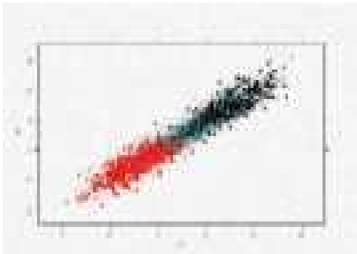
ESTADÍSTICA (SISTEMAS)

Profesores: Hilario Navarro. Jorge Martín



DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA, INVESTIGACIÓN OPERATIVA Y CÁLCULO NUMÉRICO

Segunda unidad didáctica.
Soluciones a los problemas propuestos de Probabilidad

Curso 2004-2005

Problema 1. Cada uno de los dígitos que forman una clave de tres dígitos se elige, con independencia de los otros, entre los números: $0, 1, 2, \ldots, 9$. Determínese:

(a) la probabilidad de que la clave tenga al menos dos cifras iguales.

(b) la probabilidad de que, si la clave obtenida es un número par, no sea superior a 100.

Solución

(a) Se pueden formar un total de 10^3 claves con los dígitos del 0 al 9.

Denotaremos por A el suceso

$$A = \text{“la clave tiene al menos dos cifras iguales”}$$

Vamos a calcular la probabilidad del complementario

$$A^c = \text{“todas las cifras que forman la clave son distintas”}$$

Hay $10 \cdot 9 \cdot 8$ claves favorables al suceso A^c; ya que la cifra de las centenas puede ser uno cualquiera de los diez dígitos, la de las decenas uno de los nueve restantes y la de las unidades uno cualquiera de los ocho que no ocuparon el lugar de las centenas y decenas.

$$\overset{10}{\boxed{\times}} \quad \overset{9}{\boxed{\times}} \quad \overset{8}{\boxed{\times}}$$

La probabilidad del complementario es $P(A^c) = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{10^3}$; de donde se sigue la probabilidad pedida:

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{10^3} = 1 - \frac{18}{25} = \frac{7}{25}.$$

(b) Vamos a resolver el problema utilizando dos métodos.

Método 1. El enunciado nos informa sobre el resultado del experimento: la clave obtenida es un número par. Con esta información la incertidumbre se modifica; de entrada excluiríamos todas las claves impares. Por tanto, el espacio muestral cambia y queda restringido al conjunto de todas las claves pares entre la $\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}$ y la $\boxed{9}\boxed{9}\boxed{9}$; un total de 500, es decir

$$\Omega = \{\text{Conjunto de claves pares entre la } \boxed{0}\boxed{0}\boxed{0} \text{ y la } \boxed{9}\boxed{9}\boxed{9}\}$$

De todas ellas hay un total de 51 que no superan a 100; todos los pares comprendidos entre el 0 cuya clave es $\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}$ y el 100 con clave $\boxed{1}\boxed{0}\boxed{0}$. Consecuentemente, la probabilidad pedida será 51/500.

Método 2. Se considera el espacio muestral inicial que está formado por el conjunto de todas las claves comprendidas entre el 0 y el 999:

$$\Omega = \{\text{Conjunto de claves entre la } \boxed{0}\boxed{0}\boxed{0} \text{ y la } \boxed{9}\boxed{9}\boxed{9}\}$$

A continuación, se consideran los sucesos

$$A = \text{“la clave obtenida no supera a 100”}$$

$$B = \text{“la clave obtenida es un número par”}$$

Nos están pidiendo calcular la probabilidad condicionada

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Del conjunto de todas las claves, un total de 1000, hay 51 que son pares menores o iguales que 100; con lo cual se tiene que

$$P(A \cap B) = \frac{51}{1000}.$$

Por otro lado, hay un total de 500 claves que son pares; luego se obtendrá que

$$P(B) = \frac{500}{1000}.$$

Por tanto, la probabilidad pedida es

$$P(A|B) = \frac{51/1000}{500/1000} = \frac{51}{500}.$$

□

Problema 2. Con el enunciado del problema anterior se pide calcular:

(a) la probabilidad de que la clave sea un número de dos cifras.

(b) la probabilidad de que la clave sea un múltiplo de 5.

