

## MATEMÁTICAS III (ECONOMÍA) COD. 43204 Febrero 2008. 2ª semana

### Cuestiones:

1. a) Resuélvase la siguiente integral euleriana

$$\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \sqrt[5]{\sin^7 x} dx. \quad (1 \text{ punto})$$

b) Estudiar la convergencia de la siguiente integral  $\int_0^2 \frac{3}{x^2 - 7x + 10} dx$ . (1 punto)

### Solucion.-

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \int_0^{\pi/2} \cos^3 x \sqrt[5]{\sin^7 x} dx &= \frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^{\pi/2} \cos^3 x \sin^{7/5} x dx = \frac{1}{2} \beta\left(2, \frac{6}{5}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(2) \Gamma\left(\frac{6}{5}\right)}{\Gamma\left(\frac{16}{5}\right)} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{5} \Gamma\left(\frac{1}{5}\right)}{\frac{11}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{5} \Gamma\left(\frac{1}{5}\right)} = \frac{25}{132} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \text{El integrando se descompone en suma de fracciones simples: } \frac{3}{x^2 - 7x + 10} &= \\ &= \frac{-1}{x-2} + \frac{1}{x-5}. \end{aligned}$$

La integral:  $\int_0^2 \frac{-1}{x-2} dx = -\lim_{\epsilon \rightarrow 2} [\ln|x-2|]_0^\epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 2} (\ln|\epsilon-2|) - \ln 2 = -\infty$ , luego la integral propuesta es divergente.

2. a) Escribese la integral resultante al cambiar el orden de integración de la siguiente integral

$$\int_0^3 \int_{x^2}^{3x} [f(x, y) dy] dx. \quad (1 \text{ punto})$$

b) Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas

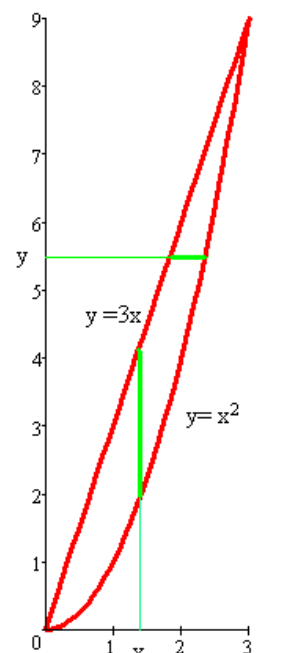
$$u_{n+2} - 4u_{n+1} + 8u_n = 0. \quad (1 \text{ punto})$$

### Solución.-

a)  $x \in [0, 3]$  y, para un  $x$  fijo,  $x^2 \leq y \leq 3x$ , luego el recinto de integración podemos verlo en la figura adjunta. Fijado  $y$  se cumple que

$0 \leq y \leq 9$  ;  $\frac{y}{3} \leq x \leq \sqrt{y}$ , luego la integral sería:

$$\int_0^9 \int_{\frac{y}{3}}^{\sqrt{y}} [f(x, y) dx] dy$$



b) La ecuación característica es  $r^2 - 4r + 8 = 0$  cuyas soluciones son  $2 \pm 2i = \sqrt{8} \left( \cos \frac{\pi}{4} \pm i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right)$ , luego la solución de la ecuación en diferencias es:

$$u_n = (\sqrt{8})^n \left( C_1 \cos \frac{n\pi}{4} + C_2 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{4} \right)$$

## PROBLEMAS

1. Dada la ecuación diferencial

$$y'' + 2y' + y = e^{-x}$$

resuélvase por el método de variación de constantes y por el método de tanteo.

(3 puntos)

### Solución.-

-Por el método de variación de las constantes:

Resolvamos en primer lugar la ecuación homogénea.

La ecuación característica  $r^2 + 2r + 1 = 0$  tiene la solución doble  $r = -1$ , luego la solución general de la homogénea es  $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$ .

Suponiendo ahora  $C_1$  y  $C_2$  funciones de  $x$ , derivando:

$$y' = C_1' e^{-x} - C_1 e^{-x} + C_2' x e^{-x} + C_2 e^{-x} - C_2 x e^{-x}.$$

Hacemos  $C_1' e^{-x} + C_2' x e^{-x} = 0$  (I)  $\rightarrow y' = -C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x} - C_2 x e^{-x}$ . Derivando:

$y'' = -C_1' e^{-x} + C_1 e^{-x} + C_2' e^{-x} - C_2 e^{-x} - C_2' x e^{-x} - C_2 e^{-x} + C_2 x e^{-x} =$  (teniendo en cuenta (I))  $= C_1 e^{-x} + C_2' e^{-x} - 2C_2 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$ . Sustituyendo en la ecuación:

$$C_1 e^{-x} + C_2' e^{-x} - 2C_2 e^{-x} + C_2 x e^{-x} - 2C_1 e^{-x} + 2C_2 e^{-x} - 2C_2 x e^{-x} + C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} = e^{-x}$$

Simplificando, se obtiene que  $C_2' = 1$ , luego tenemos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} C_1' + C_2' x = 0 \\ C_2' = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} C_2 = x + K_2 \\ C_1' = -x \rightarrow C_1 = -\frac{1}{2} x^2 + K_1 \end{array} \right\}$$

Así pues, la solución general de la ecuación dada es:

$$y = \left( -\frac{1}{2} x^2 + K_1 \right) e^{-x} + (x + K_2) x e^{-x} = K_1 e^{-x} + K_2 x e^{-x} + \frac{1}{2} x^2 e^{-x}.$$

- Por el método de tanteo:

Puesto que la solución de la ecuación característica es doble, ensayaremos como solución particular de la ecuación completa una solución de la forma  $y = kx^2 e^{-x}$ .

Derivando:

$$y' = 2kx e^{-x} - kx^2 e^{-x};$$

$$y'' = 2k e^{-x} - 2kx e^{-x} - 2kx e^{-x} + kx^2 e^{-x} = 2k e^{-x} - 4kx e^{-x} + kx^2 e^{-x}$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$2k e^{-x} - 4kx e^{-x} + kx^2 e^{-x} + 4kx e^{-x} - 2kx^2 e^{-x} + kx^2 e^{-x} = e^{-x} \Leftrightarrow 2k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$$

Luego la solución general de la ecuación dada es:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + \frac{1}{2} x^2 e^{-x}.$$

2. Resuélvase el siguiente problema de programación lineal por el método simplex:

$$\text{Minimizar } z = 8x + 16y$$

$$\text{s.a.} \begin{cases} x + 2y \geq 2 \\ x + 5y \geq 3 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

(3 puntos)

**Solución.-**

Escribimos el problema dual:

$$\text{Maximizar } w = 2u + 3v$$

$$\text{s.a.} \begin{cases} u + v \leq 8 \\ 2u + 5v \leq 16 \\ u \geq 0, v \geq 0 \end{cases}$$

De la tabla inicial:

1	1	1	0	8
2	5	0	1	16
-2	-3	0	0	0

obtenemos las tablas sucesivas:

		P <sub>2</sub>						P <sub>1</sub> P <sub>2</sub>					
		3	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{24}{5}$	P <sub>1</sub>	1	0	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$	8	
		5			$\frac{1}{5}$	$\frac{16}{5}$				$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	
P <sub>2</sub>		$\frac{2}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{16}{5}$	P <sub>2</sub>	0	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	
		$-\frac{4}{5}$	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{48}{5}$				$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	16	
		5			$\frac{1}{5}$	$\frac{16}{5}$				$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$		

La última tabla ya es terminal y muestra la solución del problema primal: el mínimo valor 16, en el punto  $\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$ .