

MATEMÁTICAS III (ECONOMÍA) COD. 43204 Febrero 2009 B

Cuestiones:

1. a) Expresar en forma canónica de máximo el siguiente problema

$$\begin{aligned} \min z &= 4x + 3y \\ \text{s.a.} \quad &\begin{cases} 7x + 3y \geq 13 \\ 3x + 2y \geq 15 \\ 2x + 5y \geq 14 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

b) Plantéese la tabla inicial del problema del apartado anterior.

Solución.-

a) Maximizar: $13u + 15v + 14w$

s.a.:

$$7u + 3v + 2w \leq 4$$

$$2u + 2v + 5w \leq 3$$

$$u \geq 0, v \geq 0; w \geq 0$$

b)

7	3	2	1	0	4
2	2	5	0	1	3
—	—	—	0	0	0
13	15	14			

2. a) Interpretese la solución del problema de programación lineal dada por la siguiente tabla:

	p_1	p_2	p_3				
p_1	0	3/2	5/2	1	0	-1/2	5
	0	1/2	-13/2	0	1	-3/2	2
	1	1/2	3/2	0	0	1/2	1
	0	1/2	7/2	0	0	5/2	5

b) Resuélvase la ecuación en diferencias finitas

$$u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 2^n.$$

Solución.-

a) Si el problema inicial era de máximo, la tabla significa que el valor máximo es 5 en el punto (1, 0, 0).

Si el problema inicial era de mínimo, la tabla significa que el mínimo es 5 en el punto $\left(0, 0, \frac{5}{2}\right)$.

b) La ecuación característica $r^2 - 5r + 6 = 0$ tiene las soluciones 2 y 3, luego la solución general de la ecuación homogénea es:

$$u_n = C_1 2^n + C_2 3^n$$

Como solución particular de la ecuación completa ensayamos $u_n = An2^n$. Se tiene:

$$u_{n+1} = A(n+1)2^{n+1}; u_{n+2} = A(n+2)2^{n+2}. \text{ Sustituyendo en la ecuación}$$

$$A(n+2)2^{n+2} - 5A(n+1)2^{n+1} + 6An2^n = 2^n \Leftrightarrow -2A = 1 \Leftrightarrow A = -\frac{1}{2}$$

Luego la solución general de la ecuación es :

$$u_n = C_1 2^n + C_2 3^n - \frac{1}{2} n 2^n$$

Problemas:

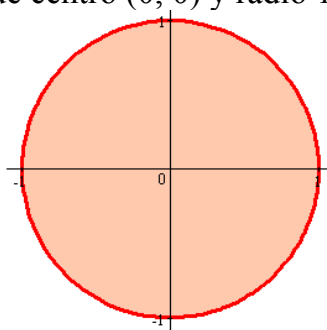
1. Dada la integral $\iint_A \cos(x^2 + y^2) dx dy$ siendo $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$

a) Representar la región A y plantear la integral que debería calcularse en coordenadas cartesianas.

b) Hacer un cambio a coordenadas polares, representar la nueva región y resolver la integral.

Solución.-

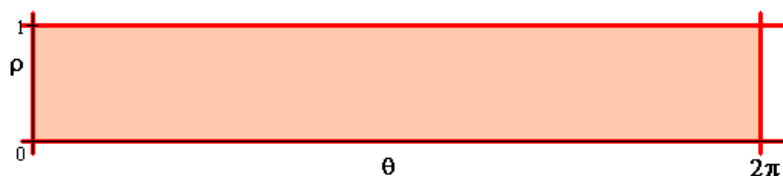
a) La región A es el círculo de centro $(0, 0)$ y radio 1:



La integral sería: $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \cos(x^2 + y^2) dy dx$

b) La región A en coordenadas polares sería $\{(\rho, \theta) / 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$.

Gráficamente:



La integral sería: $\int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho \cos \rho^2 d\theta d\rho = \int_0^1 \rho \cos \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta = \left[\frac{1}{2} \operatorname{sen} \rho^2 \right]_0^1 [\theta]_0^{2\pi} = \pi \operatorname{sen} 1$.

2. Dada la ecuación diferencial

$$(x + y^2) dx - 2xy dy = 0$$

a) Encuéntrese un factor integrante que sólo dependa de x ($\mu = \mu(x)$).

b) Resuélvase la ecuación usando el factor integrante hallado.

Solución.-

a) $\mu = e^{\int \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx} = e^{\int \frac{1}{-2xy} (2y + 2y) dx} = e^{\int \frac{-2}{x} dx} = e^{\ln x^{-2}} = x^{-2}$

b) Multiplicando por el factor integrante, la ecuación queda:

$$\frac{x + y^2}{x^2} dx - \frac{2y}{x} dy = 0$$

Luego $f(x,y) = \int \frac{x+y^2}{x^2} dx = \ln x - \frac{y^2}{x} + C(y) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2y}{x} + C'(y) = \frac{-2y}{x} \rightarrow$
 $\rightarrow C'(y) = 0 \rightarrow C(y) = -C$. Así pues, la solución general de la ecuación es:

$$\ln x - \frac{y^2}{x} = C$$