(c) la probabilidad de que la clave sea un número par de dos cifras.

Solución

(a) Denotaremos por A el suceso "*la clave es un número de dos cifras*".

Las claves de dos cifras tendrán el 0 en el lugar de las centenas, cualquier dígito menos el 0 —un total de 9 dígitos posibles— en el lugar de las decenas y uno cualquiera de los 10 dígitos en el lugar de las unidades:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 9 & 10 \\ \boxed{0} & \boxed{\times} & \boxed{\times} \end{array}$$

Consecuentemente, habrá un total de $1 \cdot 9 \cdot 10 = 90$ claves de dos cifras. Por tanto, la probabilidad pedida será

$$P(A) = \frac{1 \cdot 9 \cdot 10}{10^3} = \frac{9}{100}.$$

(b) Vamos a denotar por B el suceso "*la clave es un múltiplo de* 5".

Obtendremos un múltiplo de 5 —contando el 0, con clave $\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}$, entre los múltiplos de 5— cuando en las unidades aparece un 0 o un 5 y en las centenas y decenas uno cualquiera de los 10 dígitos:

$$\begin{array}{ccc} 10 & 10 & 2 \\ \boxed{\times} & \boxed{\times} & \boxed{\times} \end{array}$$

Hay un total de $10 \cdot 10 \cdot 2 = 200$ claves en que esto ocurre; luego la probabilidad pedida será

$$P(B) = \frac{10 \cdot 10 \cdot 2}{10^3} = \frac{1}{5}.$$

(c) Finalmente, sea C el suceso "*la clave es un número par de dos cifras*".

Ocurre C si en las centenas aparece un 0, en las decenas uno cualquiera de los 10 dígitos exceptuando el 0 (9 casos posibles) y en las unidades un 0 o un 5 (2 casos posibles):

$$\begin{array}{ccc} 1 & 9 & 2 \\ \boxed{0} & \boxed{\times} & \boxed{\times} \end{array}$$

Hay un total de $1 \cdot 9 \cdot 2 = 18$ claves pares de dos cifras; con lo cual la probabilidad pedida será

$$P(C) = \frac{1 \cdot 9 \cdot 2}{10^3} = \frac{9}{500}.$$

□

Problema 3. Un programa se ejecuta desde uno cualquiera de cuatro periféricos A, B, C y D con arreglo al siguiente protocolo: en un primer intento, si A está operativo, el programa se ejecuta desde A. Si A no está operativo se realiza un segundo intento consistente en lanzar dos monedas y ejecutar el programa: desde B si no se obtuvo ninguna cara, desde C si se obtuvo una cara o desde D si se obtuvieron dos caras. Si el periférico seleccionado en el segundo intento no está operativo el programa no se ejecuta. La probabilidad de que cada periférico esté operativo es p y lo está o no con independencia del estado de los otros.

(a) Calcular la probabilidad de que el programa no se ejecute.

(b) Si el programa se ha ejecutado, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya hecho en el segundo intento?

Solución

(a) Vamos a denotar por A, B, C, D y E los siguientes sucesos:

$$A = \text{“\textit{El programa se ejecuta desde el periférico A}”}$$
$$B = \text{“\textit{El programa se ejecuta desde el periférico B}”}$$
$$C = \text{“\textit{El programa se ejecuta desde el periférico C}”}$$
$$D = \text{“\textit{El programa se ejecuta desde el periférico D}”}$$
$$E = \text{“\textit{El programa se ejecuta}”}$$

Por la manera en que funciona el protocolo se tiene que $P(A) = p$.

La probabilidad de que el programa se ejecute desde B es igual a la probabilidad de que A no esté operativo $1-p$, por la probabilidad de que B sea elegido —que es igual a $1/4$: probabilidad de no obtener ninguna cara—, por la probabilidad de que B esté operativo p, es decir, $P(B) = (1-p)\frac{1}{4}p$.

