

MATEMÁTICAS III (ECONOMÍA) COD. 43204 Septiembre 2006. 1ª semana

Cuestiones.-

1. a) Estúdiense si la siguiente integral es convergente y en caso afirmativo hallar su valor

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 7x + 10}$$

- b) Revuélvase la siguiente integral euleriana $\int_0^{\infty} e^{-x^4} dx$

Solución.-

a) Puesto que el denominador se anula para los valores $x_1 = 2$ y $x_2 = 5$, la integral será convergente si es finito el límite:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2-\varepsilon} \frac{1}{x^2 - 7x + 10} dx + \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \delta \rightarrow 0}} \int_{2+\varepsilon}^{5-\delta} \frac{1}{x^2 - 7x + 10} dx + \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ h \rightarrow \infty}} \int_{5+\delta}^h \frac{1}{x^2 - 7x + 10} dx$$

pero $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2-\varepsilon} \frac{1}{x^2 - 7x + 10} dx = \frac{1}{3} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2-\varepsilon} \left(\frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-2} \right) dx = \frac{1}{3} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\ln \left| \frac{x-5}{x-2} \right| \right]_0^{2-\varepsilon} =$

$$= \frac{1}{3} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\ln \left| \frac{3+\varepsilon}{\varepsilon} \right| - \ln \frac{5}{2} \right] = \frac{1}{3} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\ln \left| \frac{6+2\varepsilon}{5\varepsilon} \right| \right] = \infty. \text{ Luego la integral es divergente.}$$

- b) Hacemos el cambio $x^4 = t \rightarrow x = t^{\frac{1}{4}} \rightarrow dx = \frac{1}{4} t^{-\frac{3}{4}} dt$. Sustituyendo, la integral queda:

$$\frac{1}{4} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-\frac{3}{4}} dt = \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$$

2. a) Invertir el orden de integración de la siguiente integral doble:

$$\int_0^2 \int_{2x}^{6-x} f(x, y) dy dx$$

- b) Revuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$u_{n+3} - 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n = 0$$

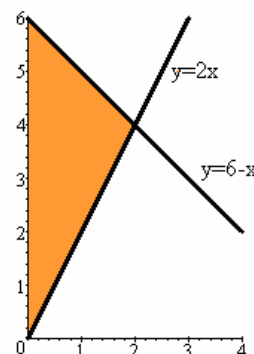
Solución.-

- a) El recinto de integración es $\left. \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 2 \\ 2x \leq y \leq 6-x \end{array} \right\}$, representado

en la imagen. Las rectas $y = 2x$, $y = 6-x$ se cortan en el punto $(2, 4)$, luego el recinto también se puede escribir como la unión:

$$\left\{ 0 \leq y \leq 4; 0 \leq x \leq \frac{y}{2} \right\} \cup \left\{ 4 \leq y \leq 6; 0 \leq x \leq 6-y \right\}$$

luego la integral sería:



$$\int_0^4 \int_0^{\frac{y}{2}} f(x, y) dx dy + \int_4^6 \int_0^{6-y} f(x, y) dx dy$$

b) La ecuación característica $t^3 - 2t^2 + t - 2 = 0$ tiene las soluciones $t_1 = 2, t_2 = i, t_3 = -i$, luego la solución general de la ecuación dada es:

$$u_n = C_1 2^n + C_2 \sin \frac{n\pi}{2} + C_3 \cos \frac{n\pi}{2}$$

Problemas.-

1. Revuélvase la siguiente ecuación diferencial:

$$y'''' + y' = 2xe^x$$

Solución.-

Calculemos primeramente la solución general de la ecuación homogénea. La ecuación característica $t^3 + t = 0$, tiene las soluciones $t_1 = 0, t_2 = i, t_3 = -i$, luego la solución buscada es:

$$y_1 = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x$$

Como solución particular de la ecuación completa, ensayaremos $y_2 = (Ax+B)e^x$, de donde $y_2' = Ae^x + (Ax+B)e^x$; $y_2'' = 2Ae^x + (Ax+B)e^x$; $y_2''' = 3Ae^x + (Ax+B)e^x$. Sustituyendo: $3Ae^x + (Ax+B)e^x + Ae^x + (Ax+B)e^x = 2xe^x \leftrightarrow 2Ax + 4A + 2B = 2x \leftrightarrow A = 1, B = 2$. Así pues la solución de la ecuación dada es:

$$y = y_1 + y_2 = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x + (x + 2)e^x$$

2. Resuélvase el siguiente problema de transporte:

O \ D	12	8	15
16	9	5	4
19	3	2	6

Solución.-

Obtenemos una primera solución factible por el método de la esquina noroeste.

