Modelos Univariantes

Proceso de Bernoulli

El resultado de un experimento admite dos categorías: "*Aceptable*" y "*Defectuoso*".

– Se repite el experimento *n* veces.

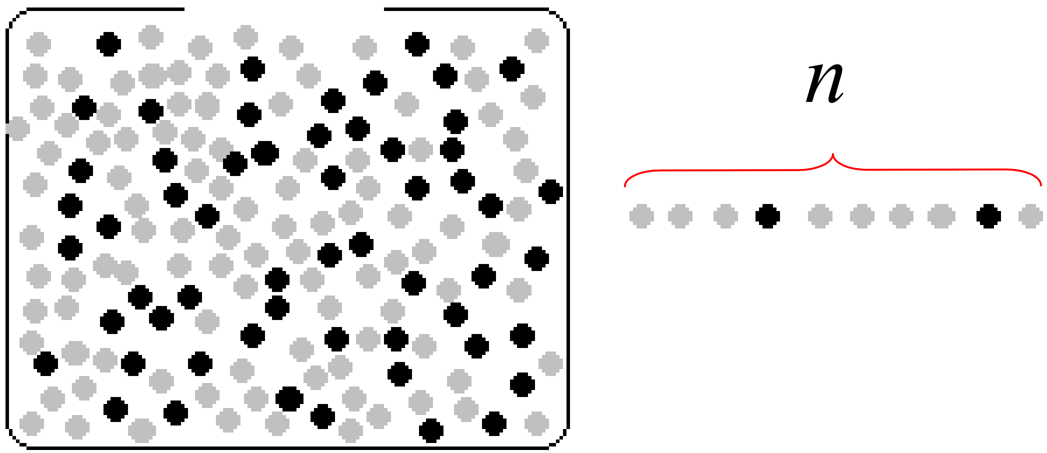
– La probabilidad de "*defectuoso*" es la misma *p* en todos los experimentos.

– Los experimentos son independientes.

Ejemplos de procesos de Bernoulli

- Lanzamiento de *n* monedas. Resultado: cara o cruz.
- Se extraen piezas al azar de un sistema continuo de fabricación. Se clasifican las piezas en aceptables o no.
- Lanzamiento de un dado *n* veces. En cada lanzamiento se clasifica como 6 o distinto de 6.

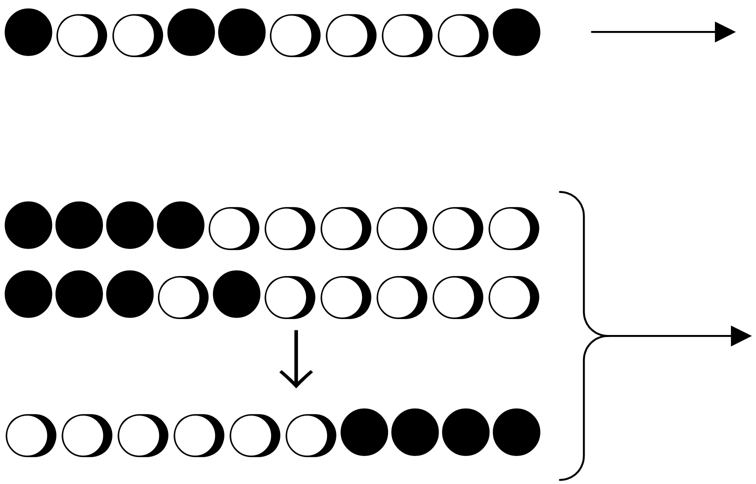
Distribución Binomial (n,p)



Proporción defectuosas = p

X = " Nº de defectuosas al extraer n piezas"

