

MATEMÁTICAS III (ECONOMÍA) COD. 43204 Enero 2009. A

Cuestiones:

1. a) Calcúlese la siguiente integral Euleriana:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt[4]{\sin x}} dx.$$

Solución.-

Teniendo en cuenta la fórmula $\beta(p,q) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1} x \cdot \cos^{2q-1} x dx$:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt[4]{\sin x}} dx = \frac{1}{2} 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{-1/4} x \cdot \cos x dx = \frac{1}{2} \beta\left(\frac{3}{8}, 1\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{8}\right) \Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{11}{8}\right)} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{8}\right) \Gamma(1)}{\frac{3}{8} \Gamma\left(\frac{3}{8}\right)} = \frac{4}{3}$$

b) Resuélvase la ecuación en diferencias finitas:

$$u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 2^n.$$

Solución.-

La ecuación característica $r^2 - 5r + 6 = 0$, tiene las soluciones 2 y 3, luego la solución general de la ecuación homogénea es:

$$u_n = C_1 2^n + C_2 3^n$$

Como solución particular de la ecuación completa probaremos $u_n = An2^n$. Sustituyendo en la ecuación:

$$A(n+2)2^{n+2} - 5A(n+1)2^{n+1} + 6An2^n = 2^n$$

Dividiendo por 2^n y simplificando, queda:

$$-2A = 1 \leftrightarrow A = -\frac{1}{2}$$

Luego la solución general de la ecuación propuesta es:

$$u_n = C_1 2^n + C_2 3^n - \frac{1}{2} n 2^n$$

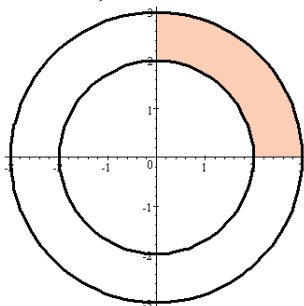
2. Consideremos la corona circular limitada por las circunferencias $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + y^2 = 9$.

a) Dibújese la región que delimitan y plantéese la integral doble que daría como resultado su área en el primer cuadrante.

b) Calcúlese el área usando integrales dobles y cambio a coordenadas polares.

Solución.-

a) Se trata de las circunferencias de centro (0, 0) y radios 2 y 3, respectivamente.



Siendo R el sector de corona circular del primer cuadrante, el área sería $\iint_R dx dy$

b) Si en la integral anterior efectuamos el cambio a polares se tendrá:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_2^3 \rho d\rho = [\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_2^3 = \frac{5\pi}{4}$$

Problemas:

1. Dada la ecuación diferencial

$$y(1+xy)dx - xdy = 0.$$

a) Encuéntrese un factor integrante que sólo dependa de y ($\mu = \mu(y)$).

b) Resuélvase la ecuación usando el factor integrante hallado.

Solución.-

a) Se cumplirá que $\frac{\mu'}{\mu} = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \frac{1}{y(1+xy)} (-1-1-2xy) = \frac{-2(1+xy)}{y(1+xy)} = \frac{-2}{y}$, de

donde, integrando: $\ln \mu = \ln y^{-2} \rightarrow \mu = y^{-2}$.

b) Multiplicando la ecuación por el factor integrante:

$$\left(\frac{1}{y} + x \right) dx - \frac{x}{y^2} dy = 0$$

Tendremos: $F(x,y) = \int \left(\frac{1}{y} + x \right) dx = \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + C(y)$. Derivando respecto de y e

igualando a $-\frac{x}{y^2}$:

$$-\frac{x}{y^2} + C'(y) = -\frac{x}{y^2} \leftrightarrow C'(y) = 0 \quad C(y) = -C$$

Luego la solución general de la ecuación sería:

$$\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = C$$

2. Resuélvase el siguiente problema de programación lineal:

$$\max z = 4x - 2y - z$$

$$s.a. \begin{cases} x + y + z \leq 3 \\ 2x + 2y + z \leq 4 \\ x - y \leq 0 \\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \end{cases}$$

Solución.-

De la tabla inicial:

1	1	1	1	0	0	3
2	2	1	0	1	0	4
1	-1	0	0	0	1	0
-4	2	1	0	0	0	0

obtenemos las tablas sucesivas:

