Variable Aleatoria

Variable Aleatoria

Una **variable aleatoria** es una función que asigna un número real a cada uno de los puntos de un espacio muestral S.

Lanzamiento de 2 monedas

$\boxed{X(s) \equiv \text{Número de CARAS}}$

s	$X(s)$
CC	$\rightarrow$ 2
CX	$\rightarrow$ 1
XC	$\rightarrow$ 1
XX	$\rightarrow$ 0

Variable Aleatoria Discreta

Cuando los valores que toma una variable aleatoria son *finitos o infinitos numerables* se dice que es **discreta**.

– Resultado obtenido al lanzar un dado

$$\{1,2,3,4,5,6\}$$

– Número de veces que hay que lanzar una moneda hasta obtener una CARA

$$\{1,2,3,4, ...\}$$

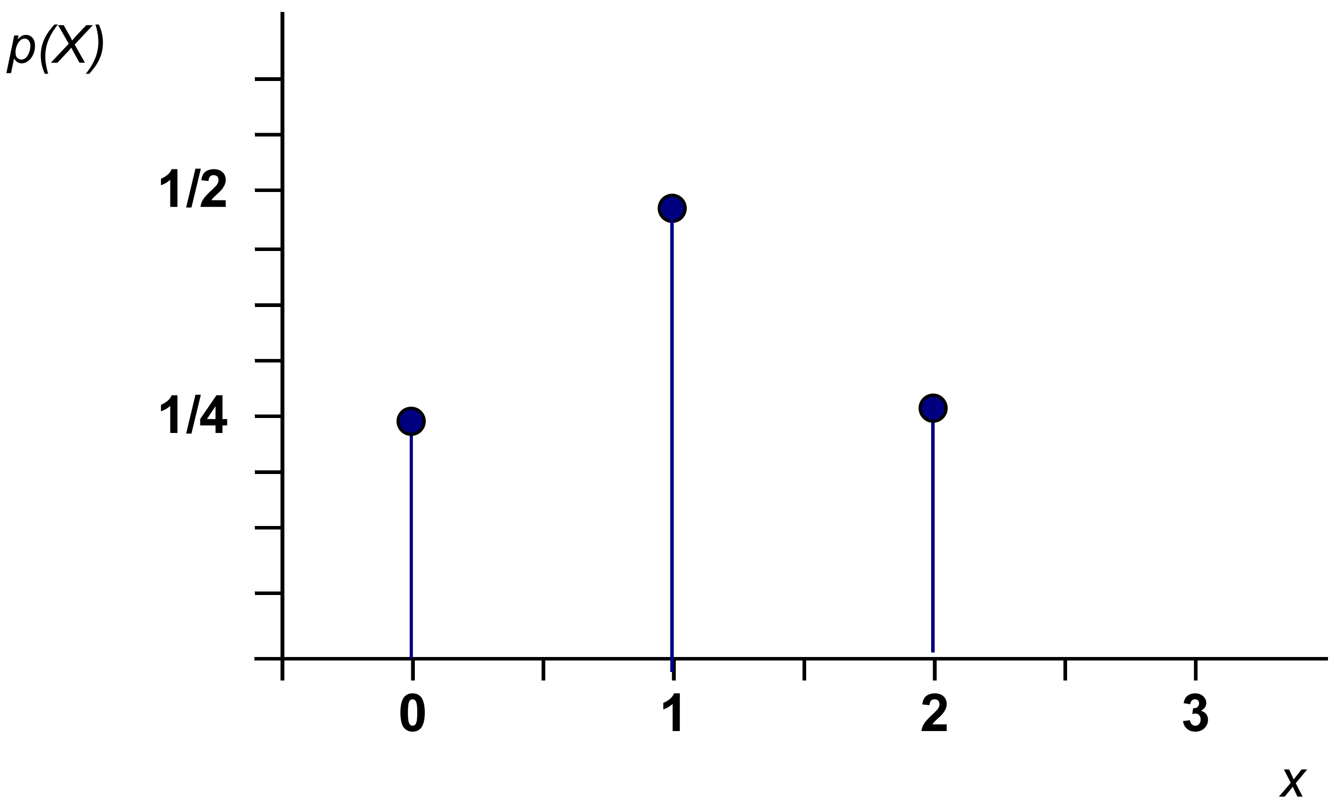
Distribución de probabilidad

Sea $\{ x_1 , x_2 , ..., x_n \}$ los valores que puede tomar la variable aleatoria X. Se denomina **distribución de probabilidad** de la variable aleatoria a $P(X=x_i)$ que cumple:

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ P(X= x_i) \geq 0 \\ \bullet\ \Sigma_{i=1} P(X= x_i) = 1. \end{array}}$$

