



MATEMÁTICAS III (ECONOMÍA) COD. 43204 Septiembre 2006. Reserva Cuestiones.-

1. a) Obténgase un factor integrante que dependa solo de y para la siguiente ecuación diferencial:

$$(x^3 y + y + 3)dy + x^2 y^2 dx = 0$$

b) Revuélvase la ecuación de la cuestión anterior.

Solución.-

a) Llamando $\mu(y)$ al factor integrante, y multiplicando, se obtiene que

$$\mu(y)(x^3 y + y + 3)dy + \mu(y)x^2 y^2 dx = 0$$

es diferencial exacta, luego se verificará la igualdad:

$$\mu(y)(3x^2 y) = \mu'(y)x^2 y^2 + 2\mu(y)x^2 y$$

y simplificando:

$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \frac{1}{y} \rightarrow \mu(y) = y$$

b) Multiplicando por el factor integrante, la ecuación a resolver es:
 $(x^3 y^2 + y^2 + 3y)dy + x^2 y^3 dx = 0$.

$$\text{Tendremos: } F(x, y) = \int (x^3 y^2 + y^2 + 3y)dy = \frac{x^3 y^3}{3} + \frac{y^3}{3} + \frac{3y^2}{2} + C(x).$$

Derivando ahora respecto de x será:

$$x^2 y^3 + C'(x) = x^2 y^3 \rightarrow C'(x) = 0 \rightarrow C(x) = -C. \text{ Luego la solución es:}$$

$$\frac{x^3 y^3}{3} + \frac{y^3}{3} + \frac{3y^2}{2} = C$$

2. a) Resuélvase la siguiente ecuación diferencial

$$y^{IV} + 5y'' - 36y = 0$$

b) Obténgase una solución particular de:

$$u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0$$

tal que $u_1 = 1$ y $u_2 = 3$

Solución.-

a) La ecuación característica $r^4 + 5r^2 - 36 = 0$ (bicuadrada), tiene las soluciones: $r_1 = 2$, $r_2 = -2$, $r_3 = 3i$, $r_4 = -3i$. Luego la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x$$

b) La ecuación característica de la ecuación en diferencias:

$$r^2 - 2r + 1 = 0$$

tiene la solución (doble) $r = 1$. Así pues, la solución general es $u_n = C_1 + C_2 n$

Para las condiciones dadas:

$$\left. \begin{array}{l} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 + 2C_2 = 3 \end{array} \right\} \rightarrow C_1 = -1, C_2 = 2$$

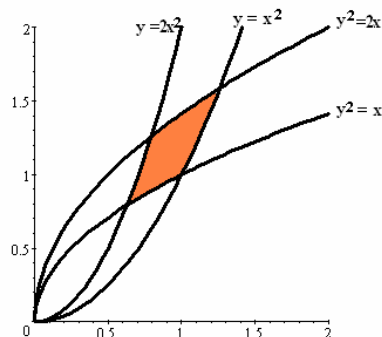
luego la solución particular pedida es $u_n = -1 + 2n$

Problemas.-

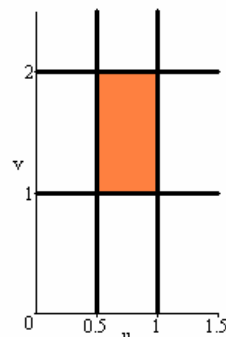
1. Hállese el área del dominio acotado que limitan las parábolas $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y^2 = x$, $y^2 = 2x$, mediante el cambio de variables $x^2 = uy$, $y^2 = vx$.

Solución.-

Efectuado el cambio de variables, las curvas se convierten respectivamente en: $u = 1$, $u = \frac{1}{2}$, $v = 1$, $v = 2$. Una representación del dominio en ambos sistemas de coordenadas sería:



En las coordenadas (x, y)



En las coordenadas (u, v)

El área pedida puede calcularse mediante la integral doble de la función $f(x, y) = 1$ en el dominio dado. Efectuando el cambio de variable, será:

$$\text{Área} = \iint_A 1 \cdot dx dy = \iint_{A'} 1 \cdot \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv = \int_{\frac{1}{2}}^1 du \int_1^2 \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dv$$

Para calcular el jacobiano, despejamos x e y del cambio de variables, quedando

$$\left. \begin{array}{l} x = u^{\frac{2}{3}} v^{\frac{1}{3}} \\ y = u^{\frac{1}{3}} v^{\frac{2}{3}} \end{array} \right\}, \text{ de donde } \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} u^{-\frac{1}{3}} v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3} u^{\frac{2}{3}} v^{-\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}} v^{\frac{2}{3}} & \frac{2}{3} u^{\frac{1}{3}} v^{-\frac{1}{3}} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}. \text{ Luego el área es } \frac{1}{3} \int_{\frac{1}{2}}^1 du \int_1^2 dv = \frac{1}{6}$$

2. Resuélvase el siguiente problema de programación lineal:

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

sujeto a:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 4$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

Solución.-

De la segunda condición podemos despejar una de las variables, por ejemplo, x_1 , y al sustituir en las otras condiciones, queda (simplificando):

$$\left. \begin{array}{l} x_3 \geq 1 \\ x_2 + 5x_3 \leq 2 \\ x_2 - 2x_3 \leq 2 \\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array} \right\}$$

y puede comprobarse que la región factible es vacía, es decir, no existe ningún punto que cumpla las anteriores condiciones (por ejemplo, multiplicando la primera desigualdad por -5 y sumándola a la segunda, se obtiene $x_2 \leq -3$, contradictoria con $x_2 \geq 0$). Es decir, el problema no tiene solución.