Del mismo modo, las probabilidades de que el programa se ejecute desde C y D son respectivamente:

$$P(C) = (1-p)\frac{1}{2}p \quad , \quad P(C) = (1-p)\frac{1}{4}p.$$

Por tanto, la probabilidad de que el programa se ejecute es

$$P(E) = P(A \cup B \cup C \cup D) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = p(2-p)$$

y la probabilidad de que no se ejecute es

$$P(E^c) = 1 - P(E) = 1 - p(2-p) = (1-p)^2.$$

(b) Puesto que nos suministran la información adicional de que *el programa se ha ejecutado*, lo que nos están pidiendo en el enunciado es la probabilidad condicionada: $P(B \cup C \cup D|E)$.

La probabilidad de que el programa se ejecute en el segundo intento es la probabilidad de que lo haga desde B, C o D, la cual viene dada por

$$P(B \cup C \cup D) = (1-p)\frac{1}{4}p + (1-p)\frac{1}{2}p + (1-p)\frac{1}{4}p = (1-p)p.$$

Luego, si el programa se ha ejecutado, la probabilidad de que lo haya hecho en el segundo intento será

$$P(B \cup C \cup D|E) = \frac{P(B \cup C \cup D)}{P(E)} = \frac{(1-p)p}{p(2-p)} = \frac{1-p}{2-p}.$$

$\square$

Problema 4. Un algoritmo de búsqueda inspecciona una lista de 1000 registros a fin de localizar un registro determinado. El algoritmo emplea un procedimiento secuencial de búsqueda: recorre la lista de izquierda a derecha, comprobando si cada registro coincide con el que busca, hasta que lo encuentra. Se pide:

(a) Calcular la probabilidad de que lo encuentre en 6 intentos.

(b) Calcular la probabilidad de que tenga que realizar k intentos.

(c) Determinar el número medio de intentos que realiza.

Solución

(a) Sea X la variable aleatoria

$$X = \text{ número de intentos hasta encontrar el registro buscado.}$$

Supongamos que ponemos todos los registros en fila:

El algoritmo realizará seis intentos cuando no localice el registro que busca en las cinco primeras posiciones de la fila y lo encuentre en la sexta.

Si denotamos por A_i el suceso “ *el registro buscado ocupa la* $i-$*ésima posición de la fila* ” la probabilidad pedida será

$$P(X = 6) = P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c \cap A_6).$$

Por la regla de la multiplicación para calcular de la probabilidad de la intersección de sucesos, se tiene que

$$P(X=6) = P(A_1^c)P(A_2^c|A_1^c)P(A_3^c|A_1^c \cap A_2^c)\cdots P(A_6|A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c).$$

Por tanto, la probabilidad pedida será

$$P(X=6) = \left(\frac{999}{1000}\right)\left(\frac{998}{999}\right)\left(\frac{997}{998}\right)\left(\frac{996}{997}\right)\left(\frac{995}{996}\right)\left(\frac{1}{995}\right) = \frac{1}{1000}$$

(b) De la misma manera, la probabilidad de realizar k intentos es la probabilidad de que el algoritmo no localice el registro en los $k-1$ primeros lugares de la fila y lo encuentre en el k-ésimo. Por tanto, para cada $k = 1, 2, \ldots, 1000$

$$P(X=k) = \left(\frac{999}{1000}\right)\cdots\left(\frac{1000-k+1}{1000-k+2}\right)\left(\frac{1}{1000-k+1}\right) = \frac{1}{1000}$$

El cálculo anterior se generaliza sin dificultad a una lista con n registros. Así, para cada $k = 1, 2, \ldots, n$, se tiene que

$$P(X=k) = \left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n-2}{n-1}\right)\cdots\left(\frac{n-k+1}{n-k+2}\right)\left(\frac{1}{n-k+1}\right) = \frac{1}{n}$$

Sin embargo, para calcular $P(X=k)$ en el caso general, preferimos utilizar el razonamiento *recurrente* que se sigue del procedimiento secuencial de búsqueda.

Para una lista de n registros, sea $p_{k,n}$ la probabilidad de localizar el registro buscado en k intentos, y A el suceso *"el primer registro de la fila es distinto al buscado"*.

Para localizar el registro en k intentos, debe ocurrir A, y a continuación, se han de realizar $k-1$ intentos en una nueva lista con $n-1$ registros (todos menos el primero). Por tanto,

$$p_{k,n} = P(X=k) = \frac{n-1}{n} p_{k-1,n-1} : k = 2, 3, \ldots, n$$

de donde se sigue la ecuación recurrente

$$np_{k,n} = (n-1)p_{k-1,n-1} \tag{1}$$

Teniendo en cuenta la condición inicial: $p_{1,i} = \frac{1}{i}$ (en una lista con i registros la probabilidad de localizar el buscado en el primer intento es $1/i$), basta aplicar la ecuación anterior sucesivamente para obtener que

$$np_{k,n} = (n-1)p_{k-1,n-1} = (n-2)p_{k-2,n-2} = \cdots\cdots = (n-k+1)p_{1,n-k+1} = 1$$

de donde se sigue que $p_{k,n} = P(X = k) = \frac{1}{n} : k = 1, 2, \ldots, n.$

(c) Ya que hemos sido capaces de generalizar el problema, vamos a seguir utilizando la lista de n registros.

El número medio de intentos que realiza el algoritmo es la media de la variable aleatoria X.

$$E\{X\} = \sum_{k=1}^{n} kP(X = k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k.$$

Calcular esta suma es sencillo si se tiene en cuenta que la suma de cada dos términos del sumatorio que equidistan de los extremos es igual a la suma de estos:

1	2	3	$\cdots\cdots\cdots$	$n-2$	$n-1$	n
n	$n-1$	$n-2$	$\cdots\cdots\cdots$	3	2	1
$n+1$	$n+1$	$n+1$	$\cdots\cdots\cdots$	$n+1$	$n+1$	$n+1$

De lo anterior se sigue que $2\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)$, es decir,

$$E\{X\} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n+1}{2}.$$

Cuando $n = 1000$, el número medio de intentos es $1001/2$.

El razonamiento recurrente nos proporciona de nuevo un procedimiento de cálculo de la media que evita cuentas *"engorrosas"* como las anteriores.

Denotamos por μ_n el número medio de intentos en una lista con n registros.

Si el registro buscado está en la primera posición de la fila, lo cual ocurre con probabilidad $1/n$, se realiza un intento y se acaba la búsqueda. En cambio, si no está, lo cual ocurre con probabilidad $\frac{(n-1)}{n}$, contamos un intento y comenzaremos a buscar en una lista con $n-1$ registros; con lo que, en este caso, el número medio de intentos será $1 + \mu_{n-1}$.

De este razonamiento resulta la siguiente ecuación recurrente:

$$\mu_n = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}(1 + \mu_{n-1}) \tag{2}$$

con la condición inicial $\mu_1 = 1$ (en una lista con un solo registro se localiza el buscado en un intento). Poniendo $Q_n = n\mu_n$, (2) se transforma en

$$Q_n = Q_{n-1} + n \qquad \text{con} \qquad Q_1 = \mu_1 = 1 \tag{3}$$

Es posible que no sepas resolver esta ecuación en diferencias. En realidad no lo necesitas, ya que el enunciado tan sólo te pide que encuentres $\mu_{1000} = \frac{Q_{1000}}{1000}$. Seguro que sí sabes programar un bucle que realice el cálculo:

```
Q=1
for n = 2 to 1000
Q=Q+n
next n
Q/1000
```

Para los aficionados a resolver problemas, vamos a solucionar (3).

Ensayamos para Q_n una solución de la forma: $Q_n = a+bn+cn^2$. Partiendo de la condición inicial, basta aplicar la recurrencia dos veces para obtener

$$Q_1 = 1 \qquad Q_2 = 3 \qquad Q_3 = 6$$

Sustituyendo los valores $n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$ en la solución general, se llega al siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} a + b + c &= 1 \\ a + 2b + 4c &= 3 \\ a + 3b + 9c &= 6 \end{aligned}$$

La solución del sistema es $a = 0$, $b = 1/2$, $c = 1/2$; con lo que

$$\mu_n = \frac{Q_n}{n} = \frac{1}{n}\left(\frac{n}{2} + \frac{n^2}{2}\right) = \frac{n+1}{2}$$

□

Problema 5. Una cadena de montaje produce lotes de piezas. La proporción de piezas defectuosas en cada uno de esos lotes es una variable aleatoria X con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} k\left(\frac{1}{4} - x\right) & , \text{ si } 0 < x < \frac{1}{4} \\ 0 & , \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Determínese

(a) El valor de la constante k.