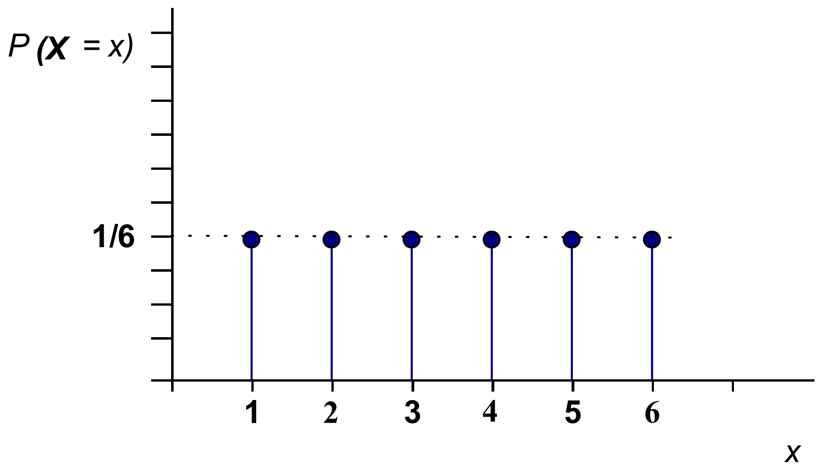
Nº de Caras al lanzar 2 monedas $\left\{ \begin{array}{lcl} \underline{x} & & \underline{P(X=x)} \\ 0 & \rightarrow & 1/4 \\ 1 & \rightarrow & 1/2 \\ 2 & \rightarrow & 1/4 \end{array} \right.$

Distribución de probabilidad



Lanzamiento de un dado

x	$P(X = x)$
1	$1/6$
2	$1/6$
3	$1/6$
4	$1/6$
5	$1/6$
6	$1/6$



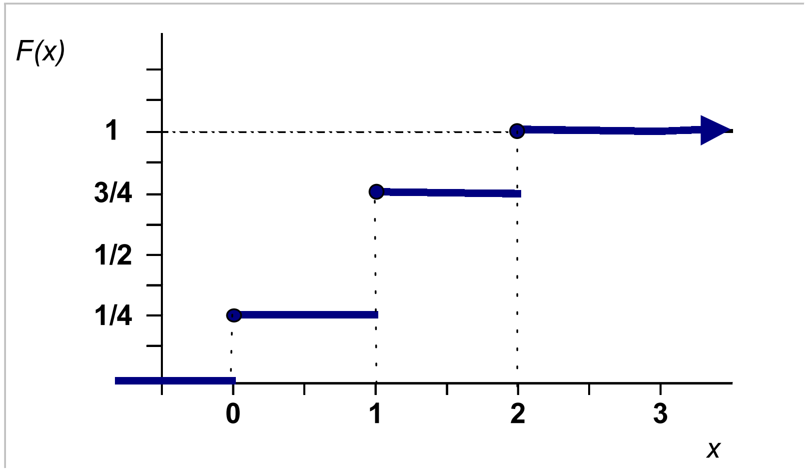
Función de distribución

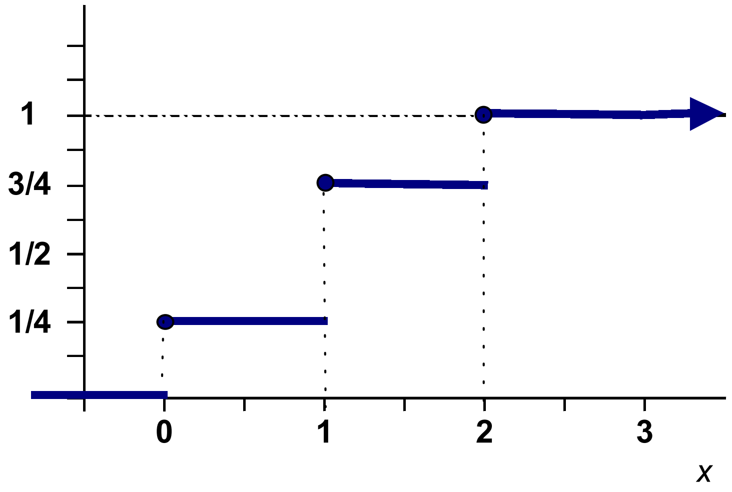
La función de distribución $F_X(x)$ de una variable aleatoria X se define para todo número real x como:

$$F_X(x) = P_X(X \leq x).$$

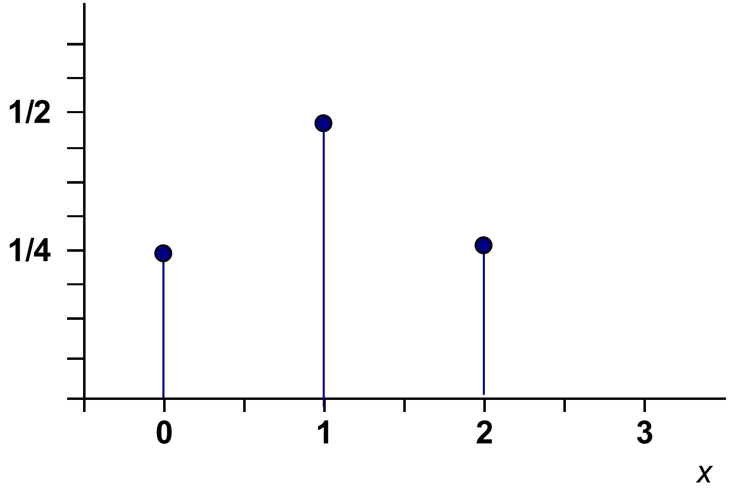
Ejemplo. X = Número de caras al lanzar 2 monedas

x	$F_X(x)$
$(-\infty,0)$	0
$[0,1)$	1/4
$[1,2)$	3/4
$[2,\infty)$	1



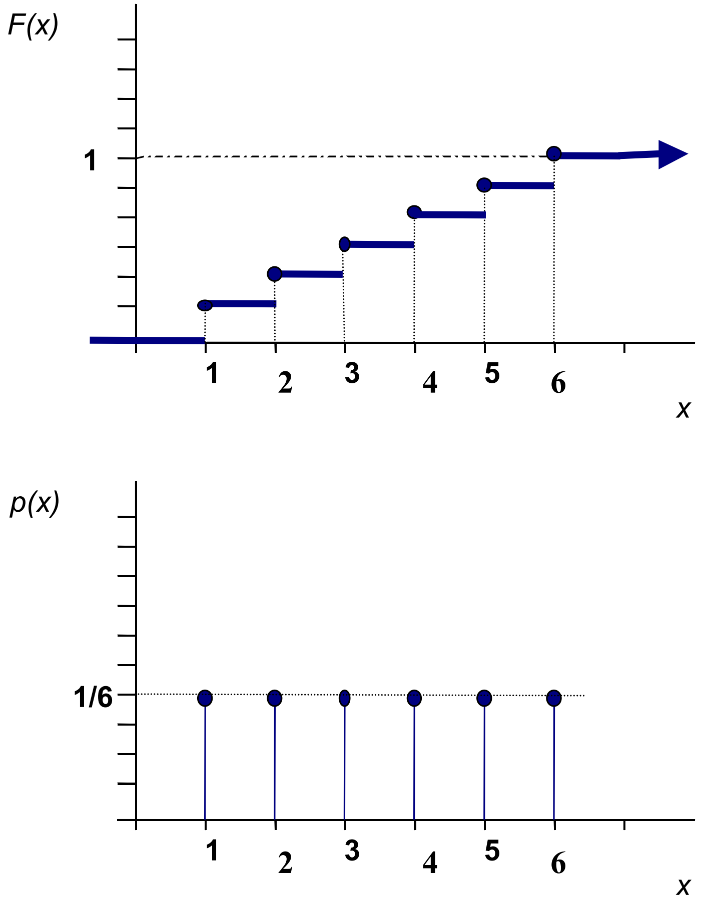


Función de Distribución



Distribución puntual de probabilidad

Lanzamiento de un dado



x	$P(X = x)$
1	$1/6$
2	$1/6$
3	$1/6$
4	$1/6$
5	$1/6$
6	$1/6$

Una función F(x) es una **función de distribución** si y sólo si cumple las siguientes condiciones:

a. $\lim_{x\to -\infty} F(x) = 0$ y $\lim_{x\to +\infty} F(x) = 1.$

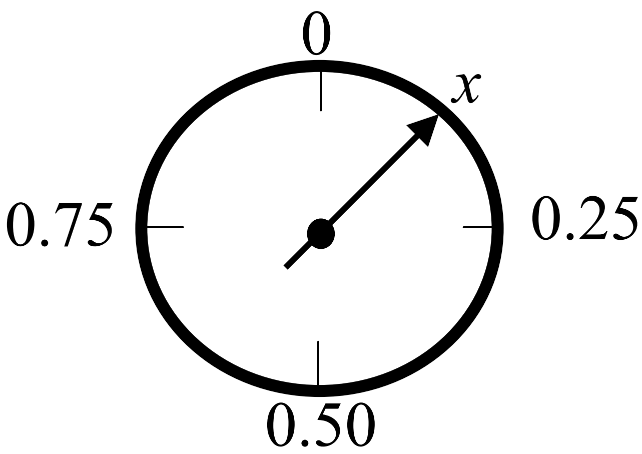
b. $F(x)$ es una función no decreciente.

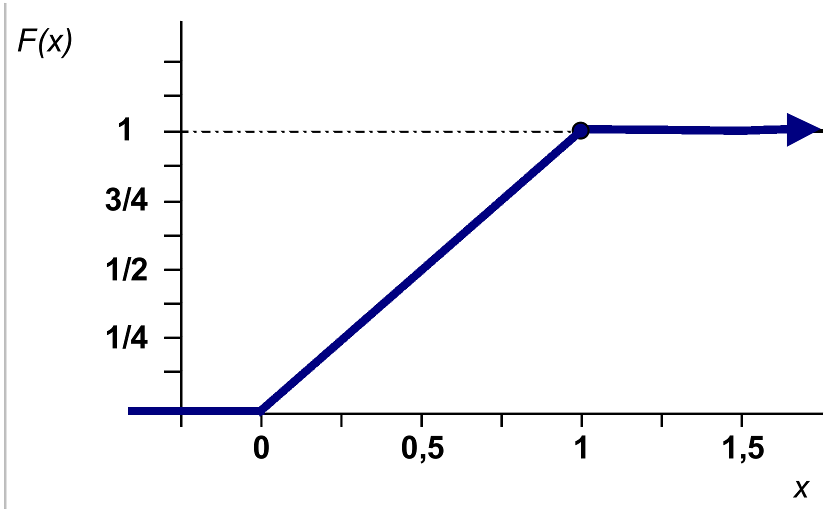
c. $F(x)$ es continua por la derecha :

$$\forall h > 0, \quad \lim_{h\to 0} F(x+h) = F(x).$$

Variable aleatoria continua

Una variable aleatoria X es continua si su función de distribución $F_X(x)$ es continua.





