semana

Cuestiones.-

1.-

a) Resuélvase la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{2xdx}{y^3} + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0$$

Solución.-

Puede comprobarse que es diferencial exacta. Por lo tanto:

$$f(x, y) = \int \frac{2x}{y^3} dx = \frac{x^2}{y^3} + C(y). \text{ Derivando este resultado respecto de } y, \text{ debe ser:}$$

$$\frac{-3x^2}{y^4} + C'(y) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} \rightarrow C'(y) = \frac{1}{y^2} \rightarrow C(y) = -\frac{1}{y} + C. \text{ Así pues la solución}$$

puede expresarse:

$$\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = K$$

b) Resuélvase la siguiente ecuación diferencial:

$$x^2 y'' - xy' + y = 2x$$

Solución.-

Se trata de una ecuación de Euler. Haciendo el cambio $x = e^t \leftrightarrow t = \ln x$, se tiene que:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x} \rightarrow y'' = \frac{dy'}{dx} = \left(\frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{1}{x} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x^2} \right) \frac{1}{x} = \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) \frac{1}{x^2}$$

Sustituyendo en la ecuación y simplificando, queda:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2 \frac{dy}{dt} + y = 2e^t$$

que es una ecuación lineal con coeficientes constantes, cuyo polinomio característico $r^2 - 2r + 1 = 0$ admite la raíz doble $r = 1$. Así pues, la solución general de la ecuación homogénea será:

$$y_1 = C_1 e^t + C_2 t e^t$$

Como solución particular de la ecuación completa ensayaremos $y_2 = C t^2 e^t$. Se tiene:

$$\frac{dy_2}{dt} = C(2te^t + t^2 e^t) = C e^t (2t + t^2) \quad y \quad \frac{d^2y_2}{dt^2} = C e^t (t^2 + 4t + 2).$$

Sustituyendo en la ecuación y simplificando queda $C = 1$, con lo que la solución general de la ecuación completa es:

$$y = C_1 e^t + C_2 t e^t + t^2 e^t.$$

y deshaciendo el cambio de variable queda finalmente:

$$y = C_1 x + C_2 x \ln x + x \ln^2 x$$

2.-

Resuélvase por el método de variación de constantes la siguiente ecuación diferencial.

$$y' = 1 + x + x^2 + y$$

Solución.-

La ecuación homogénea $y' - y = 0$ tiene como solución general $y = Ce^x$. Haciendo la constante $C = C(x)$ y sustituyendo en la ecuación queda:

$C'(x)e^x + C(x)e^x = 1 + x + x^2 + C(x)e^x \rightarrow C'(x) = (1 + x + x^2)e^{-x}$. Integrando por partes se obtiene que :

$$C(x) = (-x^2 - 3x - 4)e^{-x} + C$$

con lo que la solución será:

$$y = -x^2 - 3x - 4 + Ce^x$$

b) Escribese en notación de subíndices la siguiente ecuación.

$$\Delta^2 f(x) - 3\Delta f(x) = 0$$

(No se pide resolver la ecuación)

Solución.-

Se tiene que $\Delta^2 f(x) = f(x+2) - 2f(x+1) + f(x) = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n$

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) = u_{n+1} - u_n$$

Sustituyendo queda: $u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n - 3(u_{n+1} - u_n) = 0 \leftrightarrow u_{n+2} - 5u_{n+1} + 4u_n = 0$

Problemas:

1. Calcúlese la integral

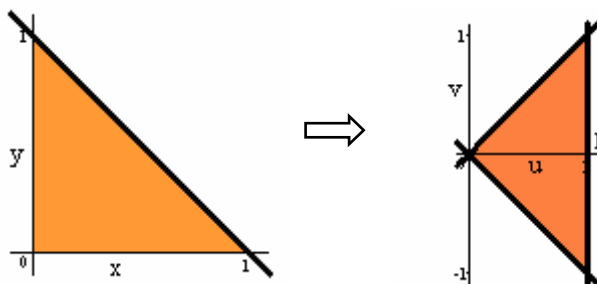
$$\iint_A e^{\frac{y-x}{y+x}} dx dy$$

Donde A es el dominio $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ mediante el cambio de variables $u = x + y, v = y - x$

Solución.-

Se tiene que $\begin{cases} x = \frac{u-v}{2} \\ y = \frac{u+v}{2} \end{cases}$ de donde el jacobiano $J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$. Con el cambio realizado

el dominio se convierte en $A = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / u \geq v, u \geq -v, u \leq 1\}$



La integral pues, queda:

$$\frac{1}{2} \int_0^1 du \int_{-u}^u e^{\frac{v}{u}} dv = \frac{1}{2} \int_0^1 u \left[e^{\frac{v}{u}} \right]_{-u}^u du = \frac{e - e^{-1}}{2} \int_0^1 u du = \frac{e - e^{-1}}{4} [u^2]_0^1 = \frac{e - e^{-1}}{4}$$

2. Resuélvase el problema:

$$\text{Minimizar } z = x_1 + 7x_2 + 2x_3$$

sujeto a:

$$7x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 9$$

$$4x_1 + 8x_2 - x_3 \leq 10$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

Solución.-

Cambiando previamente el signo a la segunda inecuación, escribimos el problema dual:

$$\text{Maximizar } f = 9u - 10v$$

$$\text{sujeto a: } 7u - 4v \leq 1$$

$$3u - 8v \leq 7$$

$$5u + v \leq 2$$

$$u \geq 0, v \geq 0$$

y aplicando el método del simplex:

| | P ₁ | P ₂ | | | |
|--|----------------|----------------|---|---|---|
| | 7 | -4 | 1 | 0 | 0 |
| | 3 | -8 | 0 | 1 | 0 |
| | 5 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| | -9 | 10 | 0 | 0 | 0 |

→

| | P ₁ | P ₂ | | | |
|----------------|----------------|-----------------|----------------|---|---|
| P ₁ | 1 | $-\frac{4}{7}$ | $\frac{1}{7}$ | 0 | 0 |
| | 0 | $-\frac{44}{7}$ | $-\frac{3}{7}$ | 1 | 0 |
| | 0 | $\frac{27}{7}$ | $-\frac{5}{7}$ | 0 | 1 |
| | 0 | $\frac{34}{7}$ | $\frac{9}{7}$ | 0 | 0 |

tabla que ya es terminal por lo que el mínimo valor es $\frac{9}{7}$ y se alcanza en el punto $\left(\frac{9}{7}, 0, 0\right)$