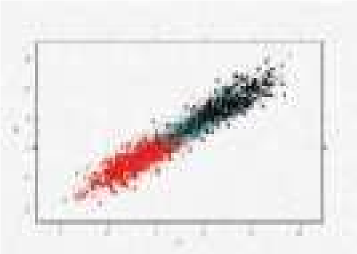
ESTADÍSTICA (SISTEMAS)

Profesores: Hilario Navarro. Jorge Martín



DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA, INVESTIGACIÓN OPERATIVA Y CÁLCULO NUMÉRICO

Tercera unidad didáctica.
Soluciones a los problemas propuestos de Inferencia Estadística

Curso 2004-2005

Problema 1. El tiempo de funcionamiento de ciertos equipos informáticos antes de que comiencen a presentar fallos sistemáticos es una variable aleatoria con distribución normal. Un comprador decide adquirir estos equipos si su tiempo medio de funcionamiento sin fallos es de al menos 5 años. A fin de tomar una decisión, analiza la experiencia de compradores anteriores, observando, para una muestra de 9 equipos, un tiempo medio de funcionamiento sin fallos de 4 años y 6 meses y una cuasivarianza de 1 año.

¿Qué decisión adoptaría en base a la experiencia de estos compradores?

Solución

La muestra de los equipos adquiridos por ciertos compradores en el pasado nos da un tiempo medio de funcionamiento de 4.5 años. Se trata de dilucidar si dicha muestra proporciona suficiente evidencia estadística como para concluir que el tiempo medio de funcionamiento es inferior a 5 años, es decir, que el comprador no debe adquirir los equipos.

El problema se plantea en términos de un contraste de hipótesis en el que la hipótesis nula y alternativa vienen dadas por

$$H_0 : \mu \geq 5 \qquad\qquad H_1 : \mu < 5.$$

Puesto que el tiempo de funcionamiento de los equipos antes de que comiencen a presentar fallos sistemáticos sigue una distribución normal de media y varianza desconocidas, el estadístico de contraste será

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

donde

- μ_0: valor del parámetro media poblacional. En este caso $\mu_0 = 5$.
- $\bar{X}$: media muestral. Para la muestra extraída $\bar{X} = 4.5$.
- S^2: cuasivarianza muestral. Para la muestra obtenida $S^2 = 1$.
- n: tamaño muestral. En este caso $n = 9$.

La región crítica del test viene dada por

$$\mathcal{R} = \left\{ \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} < t_{n-1;1-\alpha} \right\}.$$

Los elementos que determinan la región crítica son el nivel de significación α y el punto crítico $t_{n-1;1-\alpha}$ asociado al nivel de significación. Este punto es el valor de una variable aleatoria con distribución t con $n-1$ grados de libertad que verifica que $P(t_{n-1} > t_{n-1;1-\alpha}) = 1 - \alpha$, o equivalentemente, el valor que cumple que $P(t_{n-1} < t_{n-1;1-\alpha}) = \alpha$.

Tomando un nivel de significación $\alpha = 0.01$, se obtiene que el punto crítico es $t_{8;0.01} = -2.896$, ya que para una t con 8 grados de libertad se cumple que: $P(t_8 < -2.896) = 0.01$. Consecuentemente, teniendo en cuenta el valor de la media en la hipótesis nula —$\mu_0 = 5$—, la región crítica con este nivel de significación será

$$\mathcal{R} = \left\{ \frac{\bar{X} - 5}{S/\sqrt{9}} < -2.896 \right\}.$$

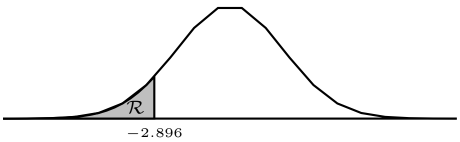


Figura 1: Región crítica para $\alpha = 0.01$

La gráfica representada en la figura 1 es la densidad de una t_8. En dicha gráfica se ha marcado la región crítica $\mathcal{R}$. El área debajo de la curva en esta región —zona sombreada— coincide con el nivel de significación $\alpha = 0.01$.