Distribución de probabilidad binomial *(n,p)*
n=10



$p^4(1-p)^6$

$\binom{10}{4}$

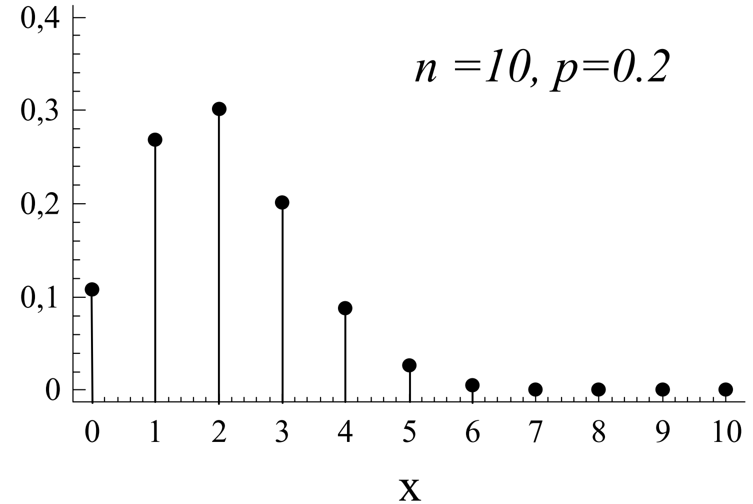
$$P(X=4)=\binom{10}{4}p^4(1-p)^6$$

Distribución de probabilidad binomial *(n,p)*

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,2,\ldots,n$$

(1) $P(X=k)\geq 0,\ \forall\ k.$

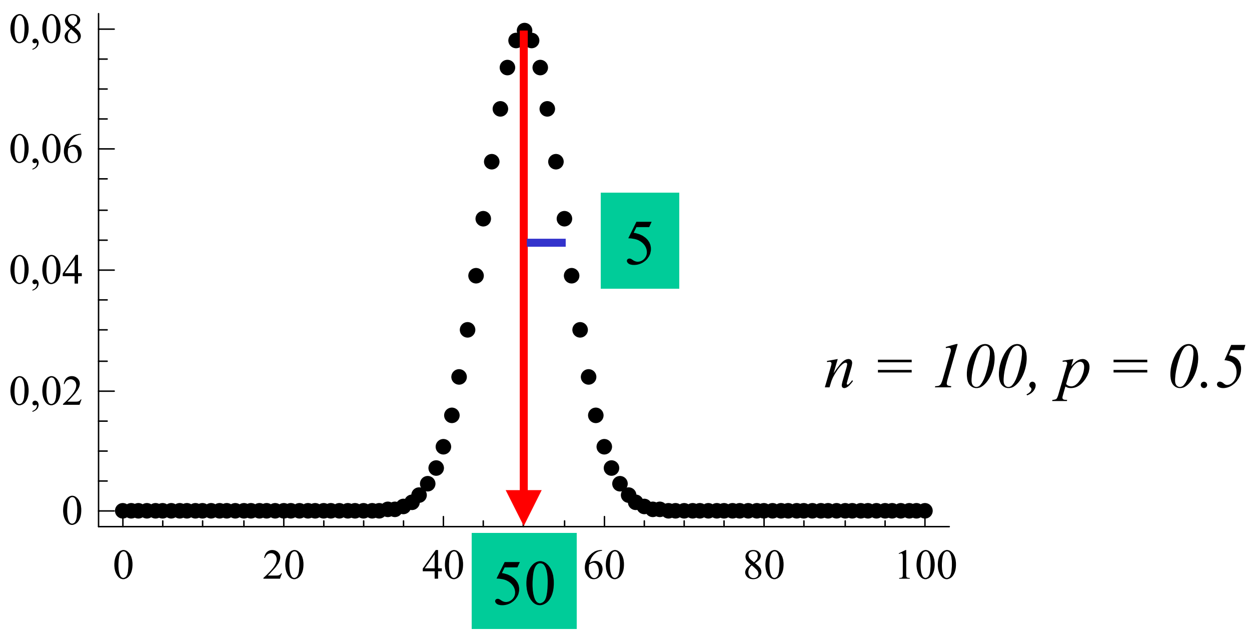
(2) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=1.$



