1. En un estudio (H. Behbahani, Universidad de Florida, 1977) acerca del efecto de la tasa agua/cemento sobre la resistencia del material resultante al cabo de 28 días, se obtuvieron los siguientes datos:

X = Tasa agua/cemento	1,21	1,29	1,37	1,46	1,62	1,79
Y = Resistencia	1,302	1,231	1,061	1,040	0,803	0,711

a) Ajustar un modelo de regresión lineal simple, $y = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$, para explicar la resistencia en función de la tasa agua/cemento.

b) Contrastar la hipótesis $H_0 : \beta_1 \geqslant 0$ frente a $H_1 : \beta_1 < 0$ al nivel $\alpha = 0,05$. Interpretar el resultado.

c) Obtener un intervalo de confianza al 90 % para la resistencia media cuando la tasa agua/cemento es 1,5. ¿Qué ocurriría con la amplitud del intervalo de confianza correspondiente a la tasa 0,3?

1. *a)* En primer lugar queremos ajustar un modelo de regresión lineal simple $y = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$, donde:

$$\hat{\beta}_0 = a = \bar{y} - \frac{\mathrm{cov}_{x,y}}{v_x}\bar{x}; \qquad \hat{\beta}_1 = b = \frac{\mathrm{cov}_{x,y}}{v_x}$$

En nuestro caso:

$$\bar{x} = 1,46; \qquad \bar{y} = 1,02$$

$$v_x = \frac{1}{n}\left[\sum x_i^2 - n\bar{x}^2\right] = 0,029$$

$$v_y = \frac{1}{n}[\sum y_i^2 - n\bar{y}^2] = 0{,}054$$

$$\operatorname{cov}_{x,y} = \frac{1}{n}[\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}] = -0{,}038$$

Por tanto:

$$y = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x = 1{,}02 - \frac{-0{,}038}{0{,}029}(1{,}46) + \frac{-0{,}038}{0{,}029}x = 2{,}93 - 1{,}31x$$

b) Queremos contrastar H_0: $\beta_1 \geq 0$ frente a H_1: $\beta_1 < 0$ al nivel $\alpha = 0{,}05$. Rechazaremos H_0 si se verifica la región de rechazo:

$$R = \left\{ \frac{\hat{\beta}_1}{S_R\sqrt{1/(nv_x)}} < t_{n-2;1-\alpha} \right\}$$

En nuestro caso:

$$S_R^2 = \frac{1}{n-2}\Sigma(y_i - \hat{y}_i)^2 = 0{,}006$$

$$\frac{\hat{\beta}_1}{S_R\sqrt{1/(nv_x)}} = \frac{-1{,}31}{\sqrt{0{,}006}\sqrt{1/(6)(0{,}029)}} = -7{,}055$$

$$t_{n-2;1-\alpha} = t_{4;0{,}95} = -t_{4;0{,}05} = -2{,}132$$

Por tanto, se cumple la condición de la región de rechazo, y nuestra conclusión es:

Rechazamos $H_0 \Rightarrow$ Aceptamos $H_1 \Rightarrow$

Podemos concluir que $\beta_1 < 0$ (al nivel de significación 0,05).

c) El intervalo de confianza al 90% para la resistencia media cuando la tasa agua/cemento es 1,5 es de la forma:

$$I = \left[\hat{y}_0 \pm t_{n-2;\alpha/2} S_R \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{nv_x}} \right] =$$

$$= \left[0{,}965 \pm (2{,}132)\sqrt{0{,}006}\sqrt{\frac{1}{6} + \frac{(1{,}5 - 1{,}46)^2}{(6)(0{,}029)}} \right] =$$

$$= [0{,}965 \pm 0{,}069] = [0{,}896; 1{,}034]$$

$S_R^2 = \frac{1}{n-1}\sum\left(y_i - \hat{y}\right)^2 = 0{,}006$ Como se hace este cálculo

$\hat{y}$ de donde sacamos este resultado