Para la muestra extraída, se tiene que

$$\frac{\bar{X} - 5}{S/\sqrt{n}} = \frac{4.5 - 5}{1/3} = \text{-1.5},$$

valor que cae fuera de $\mathcal{R}$; con lo cual aceptamos la hipótesis nula H_0, es decir, la decisión que tomaría el comprador, en base a la experiencia pasada, sería adquirir los equipos informáticos.

Si ahora optamos por un nivel de significación mayor: $\alpha = 0.05$, la región crítica vendrá dada por

$$\mathcal{R} = \left\{ \frac{\bar{X} - 5}{S/\sqrt{n}} < -1.860 \right\}.$$

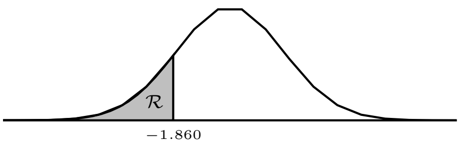


Figura 2: Región crítica para $\alpha = 0.05$

En la gráfica de la figura 2 se representa la nueva región crítica $\mathcal{R}$. Dado que $-1.5 \notin \mathcal{R}$, la decisión que adoptamos será aceptar de nuevo H_0.

$\square$

Problema 2. El número de incendios diarios que se producen en una gran ciudad sigue una distribución de Poisson. Observados 100 días al azar se obtuvo una media de 25 incendios por día. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para el número medio de incendios por día.

Solución

La cantidad pivotal utilizada en este caso es:

$$\frac{\bar{X} - \lambda}{\sqrt{\hat{\lambda}/n}}$$

cuya distribución asintótica —para tamaños muestrales grandes— es una normal de media 0 y varianza 1. En la expresión anterior se tiene que

- $\bar{X}$: media muestral.
- λ: media de la distribución de Poisson.
- $\hat{\lambda}$: estimador de λ. Se utilizará como estimador de la media poblacional λ la media muestral $\bar{X}$.
- n: tamaño muestral.

Teniendo en cuenta que la distribución asintótica de la cantidad pivotal que estamos empleando es normal de media 0 y desviación típica 1, se obtendrá que

$$P\left(-1.96 < \frac{\bar{X} - \lambda}{\sqrt{\bar{X}/n}} < 1.96\right) \approx 0.95,$$

ya que para una variable aleatoria Z con distribución $N(0,1)$ se cumple que: $P(-1.96 < Z < 1.96) = 0.95$ —véase la figura 3 donde el área sombreada bajo la campana es 0.95—.

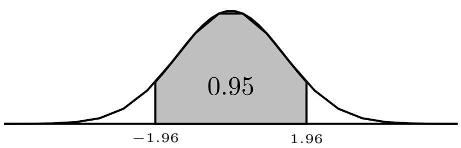


Figura 3: Intervalo de confianza al 95 %

Despejando el parámetro desconocido λ en la cadena de desigualdades anteriores, se llega a

$$P\left(\bar{X} - 1.96\sqrt{\bar{X}/n} < \lambda < \bar{X} + 1.96\sqrt{\bar{X}/n}\right) \approx 0.95.$$

Por tanto, el intervalo de extremos aleatorios que contiene a λ con una probabilidad aproximada de 0.95 es

$$\left(\bar{X} - 1.96\sqrt{\bar{X}/n}\ ,\ \bar{X} + 1.96\sqrt{\bar{X}/n}\right).$$

Puesto que para la muestra extraída se tiene que $\bar{X} = 25$ y $n = 100$, el intervalo de confianza pedido será

$$\left(25 - 1.96\sqrt{\frac{25}{100}}\ ,\ 25 + 1.96\sqrt{\frac{25}{100}}\right).$$

□

Problema 3. Dos algoritmos A y B permiten simular cierto proceso. En 10 simulaciones, realizadas con cada uno de ellos, se obtuvieron los siguientes tiempos de ejecución por cada simulación

Tiempo de ejecución (en segundos)

A	7	10	8	9	6.5	8	7	7.5	9	8
B	7	7	6	5.5	7	8	6.5	7	7	9

¿Proporcionan los datos la evidencia suficiente, al nivel de significación $\alpha = 0.05$, para concluir que hay diferencias entre los tiempos medios de ejecución de ambos algoritmos? Supóngase normalidad e igualdad de varianzas en los tiempos de ejecución.

Solución

Se trata de un test de hipótesis para contrastar la igualdad de medias. La hipótesis nula y la alternativa vienen dadas por

$$H_0 : \mu_A = \mu_B \qquad\qquad H_1 : \mu_A \neq \mu_B$$

siendo μ_A y μ_B los tiempos medios de ejecución de los algoritmos A y B.

Es muy razonable suponer que ambos algoritmos se ejecutan de manera independiente. Dadas las hipótesis de normalidad e igualdad de varianzas del enunciado, el estadístico de contraste que emplearemos es el de la t de student para la comparación de medias de dos poblaciones, el cual viene dado por

$$\frac{\bar{X}_A - \bar{X}_B - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} \sim t_{n_1+n_2-2}$$

Los ingredientes muestrales que aparecen en la expresión anterior son

- n_1: tamaño muestral para el algoritmo A.
- n_2: tamaño muestral para el algoritmo B.

- $\bar{X}_A$: media muestral del tiempo de ejecución de A.
- $\bar{X}_B$: media muestral del tiempo de ejecución de B.
- S_1^2: cuasivarianza muestral del tiempo de ejecución de A.
- S_2^2: cuasivarianza muestral del tiempo de ejecución de B.

Puesto que el contraste es bilateral, la región crítica del test viene dada por

$$\mathcal{R} = \left\{ \frac{|\bar{X}_A - \bar{X}_B|}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} > t_{n_1+n_2-2;\alpha/2} \right\},$$

donde el punto crítico $t_{n_1+n_2-2;\alpha/2}$ es el valor de una variable aleatoria con distribución t con $n_1 + n_2 - 2$ grados de libertad para el que se verifica que: $P(t_{n_1+n_2-2} > t_{n_1+n_2-2;\alpha/2}) = \alpha/2$.

En nuestro caso, con tamaños muestrales de $n_1 = n_2 = 10$, se llegará a una distribución t con 18 grados de libertad. Para un nivel de significación de $\alpha = 0.05$ el punto crítico es $t_{18;0.025} = 2.101$, dado que $P(t_{18} > 2.101) = 0.025$ (ver las tablas de la distribución t de student). Por tanto, la región crítica —zona sombreada de la figura 4— vendrá determinada por

$$\mathcal{R} = \left\{ \frac{|\bar{X}_A - \bar{X}_B|}{\sqrt{\frac{9S_1^2+9S_2^2}{18}\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\right)}} > 2.101 \right\}.$$

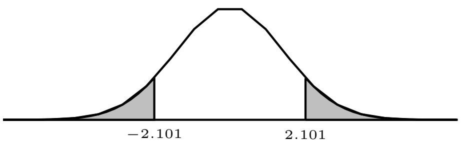


Figura 4: Región crítica para $\alpha = 0.05$

De los datos proporcionados, se obtienen las siguientes estimaciones:

- $\bar{X}_A = \dfrac{7 + 10 + \cdots + 9 + 8}{10} = 8.$
- $\bar{X}_B = \dfrac{7 + 7 + \cdots + 7 + 9}{10} = 7.$
- $S_1^2 = \dfrac{1}{n_1 - 1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \bar{X}_A)^2 = \dfrac{(7-8)^2 + \cdots + (8-8)^2}{9} = \dfrac{10.5}{9}.$
- $S_2^2 = \dfrac{1}{n_2 - 1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n_2}(X_i - \bar{X}_B)^2 = \dfrac{(7-7)^2 + \cdots + (9-7)^2}{9} = \dfrac{8.5}{9}.$

Consecuentemente, para la muestra extraída se tiene que

$$\frac{|\bar{X}_A - \bar{X}_B|}{\sqrt{\frac{9S_1^2+9S_2^2}{18}\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\right)}} = \frac{8-7}{\sqrt{\frac{10.5+8.5}{18}\frac{1}{5}}} = 3\sqrt{\frac{10}{19}}$$

valor que pertenece a la región crítica $\mathcal{R}$; con lo cual se rechazará la hipótesis de igualdad de los tiempos medios de ejecución de ambos algoritmos.