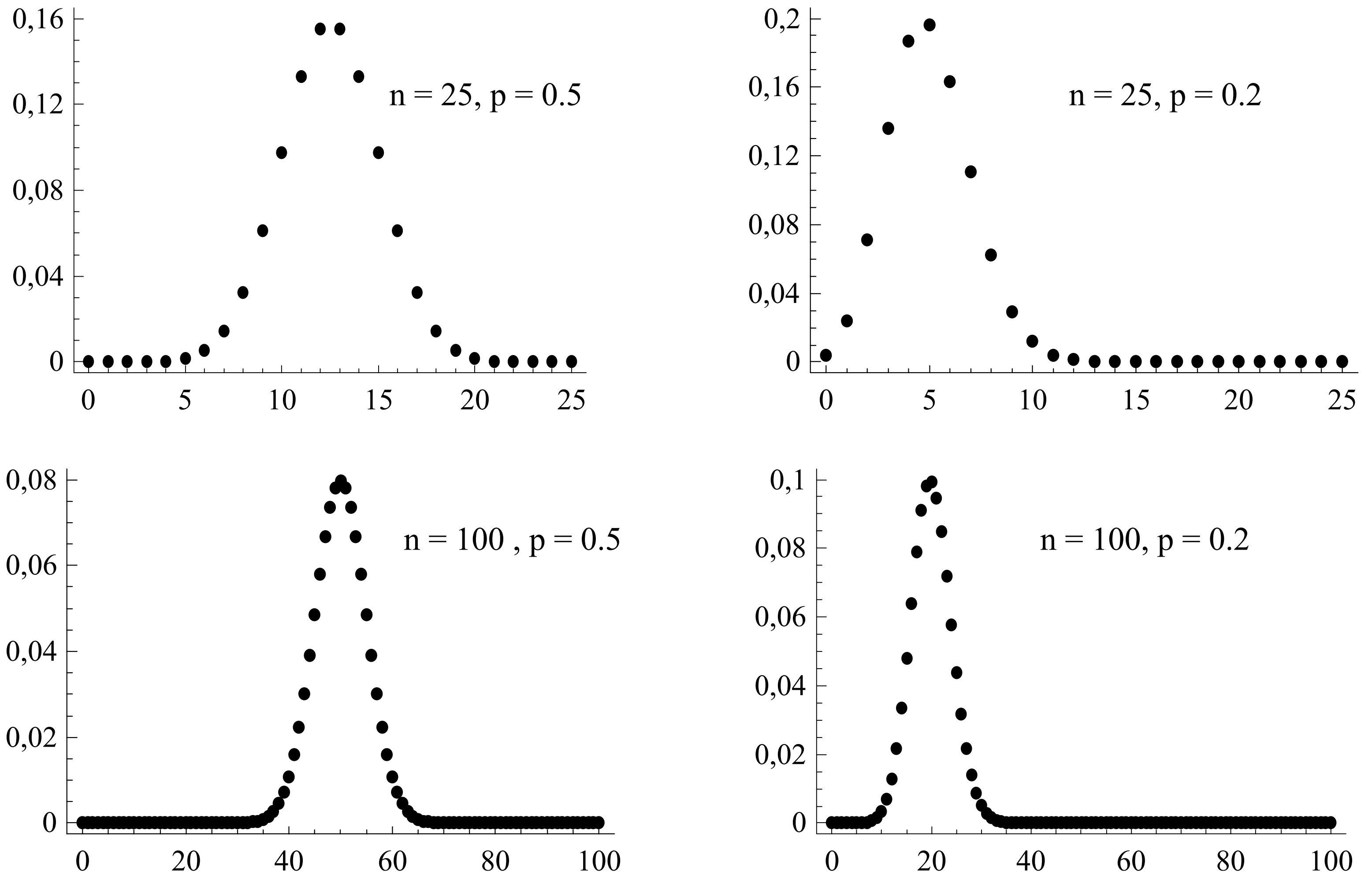
Propiedades de la dist. binomial

$$E[X] = \sum_{k=0}^{n} k \times P(X = k) = np.$$

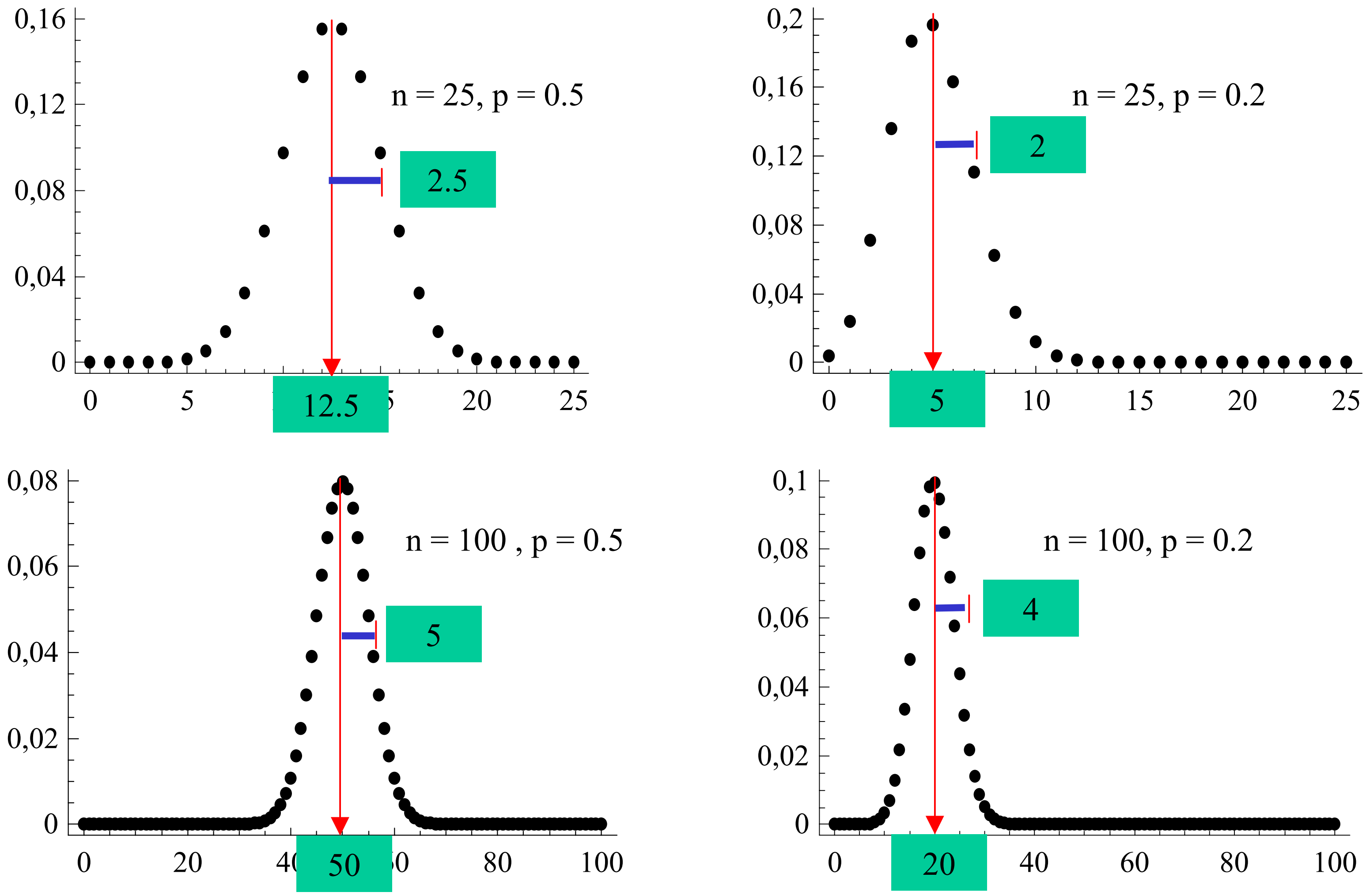
$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = np(1-p)$$



Distribuciones binomiales



Distribuciones binomiales



Ejemplo

Un contrato estipula la compra de componentes en lotes grandes que deben contener un máximo de 10% de piezas con algún defecto. Para comprobar la calidad se toman 11 unidades y se acepta el lote si hay como máximo 2 piezas defectuosas. ¿Es un buen procedimiento de control?