$$F_X(x) = x, \quad x \in [0,1)$$

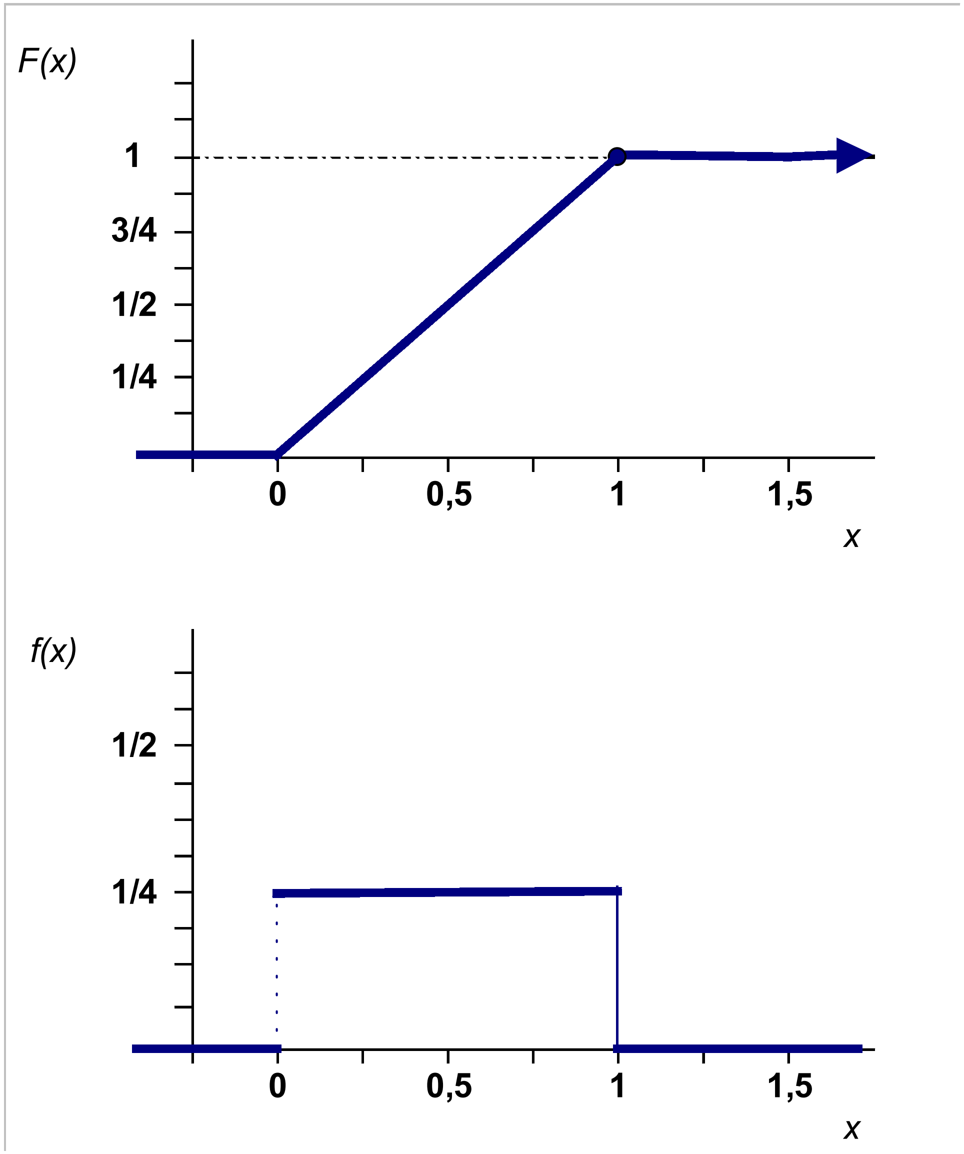
Función de densidad

La **función de densidad** de probabilidad $f_X(x)$ de una variable aleatoria continua X es la función que verifica

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt, \quad \forall\, x.$$

Si $F_X(x)$ es derivable, además

$$\frac{d}{dx} F_X(x) = f_X(x).$$



Función de distribución

$$F_X(x) = x, \quad x \in [0,1)$$

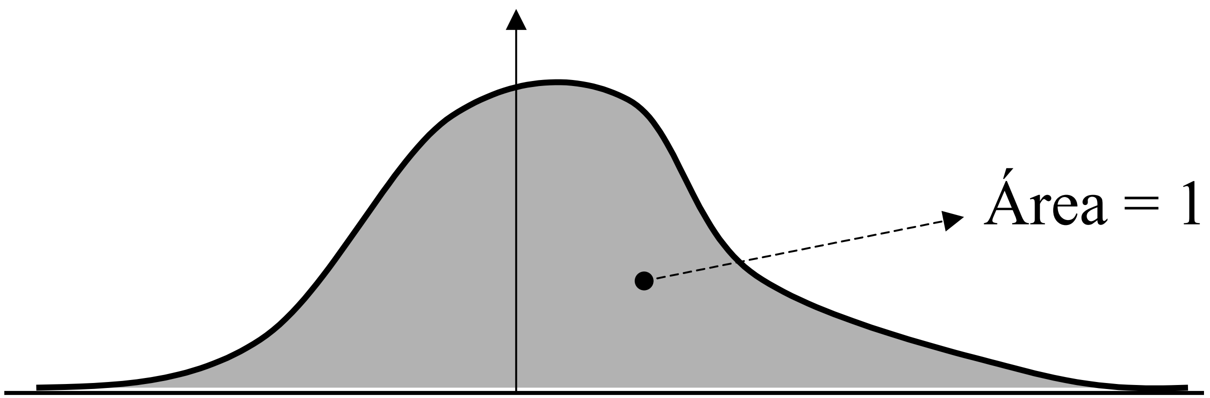
Función de densidad

$$f_X(x) = 1, \quad x \in [0,1]$$

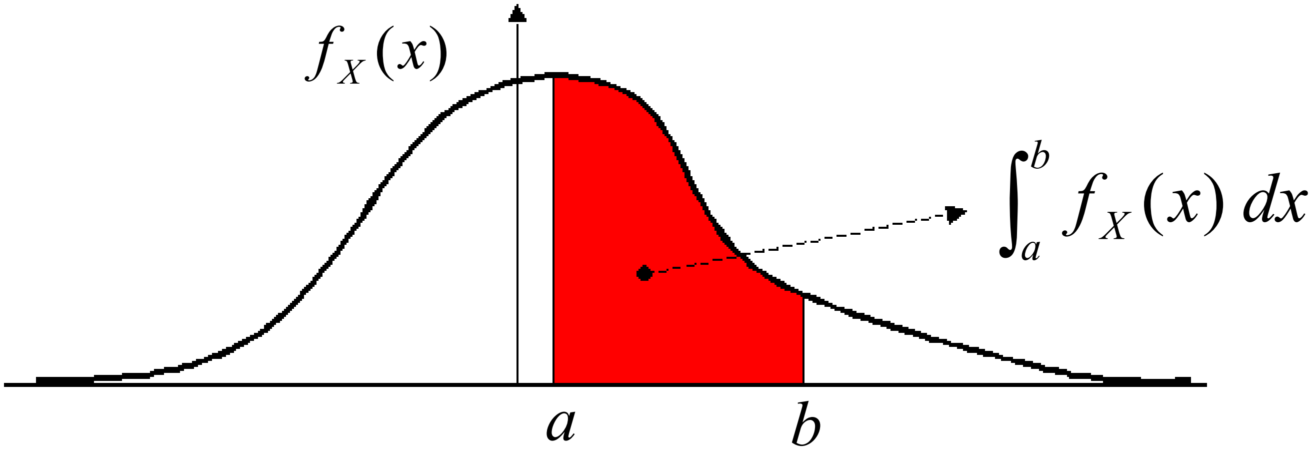
Una función $f_X(x)$ es una **función de densidad de probabilidad** de una variable aleatoria X si y sólo si cumple:

a. $f_X(x) \geq 0$ para todo x.

b. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = 1$.



Cálculo de probabilidades



$$P(a \le X \le b) = F_X(b) - F_X(a)$$

$$= \int_a^b f_X(x)\,dx$$

Transformaciones

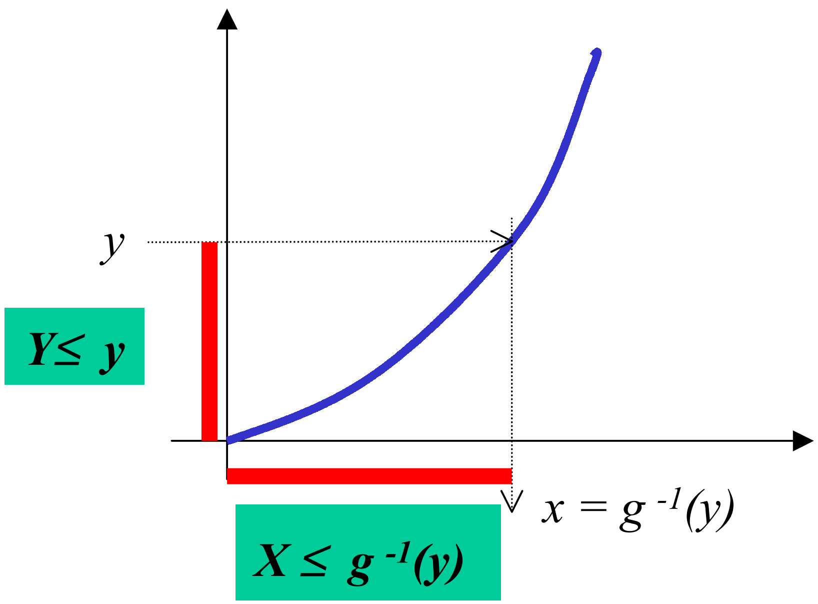
Dada una variable aleatoria X con función de densidad $f_X(x)$ vamos a ver como se obtiene la función de densidad $f_Y(y)$ de la variable aleatoria Y, definida como

$$Y = g(X)$$

Casos a considerar :

* La función g es monótona creciente
* La función g es monótona decreciente
* La función g no es monótona