□

Problema 4. Una empresa dedicada al montaje de equipos informáticos distribuye entre sus clientes dos modelos: A y B. Cierto estudio de mercado concluyó que al menos tres de cada cuatro individuos del grupo de clientes potenciales preferían el modelo A. Un estudio paralelo del departamento de análisis de datos de la empresa mostró que, de 1000 individuos tomados al azar entre los clientes del último año, 700 compraron el modelo A. Si el comportamiento de los antiguos clientes se puede extrapolar al del grupo de clientes potenciales, ¿avala este último estudio las conclusiones del estudio de mercado realizado? Tómese un nivel de significación $\alpha = 0.01$.

Solución

Se trata de un contraste de hipótesis para la proporción de clientes potenciales que prefieren el modelo A. El estudio de mercado determina la hipótesis nula y la alternativa.

$$H_0 : p \geq 0.75 \qquad H_1 : p < 0.75.$$

La muestra obtenida por el departamento de análisis de datos da una proporción de compradores del equipo A del 70 %. El procedimiento estadístico del contraste de hipótesis permite evaluar si la discrepancia entre la proporción observada —0.70— y la establecida por la hipótesis nula H_0 se debe o no al azar.

Una medida de esta discrepancia, en términos estadísticos, viene dada por el estadístico de contraste

$$\frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

cuya distribución se puede aproximar, para tamaños muestrales grandes, por la de una normal de media 0 y desviación típica 1. En esta expresión se tiene que

- $\hat{p}$: proporción muestral. Para la muestra extraída $\hat{p} = 0.7$.
- p_0: valor del parámetro proporción poblacional. En este caso $p_0 = 0.75$.
- n: tamaño muestral. En nuestro caso $n = 1000$.

La región crítica del test viene dada por

$$\mathcal{R} = \left\{ \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} < c(\alpha) \right\},$$

donde α es el nivel de significación y $c(\alpha)$ es el punto crítico que, en función del nivel de significación, establece el criterio de decisión entre H_0 y H_1.

Puesto que la distribución del estadístico de contraste se puede aproximar por la de una $N(0,1)$, de la condición del nivel de significación se sigue que

$$\alpha = P\left(\frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} < c(\alpha) \right) \approx P(Z < c(\alpha)),$$

siendo Z una variable aleatoria con distribución $N(0,1)$. Por tanto, el punto crítico se podrá aproximar por el correspondiente cuantil de la $N(0,1)$, es decir, por el punto $z_{1-\alpha}$ que cumple que $P(Z < z_{1-\alpha}) = \alpha$. Esta aproximación conduce a la siguiente región crítica:

$$\mathcal{R} = \left\{ \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} < z_{1-\alpha} \right\}.$$

Si $\alpha = 0.01$ el punto crítico se aproxima por $z_{0.99} = -2.33$; con lo cual la región crítica vendrá dada por (ver la región sombreada de la figura 5)

$$\mathcal{R} = \left\{ \frac{\hat{p} - 0.75}{\sqrt{\frac{0.75 \cdot 0.25}{1000}}} < -2.33 \right\}.$$

De la muestra extraída se obtiene que

$$\frac{\hat{p} - 0.75}{\sqrt{\frac{0.75 \cdot 0.25}{1000}}} = \frac{0.7 - 0.75}{\sqrt{\frac{0.75 \cdot 0.25}{1000}}} \approx \text{-3.65},$$

valor que pertenece a la región crítica $\mathcal{R}$; lo cual conduce a rechazar la tesis planteada por el estudio de mercado.

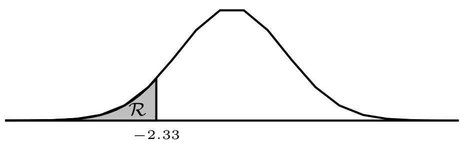


Figura 5: Región crítica para $\alpha = 0.01$

$\square$

Problema 5. La lectura registrada por cierto aparato de medida es una variable aleatoria X con distribución normal. En una muestra de doce lecturas, tomadas al azar, se han observado los siguientes valores de la variable X.

10 15 11 12 8 13 16 5 14 5 6 5

(a) Dar una estimación puntual de la media de X. Justifíquese la elección del estimador que se utiliza.

