

## MATEMÁTICAS III (ECONOMÍA) COD. 43204 Febrero 2008. 1ª semana

### Cuestiones:

1. a) Demuéstrese que  $\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi$  usando la expresión trigonométrica de la función beta.

Usar este resultado para comprobar que  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ . (1 punto)

- b) Estudiar la convergencia de la siguiente integral  $\int_{-\infty}^0 \frac{3}{x^2 - 7x + 10} dx$ . (1 punto)

### Solución.-

a) La expresión trigonométrica de la función  $\beta(p, q) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1} x \cdot \cos^{2q-1} x \cdot dx$ .

Sustituyendo  $p = q = \frac{1}{2}$  queda:  $\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x \cdot \cos^0 x \cdot dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = 2[x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$ .

Tendremos entonces que  $\pi = \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)} = \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2$ , luego  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ .

b) Puesto que el denominador del integrando se anula para  $x = 2$  y  $x = 5$ , escribiremos la integral:

$$\int_0^{\infty} \frac{3}{x^2 - 7x + 10} dx = \int_0^2 \frac{3}{x^2 - 7x + 10} dx + \int_2^5 \frac{3}{x^2 - 7x + 10} dx + \int_5^{\infty} \frac{3}{x^2 - 7x + 10} dx$$

Descompongamos el integrando en suma de fracciones simples:

$\frac{3}{x^2 - 7x + 10} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-5} = \frac{(A+B)x - 5A - 2B}{x^2 - 7x + 10}$ , de donde  $\begin{cases} A+B=0 \\ -5A-2B=3 \end{cases}$ , sistema que resuelto da  $A = -1$ ,  $B = 1$ . Entonces, la primera de las integrales:

$$\int_0^2 \frac{3}{x^2 - 7x + 10} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2-\varepsilon} \left( \frac{-1}{x-2} + \frac{1}{x-5} \right) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \ln \left| \frac{x-5}{x-2} \right| \right]_0^{2-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \ln \left| \frac{-3-\varepsilon}{-\varepsilon} \right| - \ln \frac{5}{2} \right) = \infty.$$

Luego la integral dada es divergente.

2. a) Escribese la integral resultante al cambiar el orden de integración de la siguiente integral

$$\int_0^4 \int_{\frac{3}{4}x}^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y) dy dx \quad (1 \text{ punto})$$

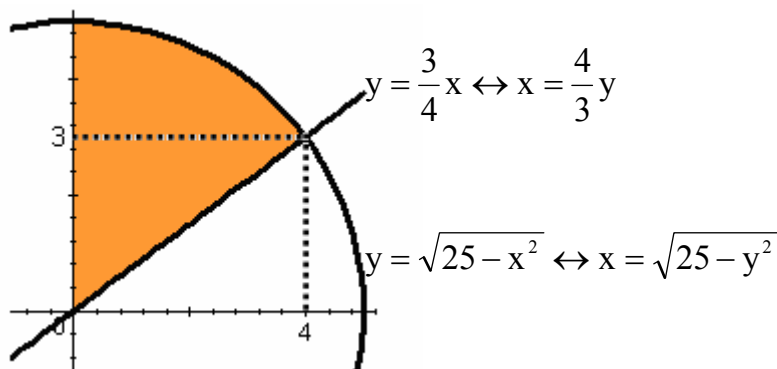
- b) Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas

$$u_{n+3} - 9u_{n+2} + 27u_{n+1} - 27u_n = 0. \quad (1 \text{ punto})$$

### Solución.-

a) El recinto de integración es el sector de círculo  $x^2 + y^2 \leq 25$  (de centro (0,0) y radio

5), comprendido entre las rectas  $y = \frac{3}{4}x$ ,  $y = x = 0$ :



Dividimos el recinto en dos partes como se indica en la figura.

En la inferior,  $0 \leq y \leq 3$ , mientras que, para un  $y$  fijo,  $0 \leq x \leq \frac{4}{3}y$ .

En la superior,  $3 \leq y \leq 5$ , mientras que, para un  $y$  fijo,  $0 \leq x \leq \sqrt{25 - y^2}$ .

La integral entonces sería:

$$\int_0^3 \int_0^{\frac{4}{3}y} f(x, y) dx dy + \int_3^5 \int_0^{\sqrt{25-y^2}} f(x, y) dx dy$$

b) La ecuación característica  $r^3 - 9r^2 + 27r - 27 = 0 \Leftrightarrow (r - 3)^3 = 0$ , luego la solución general sería:

$$u_n = (C_1 + C_2 \cdot n + C_3 \cdot n^2) 3^n$$

### Problemas:

1. Resuélvase la siguiente ecuación diferencial

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 2e^x + 1.$$

(3 puntos)

### Solución.-

La ecuación característica  $r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0 \Leftrightarrow (r - 1)^3 = 0$ , luego la solución general de la ecuación homogénea será:

$$y_1 = (C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot x^2) e^x$$

Como solución particular de la ecuación completa ensayaremos una función de la forma  $y_2 = Ax^3 e^x + B \rightarrow y_2' = (Ax^3 + 3Ax^2) e^x \rightarrow y_2'' = (Ax^3 + 6Ax^2 + 6Ax) e^x \rightarrow y_2''' = (Ax^3 + 9Ax^2 + 18Ax + 6A) e^x$ .

Sustituyendo en la ecuación propuesta:

$$(Ax^3 + 9Ax^2 + 18Ax + 6A) e^x - 3(Ax^3 + 6Ax^2 + 6Ax) e^x + 3(Ax^3 + 3Ax^2) e^x - Ax^3 e^x - B = 2e^x + 1$$

Simplificando:  $6Ae^x - B = 2e^x + 1$ , de donde  $A = \frac{1}{3}$ ;  $B = -1$ .

Luego la solución general de la ecuación propuesta será:

$$y = (C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot x^2) e^x + \frac{1}{3} x^3 e^x - 1$$

2. Resuélvase el siguiente problema de programación lineal por el método simplex:

$$\text{Maximizar } z = 2x + 3y$$

$$s.a. \begin{cases} x + y \leq 5 \\ 2x + 5y \leq 19 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

(3 puntos)

**Solución.-**

De la tabla inicial:

1	1	1	0	5
2	5	0	1	19
-2	-3	0	0	0

obtenemos las tablas sucesivas:

	P <sub>1</sub>						P <sub>1</sub> P <sub>2</sub>					
P <sub>1</sub>	1	1	1	0	5	P <sub>1</sub>	1	0	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2	
	0	3	-2	1	9		P <sub>2</sub>	0	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	3
	0	-1	2	0	10			0	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	13

La última tabla ya es terminal y muestra el máximo valor 13, en el punto (2, 3).