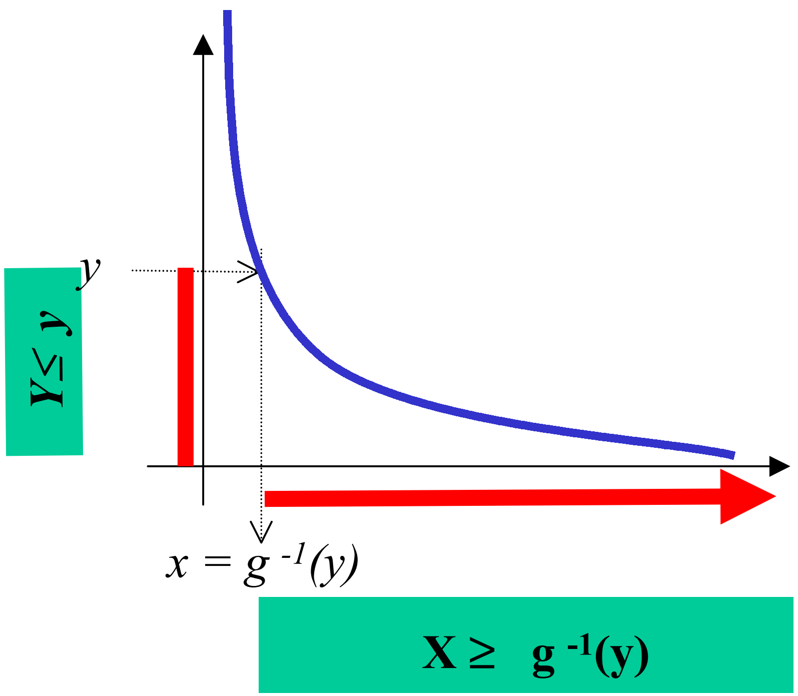
Función *g* creciente



$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \le y) \\
&= P(g(X) \le y) \\
&= P(\, X \le g^{-1}(y)\,) \\
&= F_X(g^{-1}(y))
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \frac{dF_Y(y)}{dy} \\
&= \frac{d\, g^{-1}(y)}{dy} \times f_X(g^{-1}(y))
\end{aligned}
}
$$

Función *g* decreciente



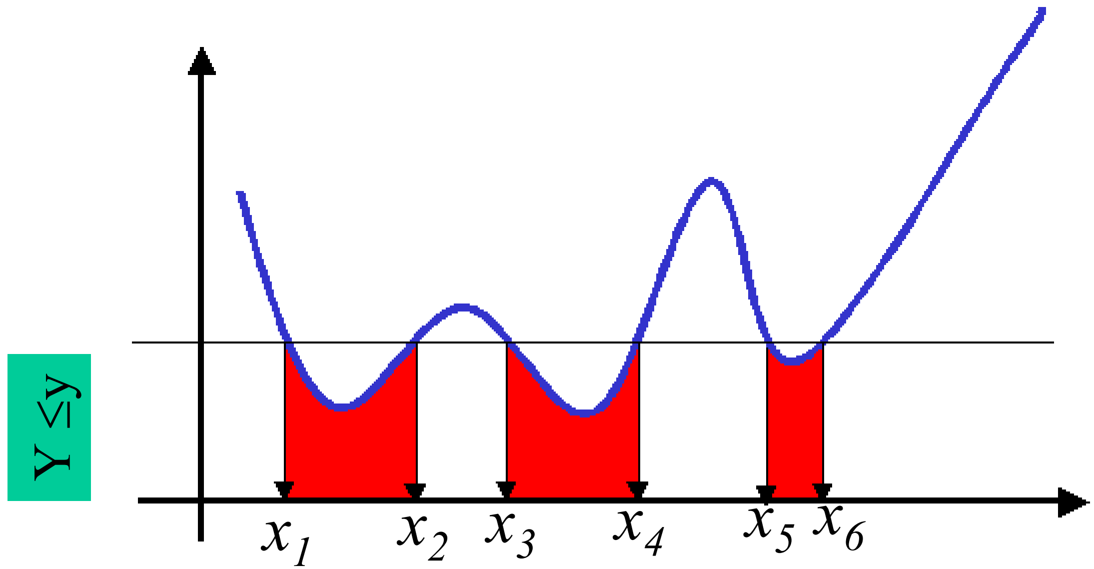
$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \le y) \\
&= P(g(X) \le y) \\
&= P(\ X \ge g^{-1}(y)\ ) \\
&= 1 - F_X(g^{-1}(y))
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \frac{dF_Y(y)}{dy} \\
&= -\frac{d\ g^{-1}(y)}{dy} \times f_X(g^{-1}(y))
\end{aligned}
}
$$

Función monótona

$$f_Y(y) = \left| \frac{d\ g^{-1}(y)}{dy} \right| \times f_X(g^{-1}(y))$$

Transformación no monótona



$$F_Y(y) = P(Y \le y)$$
$$= P(x_1 \le X \le x_2) + P(x_3 \le X \le x_4) + P(x_5 \le X \le x_6)$$

Ejemplo de transformación

El radio de una esfera es una variable aleatoria cuya función de densidad es

$$f_X(x) = 3x^2, \quad 0 \le x \le 1.$$

¿Cuál es la función de densidad del volumen?