(b) La proporción media de piezas defectuosas que contendrá un lote determinado.

(c) Ciertos controles de calidad obligan a retirar los lotes que contienen una proporción de piezas defectuosas superior al 10 %. Si el coste de producción de cada lote es de 100 euros, ¿cuál deberá ser el precio mínimo de venta para garantizar un beneficio por lote de al menos 4 euros?.

Solución

(a) Puesto que la integral de la función de densidad ha de ser 1, se tendrá que

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = k\int_0^{1/4}\left(\frac{1}{4} - x\right)\,dx = \frac{k}{32},$$

de donde se deduce que $k = 32$.

La representación gráfica de la densidad de la variable X es la que aparece en la siguiente figura.

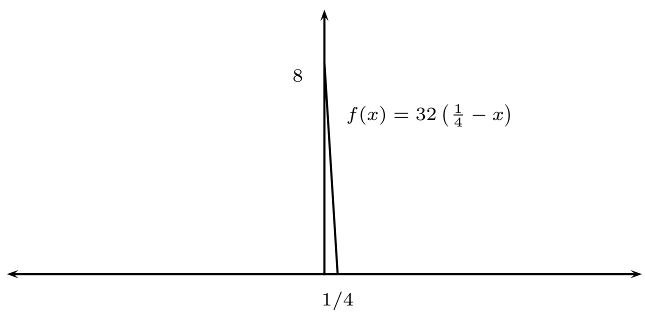


Figura 1: Función de densidad de la variable aleatoria X

(b) La proporción media es

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = 32 \int_0^{1/4} \left(\frac{x}{4} - x^2\right)\, dx = 32 \left[\frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{3}\right]_0^{1/4} = \frac{1}{12}.$$

(c) Sea B la variable aleatoria beneficio obtenido en la venta de un lote. Supongamos que el precio de venta del lote es $100 + a$ con $a > 0$.

Puesto que los lotes que no pasan los controles de calidad se retiran, la probabilidad de perder 100 euros en un lote es la probabilidad de que contenga una proporción de piezas defectuosas superior al 10 %, es decir,

$$P\left(X > \frac{1}{10}\right) = \int_{1/10}^{1/4} f(x)\, dx = 32 \int_{1/10}^{1/4} \left(\frac{1}{4} - x\right)\, dx = \frac{9}{25}.$$

Por tanto, la variable B toma los valores a y -100 con probabilidades:

$$P(B = a) = \frac{16}{25} \quad , \quad P(B = -100) = \frac{9}{25}.$$

Para tener un beneficio por lote de al menos 4 euros, debe ocurrir que

$$E(B) = \frac{16a}{25} - \frac{900}{25} > 4,$$

de donde se obtiene que $a > 62.5$.

Por tanto, el precio mínimo de venta de cada lote debe ser de 162.5 euros.

$\square$

Problema 6. Se supone que el voltaje medido en cierto circuito eléctrico es una variable aleatoria con distribución normal de media 120 y desviación típica 2. Realizada una medición cualquiera, calcule la probabilidad de que

(a) Proporcione un voltaje superior a 118. Un voltaje entre 116 y 118.

(b) Se obtenga un voltaje que difiera del voltaje medio en al menos una unidad.

Solución

Al tipificar la variable aleatoria X que mide el voltaje del circuito, se obtiene una variable

$$Z = \frac{X - 120}{2}$$

cuya distribución es una normal de media 0 y desviación típica 1.

