



MATEMÁTICAS III (ECONOMÍA) COD. 43204 Septiembre 2007. Reserva Cuestiones.-

1. Resuélvase la siguiente integral euleriana $\int_0^{\infty} x^{7/2} e^{-x} dx$. (1 punto)

Solución.-

Sabiendo que $\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx \rightarrow \int_0^{\infty} x^{7/2} e^{-x} dx = \Gamma\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{105\sqrt{\pi}}{16}$

2. Estúdiese la convergencia de la siguiente integral impropia $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$. (1 punto)

Solución.-

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \int_h^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{h \rightarrow 0^+} [2\sqrt{x}]_h^1 = \lim_{h \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{h}) = 2$. La integral es convergente.

3. Inviértase el orden de integración para:

$$\int_0^1 \int_{2x^2}^{2x} f(x, y) dy dx \quad (1 \text{ punto})$$

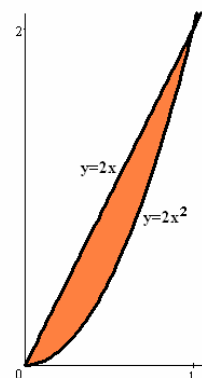
Solución.-

Podemos escribir el recinto de integración: $\left. \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ 2x^2 \leq y \leq 2x \end{array} \right\}$ cuya

representación gráfica es la figura adjunta. También podríamos escribirlo:

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq y \leq 2 \\ \frac{y}{2} \leq x \leq \sqrt{\frac{y}{2}} \end{array} \right\}$$

con lo que la integral sería: $\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{\frac{y}{2}}} f(x, y) dx dy$



4. Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$u_{n+2} - 10u_{n+1} + 21u_n = 0 \quad (1 \text{ punto})$$

Solución.-

De la ecuación característica $x^2 - 10x + 21 = 0$ obtenemos las soluciones $x_1 = 3$, $x_2 = 7$, luego la solución de la ecuación en diferencias es:

$$u_n = C_1 \cdot 3^n + C_2 \cdot 7^n$$

Problemas

1. La ecuación diferencial

$$(2xy^4 e^y + 2xy^3 + y) dx + (x^2 y^4 e^y - x^2 y^2 - 3x) dy = 0$$

admite un factor integrante dependiente sólo de la variable y .

a) Obténgase la expresión genérica de un factor de este tipo y particularizar para la ecuación dada.



b) Compruébese que el factor encontrado convierte la ecuación anterior en exacta

c) Resuélvase la ecuación.

(3 puntos)

Solución.-

a) Si la ecuación diferencial $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ admite un factor integrante μ que dependa sólo de y , entonces la ecuación diferencial $\mu P(x,y)dx + \mu Q(x,y)dy = 0$ será exacta por lo que: $\mu \frac{\partial Q}{\partial x} = \mu' P + \mu \frac{\partial P}{\partial y} \Leftrightarrow \frac{\mu'}{\mu} = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \Leftrightarrow \ln \mu = \int \frac{1}{P} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy \Leftrightarrow \mu = e^{\int \frac{1}{P} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy}$. Para

la ecuación propuesta se tendrá, después de simplificar: $\mu = e^{\int \frac{-4}{y} dy} = e^{\ln y^{-4}} = \frac{1}{y^4}$

b) Multiplicando por el factor integrante, la ecuación quedaría:

$$\left(2xe^y + \frac{2x}{y} + \frac{1}{y^3} \right) dx + \left(x^2 e^y - \frac{x^2}{y^2} - \frac{3x}{y^4} \right) dy = 0$$

Se tiene que $\frac{\partial \left(2xe^y + \frac{2x}{y} + \frac{1}{y^3} \right)}{\partial y} = 2xe^y - \frac{2x}{y^2} - \frac{3}{y^4} = \frac{\partial \left(x^2 e^y - \frac{x^2}{y^2} - \frac{3x}{y^4} \right)}{\partial x}$, luego es diferencial exacta.

c) Sea $f(x,y) = \int \left(2xe^y + \frac{2x}{y} + \frac{1}{y^3} \right) dx = x^2 e^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} + C(y)$. Derivando respecto de y :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 e^y - \frac{x^2}{y^2} - \frac{3x}{y^4} + C'(y) \rightarrow x^2 e^y - \frac{x^2}{y^2} - \frac{3x}{y^4} + C'(y) = x^2 e^y - \frac{x^2}{y^2} - \frac{3x}{y^4} \Leftrightarrow C'(y) = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow C(y) = K$. Luego la solución general:

$$f(x,y) = x^2 e^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} + K = 0$$

2. Resuélvase por el método simplex el siguiente problema de programación lineal:

$$\text{Maximizar } z = 4x_1 - 2x_2 - x_3$$

$$s.a. \quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 3$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4$$

$$x_1 - x_2 \leq 0$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

(3 puntos)

Solución.-

De la tabla inicial:

1	1	1	1	0	0	3
2	2	1	0	1	0	4
1	-1	0	0	0	1	0
-4	2	1	0	0	0	0

obtenemos las tablas sucesivas:



P_1							P_2							
P_1	0	2	1	1	0	-1	3	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	1
	0	4	1	0	1	-2	4	0	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	1
	1	-1	0	0	0	1	0	1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
	0	-2	1	0	0	4	0	0	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3	2

La última tabla ya es terminal y muestra el máximo valor 2, en el punto (1, 1, 0).