



## MATEMÁTICAS III (ECONOMÍA) COD. 43204 Septiembre 2007.

### Cuestiones.-

1. Dado el problema de programación lineal

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4$$

$$\text{s.a. } x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \leq 10$$

$$2x_1 + x_3 - 2x_4 \geq 6$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 - 5x_4 \leq 7$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

escribalo en forma estándar.

(1 punto)

### Solución.-

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4$$

$$\text{s.a. } x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 10$$

$$2x_1 + x_3 - 2x_4 - x_6 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 - 5x_4 + x_7 = 7$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0; x_5 \geq 0; x_6 \geq 0; x_7 \geq 0$$

2. Para el problema de la cuestión anterior, obténgase su problema dual. (1 punto)

### Solución.-

El problema de la cuestión anterior puede escribirse:

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4$$

$$\text{s.a. } x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \leq 10$$

$$-2x_1 - x_3 + 2x_4 \leq -6$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 - 5x_4 \leq 7$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0$$

El problema dual sería:

$$\text{Minimizar } f = 10u - 6v + 7w$$

$$\text{s.a. } u - 2v + w \geq 5$$

$$u + 2w \geq 4$$

$$-u - v - w \geq 3$$

$$u + 2v - 5w \geq -1$$

$$u \geq 0, v \geq 0, w \geq 0$$

3. Interpretese la siguiente tabla del simplex:

	$p_1$	$p_2$	$p_3$				
	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	1
$p_2$	0	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	1
$p_1$	1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
	0	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3	2

(1 punto)

### Solución.-

Se trata de una tabla terminal puesto que no hay indicadores negativos. El valor óptimo es 2, que corresponde al punto (1, 1, 0).

4. Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$u_{n+2} - 7u_{n+1} + 6u_n = 0 \quad (1 \text{ punto})$$

**Solución.-**

La ecuación  $x^2 - 7x + 6 = 0$  tiene las soluciones  $x_1 = 6$ ,  $x_2 = 1$ , luego la solución de la ecuación en diferencias es:

$$u_n = C_1 \cdot 6^n + C_2$$

### Problemas

1. Dada la integral doble

$$\iint_A \frac{dx dy}{x^2 + y^2}$$

siendo A el dominio definido por

$$A = \{(x, y) / 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9, x \geq y, x \geq 0\}$$

se pide:

- Dibujar el dominio de integración.
- Hacer un cambio a coordenadas polares y dibujar el nuevo dominio.
- Calcular la integral.

(3 puntos)

**Solución.-**

a) Se trata del sector de segmento circular comprendido entre las circunferencias  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $x^2 + y^2 = 9$ , incluido en el semiplano  $x \geq 0$ , y tal que  $y \leq x$ . (Figura 1)

b) Efectuado el cambio a coordenadas polares:

$$x = \rho \cos \alpha$$

$$y = \rho \sin \alpha$$

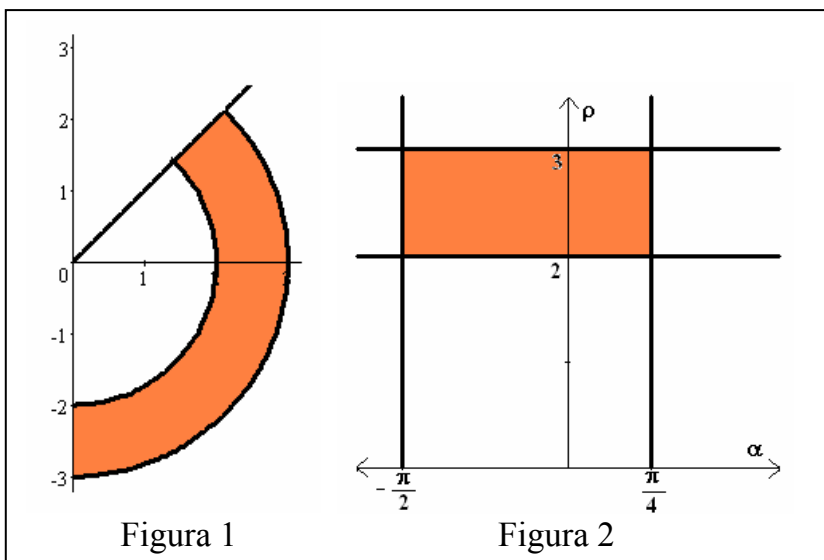
el dominio sería

$$A' = \{(\alpha, \rho) / -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}, 2 \leq \rho \leq 3\}$$

(Figura 2)

c) En polares, teniendo en cuenta que  $x^2 + y^2 = \rho^2$ , y que el jacobiano de la transformación es  $\rho$ :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} d\alpha \int_2^3 \frac{1}{\rho} d\rho = [\alpha]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} [\ln \rho]_2^3 = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)(\ln 3 - \ln 2) = \frac{3\pi}{4} \ln \frac{3}{2}$$





2. La ecuación diferencial  $(x^2 + y)dx - xdy = 0$  admite un factor integrante dependiente sólo de la variable x.

a) Obtégase la expresión genérica de un factor de este tipo y particularizar para la ecuación dada.

b) Compruébese que el factor encontrado convierte la ecuación anterior en exacta.

c) Resuélvase la ecuación.

(3 puntos)

**Solución.-**

a) Si la ecuación diferencial  $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$  admite un factor integrante  $\mu$  que dependa sólo de x, entonces la ecuación diferencial  $\mu P(x,y)dx + \mu Q(x,y)dy = 0$  será exacta por lo

que:  $\mu \frac{\partial P}{\partial y} = \mu' Q + \mu \frac{\partial Q}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{\mu'}{\mu} = \frac{1}{Q} \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \Leftrightarrow \ln \mu = \int \frac{1}{Q} \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx \Leftrightarrow \mu = e^{\int \frac{1}{Q} \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx}$ .

Para la ecuación propuesta se tendrá:  $\mu = e^{\int \frac{-1}{x} dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$ .

b) Multiplicando por el factor integrante, la ecuación quedaría:  $\frac{x^2 + y}{x^2} dx - \frac{1}{x} dy = 0$ .

Se tiene que  $\frac{\partial \frac{x^2 + y}{x^2}}{\partial y} = \frac{1}{x^2} = \frac{\partial \left( -\frac{1}{x} \right)}{\partial x}$ , luego es diferencial exacta.

c) Sea  $f(x,y) = \int \frac{x^2 + y}{x^2} dx = \int \left( 1 + \frac{y}{x^2} \right) dx = x - \frac{y}{x} + C(y)$ . Derivando respecto de y:

$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{x} + C'(y) \rightarrow -\frac{1}{x} + C'(y) = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow C'(y) = 0 \Leftrightarrow C(y) = K$ . Luego la solución general:

$$f(x,y) = x - \frac{y}{x} + K = 0$$