(b) Obtener un intervalo de confianza, al 95 %, para la media de X.

Solución

(a) Para estimar la media de X, utilizamos la media muestral:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}.$$

Se propone este estimador porque es insesgado para el parámetro media de la variable poblacional X que se desea estimar. Con la muestra obtenida, la estimación resulta:

$$\bar{x} = \frac{10+15+11+12+8+13+16+5+14+5+6+5}{12} = 10$$

(b) Puesto que la variable aleatoria poblacional es normal de varianza desconocida, la cantidad pivotal que utilizamos para construir el intervalo de confianza pedido es la basada en la distribución t de Student, que elimina el efecto de la varianza poblacional:

$$U = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

donde

- μ es la media de la variable X.
- $\bar{X}$ es la media muestral. En este caso la media muestral es 10.
- S^2 es la cuasivarianza muestral. En la muestra obtenida $S = 4.1$.
- n es el tamaño muestral. En este caso $n = 12$.

En primer lugar, encontramos el intervalo que contiene a U con una probabilidad igual al nivel de confianza 0.95. Puesto que U tiene distribución t con 11 grados de libertad, el problema se reduce a buscar los extremos de un intervalo que contenga a una variable con distribución t_{11} con probabilidad 0.95.

Los extremos del intervalo, obtenidos de las tablas de la distribución t de student, son $-t_{11;0.025} = -2.201$ y $t_{11;0.025} = 2.201$; ya que, por la simetría de la densidad de la distribución t (véase la figura 6), la probabilidad del intervalo $(2.201, \infty)$ es 0.025, la del $(-\infty, -2.201)$ es 0.025 y la del intervalo $(-2.201, 2.201)$ es 0.95 —área de la región sombreada de la figura 6—.

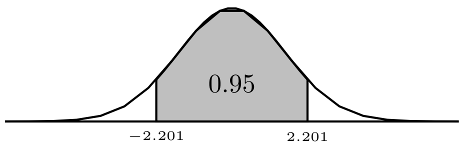


Figura 6: Intervalo de confianza al 95 %

Ahora que conocemos el intervalo, el resto del ejercicio no es más que un sencillo cálculo. Dado que

$$P(-2.201 \leq \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{12}} \leq 2.201) = 0.95,$$

despejando μ en la anterior cadena de desigualdades, se obtiene el intervalo

$$\left(\bar{X} - 2.201 \frac{S}{\sqrt{12}} \; , \; \bar{X} + 2.201 \frac{S}{\sqrt{12}} \right)$$

de extremos aleatorios que contiene el valor desconocido de la media μ con probabilidad 0.95.

Una vez que se ha extraído la muestra, el intervalo anterior deja de ser aleatorio, ya que los estimadores se sustituyen por sus valores en la muestra. Para la muestra extraída el intervalo de confianza que resulta es

$$\left(10 - 2.201 \frac{4.1}{\sqrt{12}} \; , \; 10 + 2.201 \frac{4.1}{\sqrt{12}} \right).$$

$\square$

Problema 6. La distribución del error de medida de cierto aparato es una variable aleatoria con distribución normal de media y varianzas desconocidas. En 10 mediciones, tomadas al azar, se observaron los siguientes errores (expresados en la unidad de medida correspondiente).

8 10 11 10 12 10 9 8 13 9

(a) Obtener un intervalo de confianza, al 90 %, para el error de medida medio.

(b) Si la varianza del error de medida es $\sigma^2 = 2.5$ obtener un nuevo intervalo de confianza, con el mismo nivel de confianza, para la media del error de medida. Compárelo con el obtenido en el apartado anterior.

Solución

(a) Puesto que el error de medida sigue una distribución normal con varianza desconocida, la cantidad pivotal que se utiliza para obtener el intervalo de confianza es

$$U = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

siendo

- μ la media del error de medida.
- $\bar{X}$ la media muestral.
- S^2 la cuasivarianza muestral.
- n el tamaño muestral.

En este caso, para la muestra extraída de tamaño $n = 10$, se tiene que

$$\bar{x} = \frac{8 + 10 + 11 + 10 + 12 + 10 + 9 + 8 + 13 + 9}{10} = 10$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{(8-10)^2 + (10-10)^2 + \cdots + (9-10)^2}{9} = 2.67$$

Puesto que la distribución de U es la de una t con 9 grados de libertad, la probabilidad de que U esté entre los valores $-t_{9;0.05} = -1.833$ y $t_{9;0.05} = 1.833$, obtenidos de las tablas de la t de student, es 0.90 —área de la región sombreada de la figura 7—.

Consecuentemente, $P(-1.833 \leq \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{10}} \leq 1.833) = 0.90$; o bien

$$P\left(\bar{X} - 1.833\frac{S}{\sqrt{10}} < \mu < \bar{X} + 1.833\frac{S}{\sqrt{10}}\right) = 0.90.$$

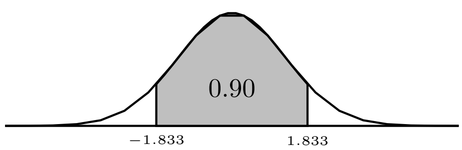


Figura 7: Intervalo de confianza al 90 % (σ^2 desconocida)

Luego el intervalo de extremos aleatorios dado por

$$\left(\bar{X} - 1.833\frac{S}{\sqrt{10}}\ ,\ \bar{X} + 1.833\frac{S}{\sqrt{10}}\right)$$

contendrá el verdadero valor del parámetro μ con probabilidad 0.90.

Para la muestra obtenida se tiene que $\bar{x} = 10$ y $S^2 = 2.67$; con lo cual podremos concluir que el intervalo de confianza con un nivel de confianza del 90 % es

$$\left(10 - 1.833\frac{\sqrt{2.67}}{\sqrt{10}}\ ,\ 10 + 1.833\frac{\sqrt{2.67}}{\sqrt{10}}\right).$$

(b) Puesto que ahora la varianza de la población es $\sigma^2 = 2.5$ conocida, no recurrimos, como hacíamos en el apartado anterior, a la distribución t, que elimina el efecto de la varianza. Utilizaremos la cantidad pivotal con distribución normal dada por

$$V = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

donde

- μ es la media del error de medida.
- $\bar{X}$ es la media muestral. Para la muestra extraída $\bar{x} = 10$.
- σ^2 es la varianza de la población. En este caso $\sigma^2 = 2.5$
- n es el tamaño muestral.

Al igual que en el apartado anterior, encontramos el intervalo que contiene a V con una probabilidad de 0.90. La distribución $N(0,1)$, que rige su comportamiento aleatorio, nos abre el camino. La probabilidad de que V, o equivalentemente, una $N(0,1)$, esté comprendida entre los valores $-z_{0.05} = -1.645$ y $z_{0.05} = 1.645$, obtenidos de las tablas de la normal, es 0.90 —área sombreada de la figura 8—.

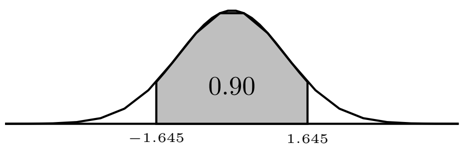


Figura 8: Intervalo de confianza al 90 % ($\sigma^2 = 2.5$)

Por tanto, se tendrá que

$$P(-1.645 \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{2.5}/\sqrt{10}} \leq 1.645) = 0.90.$$

Despejando μ en esta cadena de desigualdades, resulta el siguiente intervalo de extremos aleatorios que contiene al error medio de medida con probabilidad 0.90:

$$\left(\bar{X} - 1.645\frac{\sqrt{2.5}}{\sqrt{10}}\ ,\ \bar{X} + 1.645\frac{\sqrt{2.5}}{\sqrt{10}}\right)$$

Reemplazado el valor de la media muestral que resulta de la muestra extraída, obtendremos el siguiente intervalo de confianza con nivel de confianza del 90 %:

$$\left(10 - 1.645\frac{\sqrt{2.5}}{\sqrt{10}}\ ,\ 10 + 1.645\frac{\sqrt{2.5}}{\sqrt{10}}\right).$$

Puesto que para la muestra extraída $S^2 \approx \sigma^2$, las longitudes de ambos intervalos están caracterizadas por los cuantiles $t_{9;0.05}$ y $z_{0.05}$ de las distribuciones t y normal; el primero es mayor que el segundo ya que la distribución t tiene colas más pesadas que la normal. Esto explica que el intervalo de confianza obtenido a partir de la distribución t tenga mayor longitud que el basado en la normal.