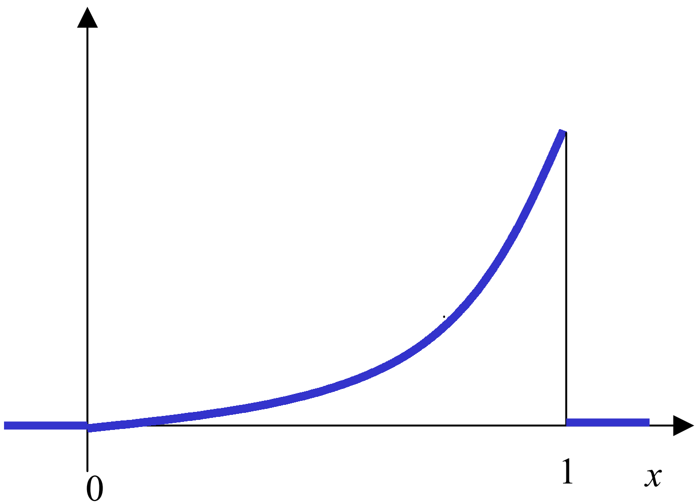
$$Y = \text{Volumen de la esfera}$$

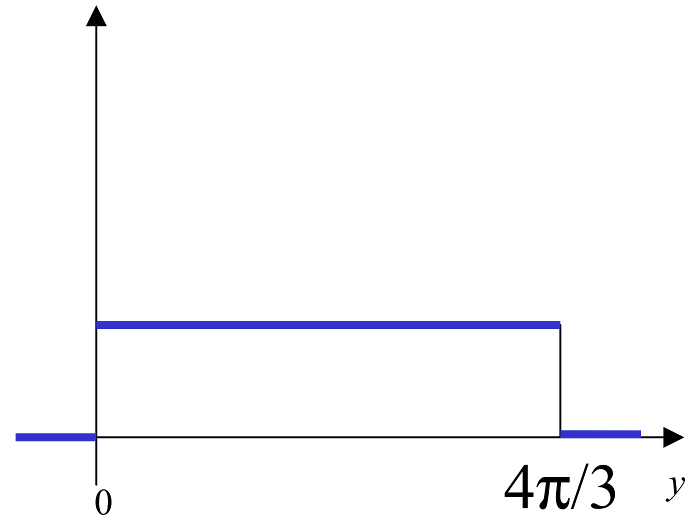
$$Y = \frac{4}{3}\pi X^3 \Rightarrow X = \left(\frac{3Y}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$g(x) = \frac{4}{3}\pi x^3; \Rightarrow g^{-1}(y) = \left(\frac{3y}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}};$$

$$f_Y(y) = \left|\frac{d}{dy} g^{-1}(y)\right| \times f_X(g^{-1}(y))$$

$$= \frac{3}{4\pi}, \quad 0 \le y \le \frac{4\pi}{3}.$$





$$f_X(x) = 3x^2, \quad 0 \le x \le 1.$$

$$f_Y(y) = \frac{3}{4\pi}, \quad 0 \le y \le \frac{4\pi}{3}.$$

$$y = \frac{4}{3}\pi x^3$$

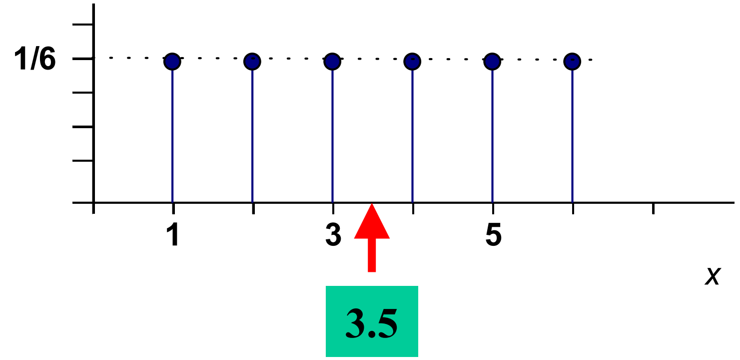
Esperanza

Se define **esperanza** o **media** de una variable aleatoria discreta X y se representa por $E[X]$ al valor

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i).$$

Ejemplo : Lanzamiento de un dado

$$E[X] = 1\times\frac{1}{6} + 2\times\frac{1}{6} + 3\times\frac{1}{6} + 4\times\frac{1}{6} + 5\times\frac{1}{6} + 6\times\frac{1}{6} = 3.5$$



Centro de la distribución de probabilidad

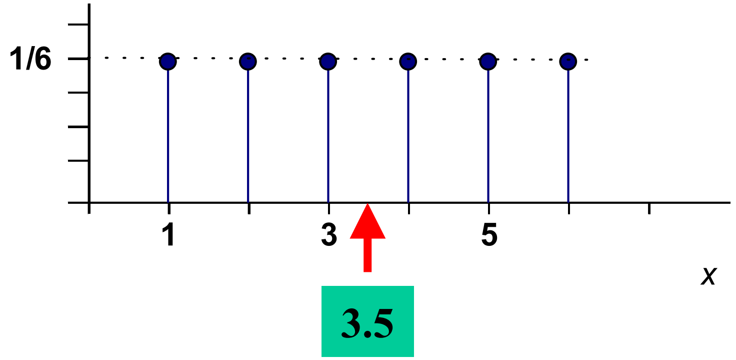
Esperanza

Se define **esperanza** o **media** de una variable aleatoria discreta X y se representa por $E[X]$ al valor

$$E[X] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} xP(X = x).$$

Ejemplo : Lanzamiento de un dado

$$E[X] = 1\times\frac{1}{6} + 2\times\frac{1}{6} + 3\times\frac{1}{6} + 4\times\frac{1}{6} + 5\times\frac{1}{6} + 6\times\frac{1}{6} = 3.5$$