Figura 2: Probabilidades: $P(Z > -1)$ y $P(Z < 1)$

(a) En este apartado nos están pidiendo la probabilidad del suceso $\{X > 118\}$. Utilizando la estandarización anterior se tiene que

$$P(X > 118) = P(Z > \frac{118 - 120}{2}) = P(Z > -1).$$

Teniendo en cuenta la simetría de la distribución normal, se obtendrá que $P(Z > -1) = P(Z < 1) = \Phi(1)$ —véase la figura 2—, siendo Φ la función de distribución de una $N(0, 1)$. Por tanto,

$$P(X > 118) = P(Z > -1) = P(Z < 1) = \Phi(1) = 0.8413.$$

Para la segunda de las cuestiones de este apartado, se obtiene, después de tipificar la variable X, que

$$P(116 < X < 118) = P(\frac{116 - 120}{2} < Z < \frac{118 - 120}{2}) = P(-2 < Z < -1).$$

De nuevo, teniendo en cuenta la simetría de la distribución (ver figura 3), podremos concluir que

$$P(116 < X < 118) = P(-2 < Z < -1) = P(1 < Z < 2)$$

$$= P(Z < 2) - P(Z < 1) = \Phi(2) - \Phi(1) = 0.9772 - 0.8413 = 0.1359.$$

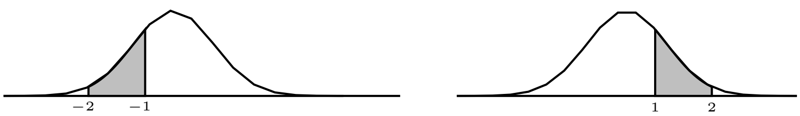


Figura 3: Probabilidades: $P(-2 < Z < -1)$ y $P(1 < Z < 2)$

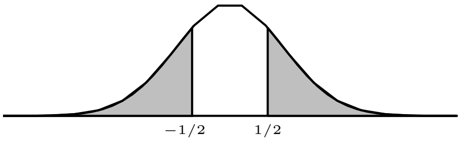


Figura 4: Función de densidad de una $N(0,1)$

(b) Una medida difiere del voltaje medio en al menos una unidad cuando $|X-120|>1$. Consecuentemente, la probabilidad pedida será

$$P(|X-120|>1)=P(\frac{|X-120|}{2}>\frac{1}{2})=P(|Z|>\frac{1}{2}).$$

De nuevo por la simetría de la distribución (ver figura 4), se puede afirmar que $P(|Z|>\frac{1}{2})=2P(Z>\frac{1}{2})$. Por tanto,

$$P(|X-120|>1)=2P(Z>\frac{1}{2})=2[1-\Phi(\frac{1}{2})]=2[1-0.6915]=0.617.$$

□

Problema 7. El tiempo que un ordenador tarda en ejecutar cierto algoritmo es una variable aleatoria con distribución normal de media y varianza desconocidas. Se sabe que el 15.87 % de las ocasiones el algoritmo tarda en ejecutarse al menos 6 segundos y que el 99 % de las ocasiones el tiempo de ejecución no es superior a 7 segundos. Determínese la media y la desviación típica de la distribución.

Solución

Sea X la variable aleatoria tiempo de ejecución del algoritmo; denotaremos la media y la varianza desconocidas de dicha variable por μ y σ^2 respectivamente. El enunciado del problema establece las siguientes condiciones:

$$P(X\geq 6)=0.1587 \quad , \quad P(X\leq 7)=0.99.$$

De la primera de ellas se obtiene que

$$P(X\geq 6)=P(Z\geq\frac{6-\mu}{\sigma})=1-P(Z\leq\frac{6-\mu}{\sigma})=0.1587.$$

Consecuentemente, $P(Z\leq\frac{6-\mu}{\sigma})=\Phi(\frac{6-\mu}{\sigma})=0.8413$, lo cual implica que

$$\frac{6-\mu}{\sigma}=\Phi^{-1}(0.8413)=1,$$

valor que se obtiene de las tablas de la distribución $N(0,1)$.

De la misma manera, la segunda condición conduce a

$$P(X \leq 7) = P(Z \leq \frac{7-\mu}{\sigma}) = \Phi(\frac{7-\mu}{\sigma}) = 0.99,$$

de donde se deduce que

$$\frac{7-\mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(0.99) = 2.33.$$

Las dos condiciones anteriores dan lugar al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{6-\mu}{\sigma} = 1 \quad , \quad \frac{7-\mu}{\sigma} = 2.33$$

del cual se obtienen los valores desconocidos de la media y la desviación típica: $\mu = 5.25$ y $\sigma = 0.75$.