El dual proporciona el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} u_1 + v_1 = 9 \\ u_1 + v_2 = 5 \\ u_2 + v_2 = 2 \\ u_2 + v_3 = 6 \end{array} \right\} \text{una solución del cual es } \left. \begin{array}{l} u_1 = 0 \\ u_2 = -3 \\ v_1 = 9 \\ v_2 = 5 \\ v_3 = 9 \end{array} \right\}$$

		9	5	9
O \ D		12	8	15
0	16	9 12	5 4	4 0
-3	19	3 0	2 4	6 15

La máxima diferencia positiva $u_i + v_j - c_{ij}$, es $u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 9 - 4 = 5$. Así pues, haremos $x_{13} = \theta$, con lo que la tabla queda:

O \ D	12	8	15
16	9 12	5 4-θ	4 θ
19	3 0	2 4+θ	6 15-θ

Para $\theta = 4$, obtenemos la solución factible:

O \ D	12	8	15
16	9 12	5 0	4 4
19	3 0	2 8	6 11

El sistema dual ahora es:

$$\left. \begin{array}{l} u_1 + v_1 = 9 \\ u_1 + v_3 = 4 \\ u_2 + v_2 = 2 \\ u_2 + v_3 = 6 \end{array} \right\} \text{una solución del cual es } \left. \begin{array}{l} u_1 = 0 \\ u_2 = 2 \\ v_1 = 9 \\ v_2 = 0 \\ v_3 = 4 \end{array} \right\}$$

		9	0	4
	<div>O D</div>	12	8	15
0	16	<div>9 12</div>	<div>5 0</div>	<div>4 4</div>
2	19	<div>3 0</div>	<div>2 8</div>	<div>6 11</div>

La máxima diferencia positiva $u_i + v_j - c_{ij}$, es $u_2 + v_1 - c_{21} = 2 + 9 - 3 = 8$. Así pues, haremos $x_{21} = \theta$, con lo que la tabla queda:

O \ D	12	8	15
16	9 12-θ	5 0	4 4+θ
19	3 θ	2 8	6 11-θ

Para $\theta = 11$, obtenemos la solución factible:

O \ D	12	8	15
16	9 1	5 0	4 15
19	3 11	2 8	6 0

El sistema dual ahora es:

$$\left. \begin{array}{l} u_1 + v_1 = 9 \\ u_1 + v_3 = 4 \\ u_2 + v_1 = 3 \\ u_2 + v_2 = 2 \end{array} \right\} \text{una solución del cual es } \left. \begin{array}{l} u_1 = 0 \quad v_1 = 9 \\ u_2 = -6 \quad v_2 = 8 \\ v_3 = 4 \end{array} \right\}$$

		9	8	4
	O	12	8	15
D				
0	16	9 1	5 0	4 15
-6	19	3 11	2 8	6 0

La máxima diferencia positiva $u_i + v_j - c_{ij}$, es $u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + 8 - 5 = 3$. Así pues, haremos $x_{12} = \theta$, con lo que la tabla queda:

	O	12	8	15
D				
16	9	1- θ	5	4
19	3	11+ θ	2	6

Para $\theta = 1$, obtenemos la solución factible:

	O	12	8	15
D				
16	9	0	1	15
19	3	12	7	0

El sistema dual ahora es:

$$\left. \begin{array}{l} u_1 + v_2 = 5 \\ u_1 + v_3 = 4 \\ u_2 + v_1 = 3 \\ u_2 + v_2 = 2 \end{array} \right\} \text{una solución del cual es } \left. \begin{array}{l} u_1 = 0 \quad v_1 = 6 \\ u_2 = -3 \quad v_2 = 5 \\ v_3 = 4 \end{array} \right\}$$

		6	5	4
	O	12	8	15
D				
0	16	9 0	5 1	4 15
-3	19	3 12	2 7	6 0

Y ya no existe ninguna diferencia $u_i + v_j - c_{ij}$ que sea positiva. Por tanto, la solución óptima es: $x_{11} = 0$, $x_{12} = 1$, $x_{13} = 15$, $x_{21} = 12$, $x_{22} = 7$, $x_{23} = 0$ y el valor mínimo:

$$9 \cdot 0 + 5 \cdot 1 + 4 \cdot 15 + 3 \cdot 12 + 2 \cdot 7 + 6 \cdot 0 = 115$$