□

Problema 7. La cantidad —en kg— de cereal cosechada por m^2 en una región es una variable aleatoria con distribución *normal*. En 25 localizaciones elegidas al azar se obtuvo que la cantidad media cosechada por m^2 fue de 18.5 kg con una cuasivarianza de 1 kg^2. Contrastar la hipótesis de que la cantidad media por m^2 es de 18 kg, frente a la alternativa de que es mayor. Tómese un nivel de significación de $\alpha = 0.1$.

Solución

El contraste de hipótesis sobre la cantidad media μ de cereal cosechado por m^2 viene dado por

$$H_0 : \mu = 18 \qquad\qquad H_1 : \mu > 18.$$

Dado que la cantidad recolectada por m^2 es una variable con distribución normal de varianza desconocida, el estadístico de contraste que emplearemos es

$$\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

donde

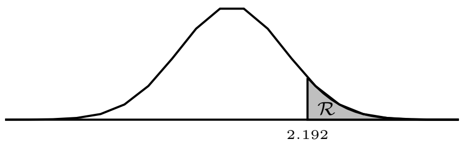


Figura 9: Región crítica para $\alpha = 0.01$

- μ_0: valor del parámetro media poblacional. En este caso $\mu_0 = 18$.
- $\bar{X}$: media muestral. Para la muestra extraída $\bar{X} = 25$.
- S^2: cuasivarianza muestral. Para la muestra extraída $S^2 = 1$.
- n: tamaño muestral. En este caso $n = 25$.

La región crítica del test viene dada por

$$\mathcal{R} = \left\{ \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} > t_{n-1;\alpha} \right\},$$

siendo α el nivel de significación y $t_{n-1;\alpha}$ el cuantil $1 - \alpha$ de una distribución t con $n - 1$ grados de libertad, es decir, el valor de la distribución que verifica que $P(t_{n-1} \leq t_{n-1;\alpha}) = 1 - \alpha$.

En este caso, para un tamaño muestral $n = 25$ y un nivel de significación $\alpha = 0.01$, la región crítica —zona sombreada de la figura 9— viene dada por

$$\mathcal{R} = \left\{ \frac{\bar{X} - 18}{S/5} > t_{24;0.01} = 2.192 \right\}.$$

Para la muestra extraída se obtendrá que

$$\frac{\bar{X} - 18}{S/5} = \frac{18.5 - 18}{1/5} = 2.5 \in \mathcal{R},$$

lo cual conduce a rechazar la hipótesis nula de que la cantidad media de cereal cosechada por m^2 es de 18 kg.

□

Problema 8. A fin de contrastar la hipótesis de igualdad de varianzas de dos poblaciones normalmente distribuidas, se obtuvo una muestra aleatoria de cada una de ellas. Los resultados de ambas muestras se recogen en la siguiente tabla.

Población 1	10.5	9.5	11	8	9	10	9.8	10.2		
Población 2	17	18	16.5	17.2	19	18.5	18.3	17.5	17.8	17.7

¿Qué evidencia proporcionan los datos acerca de la hipótesis que se pretende contrastar? Tómese nivel de significación $\alpha = 0.1$.

Solución

Nos están pidiendo contrastar la igualdad de varianzas de dos poblaciones normales. Si denotamos por σ_1^2 y σ_2^2 las varianzas de la población 1 y la población 2 la hipótesis nula y alternativa se plantean del siguiente modo:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \qquad\qquad H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2.$$

El estadístico de contraste es

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F_{n_1,n_2}$$

Nótese que es bajo H_0 y, asumiendo la normalidad de ambas poblaciones, cuando el estadístico tiene distribución F con n_1 y n_2 grados de libertad.