$\square$

Problema 8. Cierto aparato registra el nivel de saturación de la red eléctrica en una comarca. El error relativo porcentual de la medida dada por el aparato es una variable aleatoria continua X con función de distribución

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } x < 0 \\ 1-(1-x)^3 & , \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & , \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

Determinar:

(a) La función de densidad de la variable X.

(b) La probabilidad de que una medida registrada por el aparato tenga un error entre el 0.1 % y el 0.2 %.

(c) El error relativo medio.

Solución

(a) La representación gráfica de la función de distribución $F(x)$ es la que aparece en la figura 5.

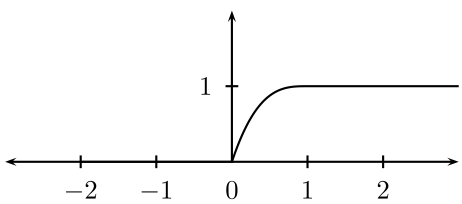


Figura 5: Función de distribución de la variable aleatoria X

Puesto que la variable X es continua, la función de densidad se obtiene derivando la de distribución. Dicha función viene dada por

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } x < 0 \\ 3(1-x)^2 & , \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

Su representación gráfica es la que aparece en la figura 6.

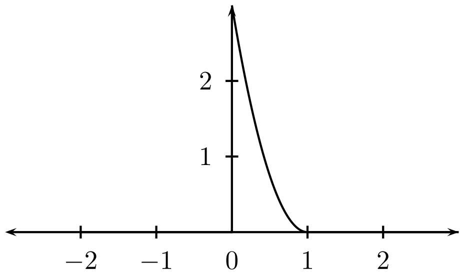


Figura 6: Función de densidad de la variable aleatoria X

(b) El error de medida está entre el 0.1 % y el 0.2 % cuando $0.1 \leq X \leq 0.2$. Por tanto, la probabilidad pedida será

$$P(0.1 \leq X \leq 0.2) = \int_{0.1}^{0.2} f(x)\,dx = 3\int_{0.1}^{0.2} (1-x)^2\,dx = 0.217.$$

Esta probabilidad es el área sombreada de la figura 7.

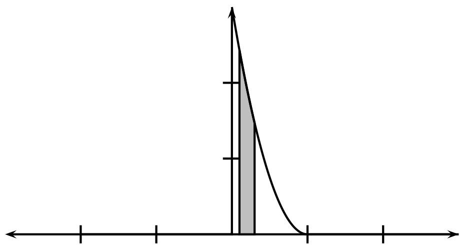


Figura 7: $P(0.1 \leq X \leq 0.2)$

Un modo alternativo de llegar al mismo resultado es haciendo uso de la función de distribución dada en el enunciado del problema.

$$P(0.1 \leq X \leq 0.2) = \int_{0.1}^{0.2} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0.2} f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{0.1} f(x)\,dx$$

$$= F(0.2) - F(0.1) = 1 - (1-0.2)^3 - (1 - (1-0.1)^3) = 0.217.$$

(c) Finalmente, en este apartado nos están pidiendo la media de la variable aleatoria X que mide el error, la cual viene dada por

$$E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = 3\int_0^1 x(1-x)^2\, dx = 3\left(\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right)\Bigg]_0^1 = \frac{1}{4}$$

□

Problema 9. La variable aleatoria X que mide —en días— el tiempo de funcionamiento de determinados equipos, hasta que comienzan a presentar fallos, tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ,\ \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{1000} e^{-x/1000} & ,\ \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Determinar:

(a) La probabilidad de que uno de estos equipos dure al menos 100 días.

(b) La probabilidad de que un equipo que no ha fallado en 100 días, comience a hacerlo antes de 500.

(c) Si un sistema está formado por tres de estos equipos conectados en serie, ¿cuál es la probabilidad de que el sistema funcione correctamente durante al menos 300 días? Supóngase que cada equipo funciona con independencia de los otros.