Centro de la distribución de probabilidad

Ejemplo

El sistema de planificación familiar de un extraño país consiste en permitir el nacimiento de hijos hasta que nazca la primera hija. Si los sucesos niño o niña son equiprobables e independientes, ¿cuál será el tamaño medio familiar?

$$P(X = k) = (1/2)^k, \quad k = 1,2,3,\ldots\infty$$

$$E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k \times (1/2)^k = 2.$$

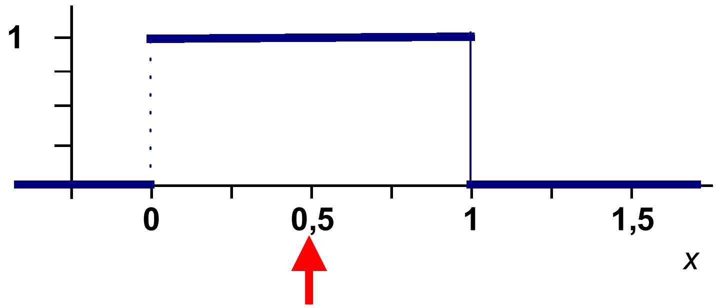
Esperanza

Se define **esperanza** o **media** de una variable aleatoria continua X con función de densidad $f_X(x)$ y se representa por $E[X]$ al valor

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx.$$

$$\text{Ejemplo: Distribución uniforme } f_X(x) = 1,\ 0 \le x \le 1$$

$$E[X] = \int_0^1 x \times 1\, dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}.$$



Centro de la distribución de probabilidad

Propiedades de E[X]

- Transformaciones lineales Y = a + b X

$$E[aX+b]=aE[X]+b$$

- Transformaciones no lineales $Y = g(X)$

$$E[Y]=\int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)\,dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f_X(x)\,dx$$

$$=E[g(X)]$$

Varianza

Sea X una variable aleatoria con media μ, se denomina **varianza** a

$$Var(X) = E[(X-\mu)^2].$$

- Variable aleatoria discreta

$$Var[X] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 P(X=x).$$

- Variable aleatoria continua

$$Var[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f_X(x)\, dx$$

Propiedades de la varianza

1. $Var(X) = E[(X-\mu)^2]$

$$= E[X^2] - \mu^2.$$

2. $Var(aX+b) = a^2 Var(X)$

Ejemplos

Lanzamiento de un dado

$$Var[X] = (1^2 \times \frac{1}{6} + 2^2 \times \frac{1}{6} + 3^2 \times \frac{1}{6} + 4^2 \times \frac{1}{6} + 5^2 \times \frac{1}{6} + 6^2 \times \frac{1}{6}) - (3.5)^2$$

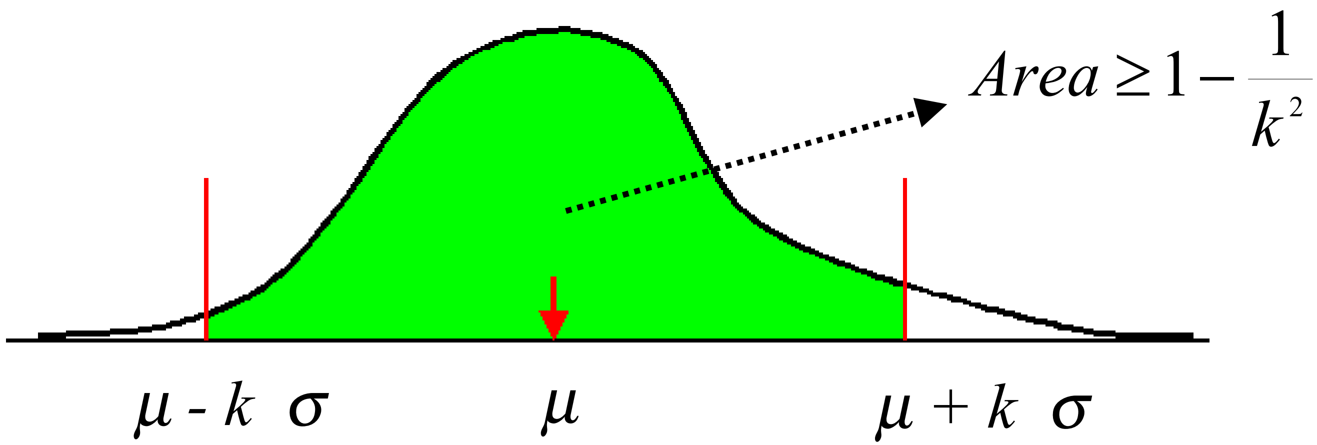
$$= \frac{35}{12}.$$

Distribución uniforme

$$\mathrm{Var[X]} = \int_0^1 x^2 \times 1 dx - (1/2)^2$$

$$= \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Desigualdad de Tchebychev



Para cualquier variable aleatoria

$$\mu = E[X] \qquad \sigma^2 = Var[X]$$

$$P(|X - \mu| \leq k\sigma) > 1 - \frac{1}{k^2}.$$