Los elementos que aparecen en la expresión anterior son:

- n_1: tamaño de la muestra obtenida de la población 1. En este caso $n_1 = 8$.
- n_2: tamaño de la muestra obtenida de la población 2. En este caso $n_2 = 10$.
- S_1^2: cuasivarianza muestral de la muestra extraída de la población 1. Los datos obtenidos proporcionan el valor $S_1^2 = 0.7600$.
- S_2^2: cuasivarianza muestral de la muestra extraída de la población 2. Los datos obtenidos proporcionan el valor $S_2^2 = 0.4985$.

La región crítica del test está formada por el conjunto de todas muestras que dan lugar a valores *extremos* del cociente S_1^2/S_2^2. Cuando hablamos de valores *extremos*, nos estamos refiriendo a valores del cociente que no sean próximos a 1. Para elaborar un criterio de decisión basado en la proximidad a 1, nos apoyamos en la distribución en el muestreo del estadístico de contraste.

Con esta idea, propondremos una región crítica de la forma

$$\mathcal{R} = \left\{\frac{S_1^2}{S_2^2} < c_1\right\} \cup \left\{\frac{S_1^2}{S_2^2} > c_2\right\}.$$

La condición del nivel de significación dada por

$$P(\mathcal{R}|H_0) = P(\frac{S_1^2}{S_2^2} < c_1|H_0) + P(\frac{S_1^2}{S_2^2} > c_2|H_0) = \alpha$$

permite obtener los puntos críticos que determinan el criterio de decisión.

Repartiendo por igual el nivel de significación α entre las dos regiones en las que se ha dividido $\mathcal{R}$, se llegará a las siguientes dos condiciones:

$$P(\frac{S_1^2}{S_2^2} < c_1|H_0) = \frac{\alpha}{2} \qquad\qquad P(\frac{S_1^2}{S_2^2} > c_2|H_0) = \frac{\alpha}{2}.$$

De la segunda de ellas se obtiene que $c_2 = F_{n_1-1,n_2-1;\alpha/2}$ (valor obtenido de las tablas de la distribución F de Snedecor). Para la primera se requiere un pequeño cálculo. Puesto que $P(\frac{S_1^2}{S_2^2} < c_1|H_0) = P(F_{n_1-1,n_2-1} < c_1) =$

$$= P(1/F_{n_1-1,n_2-1} > 1/c_1) = P(F_{n_2-1,n_1-1} > 1/c_1) = \frac{\alpha}{2},$$

se tendrá que $1/c_1 = F_{n_2-1,n_1-1;\alpha/2}$ (valor obtenido de las tablas), es decir, $c_1 = 1/F_{n_2-1,n_1-1;\alpha/2}$.

Ya conocemos la región crítica:

$$\mathcal{R} = \left\{ \frac{S_1^2}{S_2^2} < 1/F_{n_2-1,n_1-1;\alpha/2} \right\} \cup \left\{ \frac{S_1^2}{S_2^2} > F_{n_1-1,n_2-1;\alpha/2} \right\}.$$

Para un nivel de significación de $\alpha = 0.1$ y los tamaños muestrales $n_1 = 8$ y $n_2 = 10$, se tiene que $F_{7,9;0.05} = 3.2927$ y $F_{9,7;0.05} = 3.6767$; con lo cual

$$\mathcal{R} = \left\{ \frac{S_1^2}{S_2^2} < \frac{1}{3.6767} = 0.272 \right\} \cup \left\{ \frac{S_1^2}{S_2^2} > 3.2927 \right\}.$$

La zona sombreada de la figura 10 representa la región crítica $\mathcal{R}$ para un nivel de $\alpha = 0.1$.

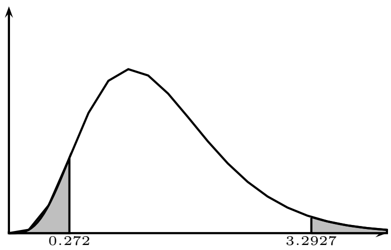


Figura 10: Región crítica para $\alpha = 0.1$

La muestra extraída proporciona los siguientes valores para las cuasivarianzas: $S_1^2 = 0.76$ y $S_2^2 = 0.4985$; de donde se obtiene que

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{0.76}{0.4985} \notin \mathcal{R}.$$

Por tanto, la decisión a adoptar sería aceptar la hipótesis de igualdad de varianzas de ambas poblaciones.

$\square$