Solución

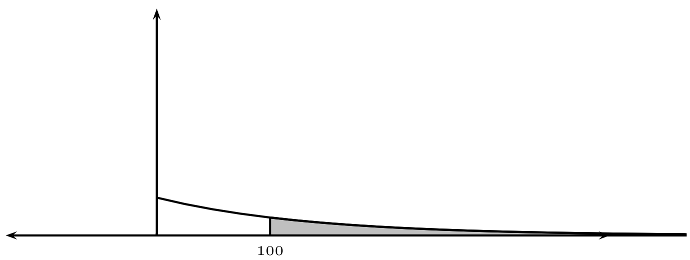


Figura 8: $P(X > 100)$ para una exponencial de media 1000

(a) La función de densidad del enunciado es la de una exponencial de media 1000. Un equipo durará al menos 100 días cuando $X > 100$; con lo cual, la probabilidad pedida —área de la zona sombreada de la figura 8— será

$$P(X > 100) = \int_{100}^{\infty} f(x)\, dx = \frac{1}{1000}\int_{100}^{\infty} e^{-x/1000}\, dx = e^{-1/10}.$$

(b) Puesto que nos suministran la información adicional de que *cierto equipo ha durado al menos* 100 *días*, nos enfrentamos ante el cálculo de una probabilidad condicionada.

Nos piden calcular la probabilidad del suceso $\{X < 500\}$ supuesto que se cumple que $X > 100$, es decir, $P(X < 500|X > 100)$.

En efecto, de la definición de probabilidad de un suceso condicionado por otro se obtiene que

$$P(X < 500|X > 100) = \frac{P(100 < X < 500)}{P(X > 100)}.$$

La probabilidad del denominador es la que ya hemos calculado en el apartado anterior.

Para el cálculo de la probabilidad del numerador —área sombreada de la figura 9—, se integra la densidad exponencial en el intervalo $(100, 500)$, obteniéndose que

$$P(100 < X < 500) = \int_{100}^{500} f(x)\,dx = \frac{1}{1000}\int_{100}^{500} e^{-x/1000}\,dx$$

$$= -e^{-x/1000}\Big]_{100}^{500} = e^{-1/10} - e^{-1/2}.$$

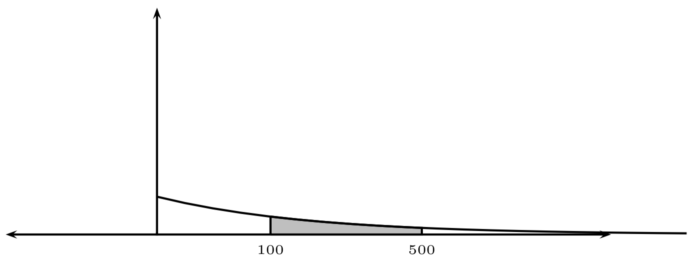


Figura 9: $P(100 < X < 500)$ para una exponencial de media 1000

Ahora ya tenemos todos los ingredientes que permiten evaluar la probabilidad condicionada que nos piden:

$$P(X < 500|X > 100) = \frac{e^{-1/10} - e^{-1/2}}{e^{-1/10}} = 1 - e^{-2/5}.$$

(c) Vamos a denotar por E, E_1, E_2 y E_3 los sucesos:

$E =$ "*El sistema funciona correctamente durante al menos* 300 *días*"

$E_1 =$ "*El equipo 1 funciona correctamente durante al menos* 300 *días*"

$E_2 =$ "*El equipo 2 funciona correctamente durante al menos* 300 *días*"

$E_3 =$ "*El equipo 3 funciona correctamente durante al menos* 300 *días*"

Figura 10: Conexión en serie de los tres equipos

Dado que la conexión es en serie —véase la figura 10—, el sistema funcionará durante al menos 300 días cuando los tres equipos que lo componen permanezcan en funcionamiento por al menos este periodo de tiempo. Por tanto, teniendo en cuenta la hipótesis de independencia del enunciado, se tendrá que

$$P(E) = P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1)P(E_2)P(E_3).$$

Estas tres probabilidades: $P(E_1)$, $P(E_2)$ y $P(E_3)$ son iguales y vienen dadas por

$$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \int_{300}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{1000}\int_{300}^{\infty} e^{-x/1000}\,dx = e^{-3/10}.$$

Consecuentemente, la probabilidad pedida será $P(E) = e^{-9/10}$.

□