

MATEMÁTICAS III (ECONOMÍA) COD. 43204 Septiembre 2008.

Cuestiones:

1. a) Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas

$$u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = n. \quad (1 \text{ punto})$$

- b) Estudiar la convergencia de la siguiente integral $\int_e^\infty \frac{dx}{x \lg^2 x}$.

Nota: $\lg x$ se refiere al logaritmo neperiano. (1 punto)

Solución.-

- a) La ecuación característica es $r^2 - r + 1 = 0$ cuyas soluciones son $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{\pi}{3} \pm i \sin \frac{\pi}{3}$, luego la solución general de la ecuación homogénea es:

$$u_n = C_1 \cos \frac{n\pi}{3} + C_2 \sin \frac{n\pi}{3}$$

Una solución particular de la ecuación completa será de la forma $An + B$. Sustituyendo en la ecuación: $A(n+2) + B - A(n+1) - B + An + B = n \Leftrightarrow An + A + B = n \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$.

Luego la solución general de la ecuación dada es :

$$u_n = C_1 \cos \frac{n\pi}{3} + C_2 \sin \frac{n\pi}{3} + n - 1$$

- b) Efectuamos el cambio de variable $\log x = t$, de donde $x = e^t$; $dx = e^t dt$; si $x = e \rightarrow t = 1$; si $x = \infty \rightarrow t = \infty$, luego la integral queda $\int_1^\infty \frac{e^t dt}{e^t t^2} = \int_1^\infty \frac{dt}{t^2}$ que es una integral convergente. Su valor: $\int_1^\infty \frac{dt}{t^2} = \lim_{u \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{t} \right]_1^u = 0 + 1 = 1$

2. Dada $\iint_A f(x, y) dx dy$ siendo $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = x^2, y = 2x^2, y^2 = x, y^2 = 2x\}$ y el cambio de variable $x^2 = uy, y^2 = vx$, se pide:

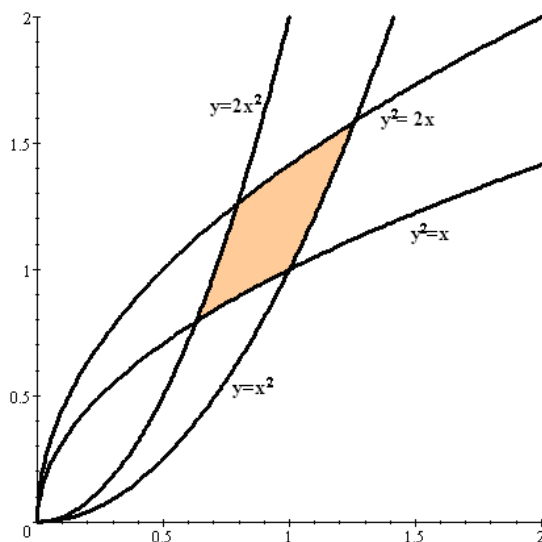
- a) Represéntese la región A y la región A' que se obtendría con el cambio de variable. (1 punto)
- b) Exprésese la integral anterior una vez realizado el cambio de variable. (1 punto)

Solución.-

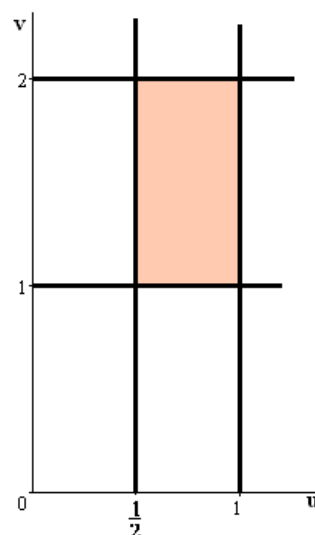
- a) Efectuado el cambio, la región A' quedaría:

$$A' = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 / u = 1, u = \frac{1}{2}, v = 1, v = 2 \right\}$$

Las representaciones gráficas:



Región A



Región A'

b) Resolvemos el sistema $\begin{cases} x^2 = uy \\ y^2 = vx \end{cases}$ para despejar x e y, obteniéndose que $\begin{cases} x = (u^2 v)^{\frac{1}{3}} \\ y = (uv^2)^{\frac{1}{3}} \end{cases}$

de donde el jacobiano: $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}u^{\frac{2}{3}}v^{-\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{2}{3}} & \frac{2}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}} \end{vmatrix} = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$. Luego la integral sería:

$$\frac{1}{3} \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_1^2 f\left((u^2 v)^{\frac{1}{3}}, (uv^2)^{\frac{1}{3}}\right) dv du$$

Problemas:

1. Dada la ecuación diferencial

$$(y + \lg x) dx - x dy = 0,$$

encuéntrese un factor integrante de la forma $\mu = \mu(x)$ y resuélvase la ecuación.

Nota: $\lg x$ se refiere al logaritmo neperiano.

(3 puntos)

Solución.-

Se cumplirá que $\frac{\partial}{\partial y} \mu(y + \lg x) = \frac{\partial}{\partial x} \mu(-x) \Leftrightarrow \mu = -\mu'x - \mu \Leftrightarrow \frac{\mu'}{\mu} = -\frac{2}{x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lg \mu = \lg x^{-2} \Leftrightarrow \mu = x^{-2}$. Así pues:

$$\frac{y + \lg x}{x^2} dx - \frac{1}{x} dy = 0$$

es diferencial exacta. Tendremos: $f(x,y) = \int -\frac{1}{x} dy = -\frac{y}{x} + C(x)$; derivando respecto de x e

igualando a $\frac{y + \lg x}{x^2}$ se tendrá: $\frac{y}{x^2} + C'(x) = \frac{y + \lg x}{x^2} \Leftrightarrow C'(x) = \frac{\lg x}{x^2}$. Integrando por partes:

$C(x) = \frac{-\lg x}{x} + \int \frac{1}{x^2} dx = \frac{-\lg x}{x} - \frac{1}{x} + C$. Luego la solución de la ecuación es:

$$-\frac{y}{x} - \frac{1+\lg x}{x} = -C \leftrightarrow \frac{y+1+\lg x}{x} = C$$

2. Resuélvase el siguiente problema de programación lineal por el método simplex:

$$\text{Minimizar } z = 6x + 8y$$

$$\text{s.a.} \begin{cases} 3x + 2y \geq 18 \\ 5x - y \geq 17 \\ 2x - y \geq 2 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

(3 puntos)

Solución.-

Escribimos el problema dual:

$$\text{Maximizar } w = 18u + 17v + 2w$$

$$\text{s.a.} \begin{cases} 3u + 5v + 2w \leq 6 \\ 2u - v - w \leq 8 \\ u \geq 0, v \geq 0, w \geq 0 \end{cases}$$

De la tabla inicial:

3	5	2	1	0	6
2	-1	-1	0	1	8
-18	-17	-2	0	0	0

obtenemos:

P ₁						
P ₁	1	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	2
	0	$-\frac{13}{3}$	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	4
	0	13	10	6	0	36

La tabla ya es terminal y muestra la solución del problema primal: el mínimo valor 36, en el punto (6,0).