

## MATEMÁTICAS III (ECONOMÍA) COD. 43204 Septiembre 2008. Reserva

### Cuestiones:

1.a) Obténgase el dual del siguiente problema de programación lineal

$$\text{Minimizar } u = x + 7y + 2z$$

$$\text{s.a.} \begin{cases} 7x + 3y + 5z \geq 9 \\ 4x + 8y - z \leq 10 \\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \end{cases} \quad (1 \text{ punto})$$

b) Obténgase la tabla inicial del simplex para el problema anterior. (1 punto)

### Solución.-

a)

El problema escrito matricialmente:  $\begin{pmatrix} 7 & 3 & 5 & 9 \\ -4 & -8 & 1 & -10 \\ 1 & 7 & 2 & * \end{pmatrix}$ , cuya matriz transpuesta

$\begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 \\ 3 & -8 & 7 \\ 5 & 1 & 2 \\ 9 & -10 & * \end{pmatrix}$  proporciona el problema dual:

$$\text{Maximizar } w = 9u - 10v$$

$$\text{s.a.} \begin{cases} 7u - 4v \leq 1 \\ 3u - 8v \leq 7 \\ 5u + v \leq 2 \end{cases}$$

b)

7	-4	1	0	0	1
3	-8	0	1	0	7
5	1	0	0	1	2
-9	10	0	0	0	0

2. a) Dado el problema de programación lineal

$$\text{Maximizar } z = x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

$$\text{s.a.} \begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 6 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Cuya tabla final viene dada por

	$p_1$	$p_2$	$p_3$			
	-1	0	1	-1	-1	2
$p_2$	2	1	3	0	1	4
	5	0	7	0	3	12

¿Qué se puede concluir de su solución?

(1 punto)

b) Resuélvase la siguiente ecuación en diferencias finitas

$$u_{n+3} - 6u_{n+2} + 11u_{n+1} - 6u_n = 0$$

con las condiciones  $u_1 = 2, u_3 = 20$ .

(1 punto)

**Solución.-**

a) De acuerdo con la tabla final, la solución debería ser (0, 4, 0) y el valor máximo 12. En efecto, el valor que se obtiene de z en ese punto es  $z = 0 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 0 = 12$ . Pero al sustituir el punto (0, 4, 0) en las restricciones vemos que no cumple la primera de ellas, luego el problema no tiene solución.

b) La ecuación característica  $r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$ , tiene las soluciones  $r_1 = 1, r_2 = 2$  y  $r_3 = 3$  luego la solución general de la ecuación en diferencias es:

$$u_n = C_1 + C_2 \cdot 2^n + C_3 \cdot 3^n$$

Para las condiciones dadas: 
$$\left. \begin{aligned} C_1 + 2C_2 + 3C_3 &= 2 \\ C_1 + 8C_2 + 27C_3 &= 20 \end{aligned} \right\} \text{ sistema que, resuelto da } C_1 = 5\lambda - 4,$$

$C_2 = -4\lambda + 3$  y  $C_3 = \lambda$ , con lo que  $u_n$  queda:

$$u_n = 5\lambda - 4 + (-4\lambda + 3)2^n + \lambda 3^n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

**Problemas.-**

1. Dada la integral

$$\iint_A e^{\frac{y}{x+y}} dx dy,$$

siendo A el dominio  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y > 0, x + y \leq 1\}$ , y el cambio de variable  $u = x + y, uv = y$  se pide:

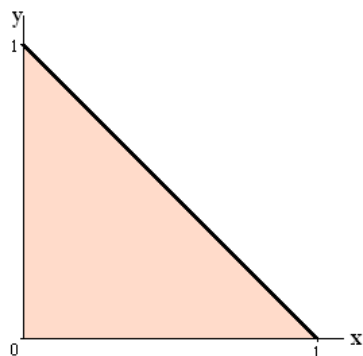
- Representar la región A y su transformada A' al aplicar el cambio de variable.
- Resuélvase la integral.

(3 puntos)

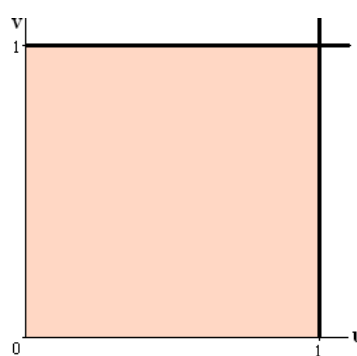
**Solución.-**

a) De las ecuaciones del cambio obtenemos  $\left. \begin{aligned} x &= u - uv \\ y &= uv \end{aligned} \right\}$  luego las restricciones se

transforman en  $u \geq uv \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq v \geq 0$  y  $0 \leq u \leq 1$ . Las representaciones gráficas de A y A' son:



Región A



Región A'

b) El jacobiano  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{vmatrix} = u$ . Así pues la integral queda:

$$\int_0^1 u du \int_0^1 e^v dv = \left[ \frac{u^2}{2} \right]_0^1 \cdot [e^v]_0^1 = \frac{e-1}{2}$$

2. Resuélvase la siguiente ecuación diferencial

$$2xyy' + x^2 - y^2 = 0.$$

**Nota:** Compruébese que se trata de una ecuación homogénea.

(3 puntos)

**Solución.-**

Dividiendo los dos miembros de la ecuación por  $x^2$  queda  $2\left(\frac{y}{x}\right)y' + 1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0$ , que pone de manifiesto que la ecuación es homogénea. Hacemos el cambio  $y = ux \rightarrow y' = u'x + u$ .

Sustituyendo:  $2u(u'x + u) + 1 - u^2 = 0 \Leftrightarrow 2uu'x + 1 + u^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{2u}{1+u^2} du = -\frac{1}{x} dx$ .

Integrando:  $\ln(1+u^2) = \ln \frac{C}{x} \Leftrightarrow 1 + u^2 = \frac{C}{x} \Leftrightarrow u^2 = \frac{C}{x} - 1$ . Deshaciendo el cambio de variable:

$$y^2 = \left( \frac{C}{x} - 1 \right) x^2 \Leftrightarrow y^2 = Cx - x^2$$