

MATEMÁTICAS III (ECONOMÍA) COD. 43204 Febrero 2006. 2ª semana

Cuestiones.-

1. a) Resuélvase la siguiente integral euleriana:

$$\int_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-x^3} dx$$

b) Invertir el orden de integración en la siguiente integral:

$$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy dx$$

Solución.-

a) Mediante el cambio $x^3 = t \rightarrow x = t^{\frac{1}{3}} \rightarrow dx = \frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}} dt$, la integral se convierte en:

$$\frac{1}{3} \int_0^{\infty} t^{-\frac{2}{3}} e^{-t} dt = \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{3}$$

b) Los límites de integración establecen el recinto: $-1 \leq x \leq 1$; $0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$, que es el semicírculo de radio unidad representado en la figura adjunta. Puede también escribirse:

$$0 \leq y \leq 1; -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}$$

con lo que la integral quedaría:

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx dy$$

2. a) Escribir como quedaría la siguiente integral

$$\iint_A f(x, y) dx dy$$

siendo A la región del primer cuadrante limitada por las líneas

$$y = \frac{1}{2}x, \quad y = 2x, \quad xy = 1, \quad xy = 3$$

al hacer el cambio de variables $\frac{y}{x} = u, \quad xy = v$.

b) Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas.

$$3u_{n+2} - 11u_{n+1} + 8u_n = 0$$

Solución.-

a) Del cambio de variable propuesto, despejando x e y, se obtiene $\left. \begin{matrix} x = \sqrt{\frac{v}{u}} \\ y = \sqrt{uv} \end{matrix} \right\}$, de donde

el valor absoluto del jacobiano: $V. \text{ abs. } \begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{v}}{2u\sqrt{u}} & \frac{1}{2\sqrt{uv}} \\ \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{1}{2\sqrt{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2u}$. La región A es la limitada por

las líneas: $u = \frac{1}{2}, u = 2, v = 1, v = 3$. Luego la integral queda:

$$\int_{\frac{1}{2}}^2 \int_1^3 f\left(\sqrt{\frac{v}{u}}, \sqrt{uv}\right) \frac{1}{2u} dv du$$

b) La ecuación característica: $3r^2 - 11r + 8 = 0$, tiene las soluciones $r_1 = 1, r_2 = \frac{8}{3}$,

luego la solución de la ecuación es:

$$u_n = C_1 + C_2 \left(\frac{8}{3}\right)^n$$

Problemas:

1. Dada la ecuación diferencial

$$y'' + y' - 2y = 2(1+x)$$

Se pide:

- Resolver la ecuación homogénea asociada
- Obtener una solución particular de la ecuación completa por el método de variación de constantes

Solución.-

a) Las raíces del polinomio característico, $r^2 + r - 2$, son $r_1 = 1$ y $r_2 = -2$, luego la solución general de la ecuación homogénea es: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$.

b) Considerando C_1 y C_2 funciones de x, derivando:

$$y' = C_1' e^x + C_1 e^x + C_2' e^{-2x} - 2C_2 e^{-2x}$$

y haciendo $C_1' e^x + C_2' e^{-2x} = 0$ (I), queda $y' = C_1 e^x - 2C_2 e^{-2x}$. Volviendo a derivar:

$$y'' = C_1' e^x + C_1 e^x - 2C_2' e^{-2x} + 4C_2 e^{-2x}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial y simplificando se obtiene:

$$C_1' e^x - 2C_2' e^{-2x} = 2(1+x) \quad \text{(II)}$$

Del sistema formado por las ecuaciones (I) y (II), se obtiene:

$$\left. \begin{matrix} C_1' = \frac{2}{3}(1+x)e^{-x} \\ C_2' = -\frac{2}{3}(1+x)e^{2x} \end{matrix} \right\} \text{ y por integración: } \left. \begin{matrix} C_1 = -\frac{2}{3}(2+x)e^{-x} + K_1 \\ C_2 = -\frac{1}{6}(1+2x)e^{2x} + K_2 \end{matrix} \right\}$$

Sustituyendo en la solución general de la homogénea, obtenemos la solución general de la completa:

$$y = -\frac{2}{3}(2+x) - \frac{1}{6}(1+2x) + K_1 e^x + K_2 e^{-2x}$$

y simplificando: $y = -\frac{3}{2} - x + K_1 e^x + K_2 e^{-2x}$

2. Resuélvase el problema:

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

sujeito a:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 4$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

Solución.-

De la tabla inicial:

1	1	1	1	0	0	1
1	1	2	0	0	0	2
3	2	1	0	0	-1	4
-2	-3	-4	0	0	0	0

obtenemos las tablas sucesivas:

P₁

1	1	1	1	0	0	1
0	0	1	-1	0	0	1
0	-1	-2	-3	0	-1	1
0	-1	-2	2	0	0	2

P₂

1	1	1	1	0	0	1
0	0	1	-1	0	0	1
1	0	-1	-2	0	-1	2
1	0	-1	3	0	0	3

P₃

1	1	1	1	0	0	1
-1	-1	0	-2	0	0	0
2	1	0	-1	0	-1	3
2	1	0	4	0	0	4

La última tabla ya es terminal y proporciona el punto (0, 0, 1). Ahora bien, si lo sustituimos en el sistema de inecuaciones, observamos que no verifica la tercera inecuación, por lo que no pertenece a la región factible y por tanto el problema **no tiene solución**.