



MATEMÁTICAS III (ECONOMÍA) COD. 43204 Febrero 2007. 1ª semana

Cuestiones:

1. a) Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$ con las condiciones iniciales $a_0 = 1$ y $a_1 = 2$.

Solución.-

Las soluciones de la ecuación característica $r^2 - 5r + 6 = 0$ son $r_1 = 2$ y $r_2 = 3$, luego la solución general de la ecuación propuesta es:

$$a_n = C_1 2^n + C_2 3^n$$

Para las condiciones iniciales dadas, se tiene:

$$\left. \begin{array}{l} C_1 + C_2 = 1 \\ 2C_1 + 3C_2 = 2 \end{array} \right\} \rightarrow C_1 = 1, C_2 = 0, \text{ de donde la solución pedida:}$$

$$a_n = 2^n$$

b) Escribanse las formas canónica y estándar para el siguiente problema de programación lineal:

Minimizar $u = x + 7y + 2z$

$$\text{s.a.} \begin{cases} 7x + 3y + 5z \geq 9 \\ 4x + 8y - z \leq 10 \\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \end{cases}$$

Solución.-

Escribamos en primer lugar todas las desigualdades con el signo \geq :

$$7x + 3y + 5z \geq 9$$

$$-4x - 8y + z \geq -10$$

$$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$$

Escribimos ahora el problema dual:

Maximizar: $f = 9v - 10w$

$$\text{s.a.} \begin{cases} 7v - 4w \leq 1 \\ 3v - 8w \leq 7 \\ 5v + w \leq 2 \\ v \geq 0, w \geq 0 \end{cases}$$

Introducimos finalmente las variables de holgura, quedando:

Maximizar: $f = 9v - 10w + 0r + 0s + 0t$

$$\text{s.a.} \begin{cases} 7v - 4w + r = 1 \\ 3v - 8w + s = 7 \\ 5v + w + t = 2 \\ v \geq 0, w \geq 0, r \geq 0, s \geq 0, t \geq 0 \end{cases}$$

2. a) Realizar la asignación inicial para el siguiente problema del transporte

D \ O	12	8	15
16	9	5	4
19	3	2	6

b) Determínese si la solución encontrada en el ejercicio anterior es óptima.

Solución.-

a) Obtenemos una primera solución factible por el método de la esquina noroeste:

D \ O	12	8	15
16	9 12	5 4	4
19	3	2 4	6 15

b) El dual proporciona el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} u_1 + v_1 = 9 \\ u_1 + v_2 = 5 \\ u_2 + v_2 = 2 \\ u_2 + v_3 = 6 \end{array} \right\} \text{una solución del cual es } \left. \begin{array}{l} u_1 = 0 \\ u_2 = -3 \\ v_1 = 9 \\ v_2 = 5 \\ v_3 = 9 \end{array} \right\}$$

Puesto que existen diferencias $u_i + v_j - c_{ij}$ positivas (p. ej.: $u_1 + v_3 - c_{13} = 9 - 4 = 5$), la solución anterior no es óptima.

Problemas:

1. Calcúlese el área de la región del plano limitada por las desigualdades:

$$2x + 3y \geq 6, 2x + 3y \leq 18, 2x - 3y \geq -6, 2x - 3y \leq 6$$

mediante integrales dobles y aplicando el cambio de variables $u = 2x - 3y$ y $v = 2x + 3y$. Dibújense las dos regiones de integración.

Solución.-

Efectuando el cambio de variable, la región de integración queda:

$$v \geq 6, v \leq 18, u \geq -6, u \leq 6,$$

Si ahora despejamos x e y en función de u y v , queda:

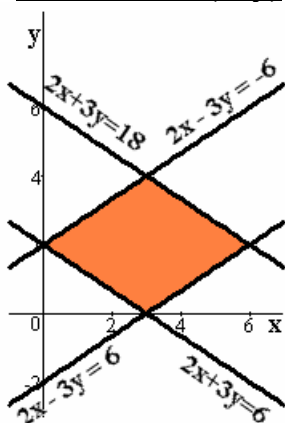
$$x = \frac{u+v}{4}; \quad y = \frac{v-u}{6}$$

de donde el jacobiano de la transformación: $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{vmatrix} = \frac{1}{12}$. Así pues, el área pedida

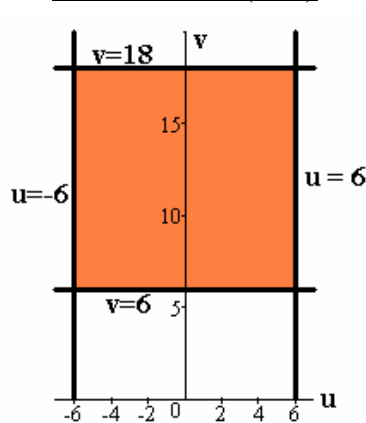
$$\text{es: } \frac{1}{12} \int_{-6}^6 du \int_6^{18} dv = \frac{1}{12} \cdot 12 \cdot 12 = 12.$$

El dibujo de la región, según las coordenadas, es:

Coordenadas (x, y)



Coordenadas (u, v)





2. Revuélvase la siguiente ecuación diferencial

$$x^2y^2dx + (x^3y + y + 3)dy = 0$$

encontrando previamente un factor integrante de la forma $\mu = \mu(y)$.

Solución.-

El factor integrante μ lo obtenemos de la ecuación:
$$\frac{\frac{\partial \mu}{\partial y}}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{3x^2y - 2x^2y}{x^2y^2} = \frac{1}{y},$$

de donde integrando: $\ln \mu = \ln y \rightarrow \mu = y$. La ecuación queda entonces:

$$x^2y^3dx + (x^3y^2 + y^2 + 3y)dy = 0$$

que ya es diferencial exacta. Se tendrá:

$$F(x,y) = \int x^2y^3dx = \frac{1}{3}x^3y^3 + C(y) \rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = x^3y^2 + C'(y) = x^3y^2 + y^2 + 3y \rightarrow$$

$$\rightarrow C'(y) = y^2 + 3y \rightarrow C(y) = \frac{1}{3}y^3 + \frac{3}{2}y^2 - C. \text{ La solución es:}$$

$$\frac{1}{3}x^3y^3 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{3}{2}y^2 = C$$