

MATEMÁTICAS III (ECONOMÍA) COD. 43204 Febrero 2007. 2ª semana

Cuestiones:

1. a) Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 2n + 1$$

Solución.-

La ecuación característica $r^2 - 3r + 2 = 0$ tiene por soluciones $r_1 = 1$ y $r_2 = 2$, luego la solución general de la ecuación homogénea es $a'_n = C_1 + C_2 \cdot 2^n$. Para la solución particular de la completa, puesto que la solución de la homogénea contiene un monomio de grado cero, ensayaremos una solución de la forma $(An+B)n = An^2 + Bn$, con lo que se obtiene la ecuación: $A(n+2)^2 + B(n+2) - 3A(n+1)^2 - 3B(n+1) + 2An^2 + 2Bn = 2n + 1$. Desarrollando e identificando coeficientes, se obtiene el sistema:
$$\begin{cases} -2A = 2 \\ A - B = 1 \end{cases} \rightarrow A = -1, B = -2.$$
 Luego la

solución general es :

$$a_n = C_1 + C_2 \cdot 2^n - n^2 - 2n$$

b) Obténgase la asignación inicial para el siguiente problema del transporte e indíquese si es una solución óptima

	D	10	6	9
O				
16	1	2	5	
9	3	1	1	

Solución.-

Obtenemos una primera solución factible por el método de la esquina noroeste.

<div>D \ O</div>	10	6	9
16	<div>1 / 10</div>	<div>2 / 6</div>	<div>5 / 0</div>
9	<div>3 / 0</div>	<div>1 / 0</div>	<div>1 / 9</div>

El dual proporciona el sistema:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 1 \\ u_1 + v_2 = 2 \\ u_2 + v_3 = 1 \end{cases} \text{ una solución del cual es } \begin{cases} u_1 = 0 & v_1 = 1 \\ u_2 = 0 & v_2 = 2 \\ v_3 = 1 \end{cases}$$

		1	2	1
	D	10	6	9
O				
0	16	1 10	2 6	5 0
0	9	3 0	1 0	1 9

No existe ninguna diferencia $u_i + v_j - c_{ij}$ que sea positiva. Por tanto, la solución es óptima. Se tiene: $x_{11} = 10, x_{12} = 6, x_{13} = 0, x_{21} = 0, x_{22} = 0, x_{23} = 9$ y el valor mínimo:

$$1 \cdot 10 + 2 \cdot 6 + 5 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 9 = 31$$

2. a) Escribese el dual del siguiente problema de programación lineal.

$$\text{Minimizar } z = 8x + 16y$$

$$\text{s.a.} \begin{cases} x + 2y \geq 2 \\ x + 5y \geq 3 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Solución.-

La matriz del problema es $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 8 & 16 & * \end{pmatrix}$ cuya transpuesta $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 2 & 5 & 16 \\ 2 & 3 & * \end{pmatrix}$, luego el dual se

formularía:

$$\text{Maximizar } w = 2u + 3v$$

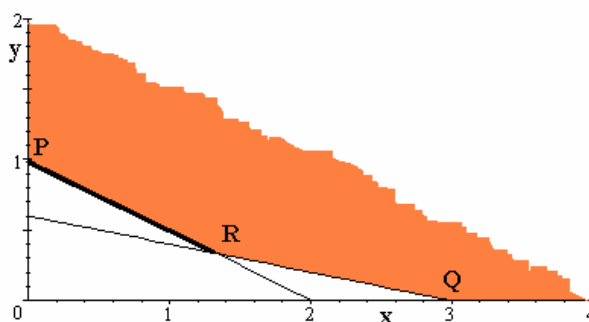
$$\text{s.a.} \begin{cases} u + v \leq 8 \\ 2u + 5v \leq 16 \\ u \geq 0, v \geq 0 \end{cases}$$

b) Resuélvase el problema anterior por el método gráfico.

La región factible (no acotada), representada en la figura, tiene por vértices los puntos $P(0, 1)$, $Q(3, 0)$ y $R\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$. El valor de z

en cada uno de los vértices es, respectivamente, $z_P = 16$, $z_Q = 24$, $z_R = \frac{48}{3} = 16$. Luego la función

z toma el valor mínimo en todos los puntos del segmento PR (Obsérvese que la función objetivo tiene la misma pendiente que la frontera $x + 2y = 2$).



Problemas

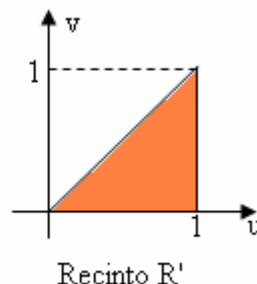
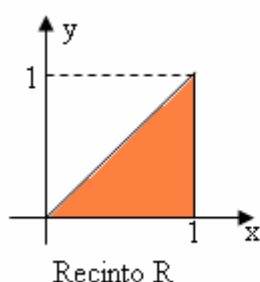
1. Calcúlese la integral

$$\iint_A \frac{dx dy}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

extendida al dominio $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$, mediante el cambio de variable $x = u^2$, $y = v^2$.

Solución.-

Para que el cambio de variable sea biyectivo tomaremos $u \geq 0$, $v \geq 0$, con lo que el recinto $R' = \{(u, v) / 0 \leq u^2 \leq 1; 0 \leq v^2 \leq u^2\} = \{(u, v) / 0 \leq u \leq 1; 0 \leq v \leq u\}$, luego tiene la misma forma que R .



El jacobiano: $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 2u & 0 \\ 0 & 2v \end{vmatrix} = 4uv.$

Luego la integral queda:
$$I = 4 \int_0^1 u du \int_0^u \frac{v}{u+v} dv = 4 \int_0^1 u du \int_0^u \left(1 - \frac{u}{u+v}\right) dv =$$
$$= 4 \int_0^1 u du [v - u \ln(u+v)]_0^u = 4 \int_0^1 u du (u - u \ln(2u) + u \ln u) = 4 \int_0^1 u^2 (1 - \ln 2) du = 4(1 - \ln 2) \left[\frac{u^3}{3} \right]_0^1 =$$
$$= \frac{4}{3} (1 - \ln 2)$$

2. Encontrar un factor integrante $\mu = \mu(y)$ y resolver la ecuación
 $ydx + (2x - ye^y)dy = 0.$

Solución.-

Se verifica que $\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} = \frac{1}{y} \rightarrow \ln \mu = \ln y \rightarrow \mu = y$, con lo que la ecuación:

$$y^2 dx + (2xy - y^2 e^y) dy = 0$$

es exacta. Se tendrá: $\int y^2 dx = y^2 x + C(y)$, y derivando respecto de y : $2xy + C'(y) = 2xy - y^2 e^y$
 $\rightarrow C'(y) = -y^2 e^y \rightarrow C(y) = -\int y^2 e^y dy = (\text{por partes}) = -y^2 e^y + 2 \int y e^y dy =$
 $-y^2 e^y + 2[y e^y - \int e^y dy] = -y^2 e^y + 2y e^y - 2e^y - C.$ Así pues, la solución general sería:

$$y^2 x - y^2 e^y + 2y e^y - 2e^y = C$$