Sea p la proporción de piezas en un lote,

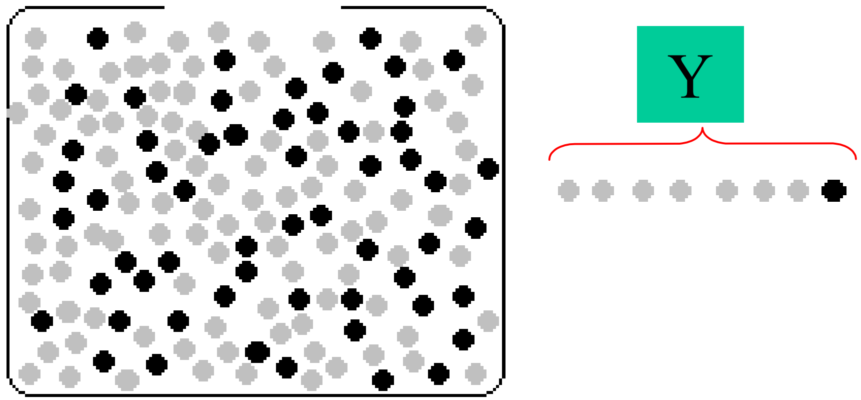
$$\mathrm{X} \equiv \text{Número de defectuosas en la muestra}$$

$$\mathrm{P(Aceptar)} = \mathrm{P(X \leq 2)}$$

$$= \binom{11}{0} p^0 (1-p)^{11} + \binom{11}{1} p^1 (1-p)^{10} + \binom{11}{2} p^2 (1-p)^9$$

p	5%	10%	15%	20%	25%
$P(Aceptar)$	0.985	0.910	0.779	0.617	0.45

Distribución Geométrica (p)



Proporción defectuosas = p

Y = "Piezas extraídas hasta que aparezca una defectuosa"

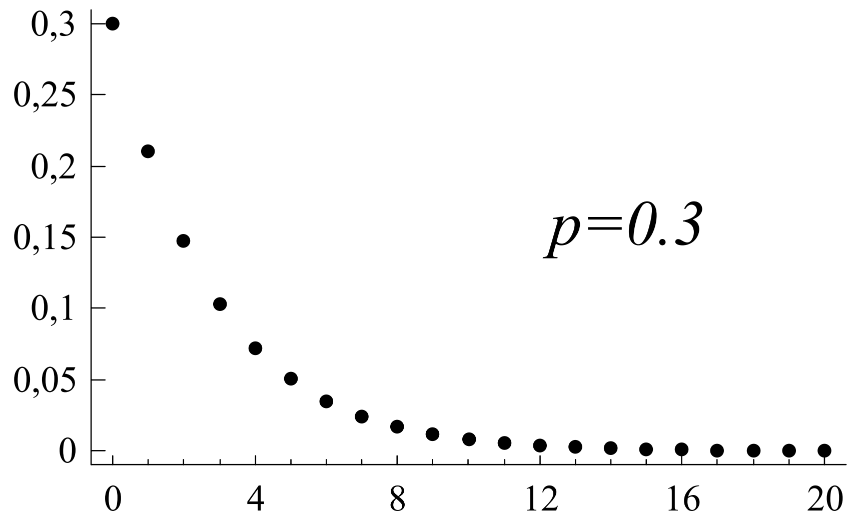
Distribución de probabilidad geométrica *(p)*

●	1	$\longrightarrow$	p
❍●	2	$\longrightarrow$	$(1-p)p$
❍❍●	3	$\longrightarrow$	$(1-p)^2p$
↓			↓
❍❍❍…●	k	$\longrightarrow$	$(1-p)^{k-1}p$

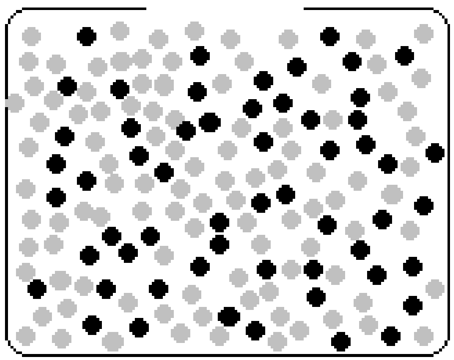
$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p, \quad k=1,2,3,\ldots$$

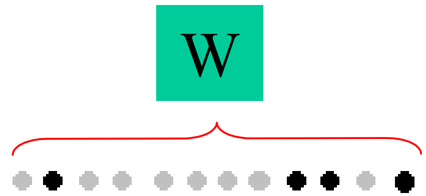
Propiedades de la v.a. geométrica

$$E[Y] = \frac{1}{p}, \qquad Var[Y] = \frac{1-p}{p^2}$$



Dist. Binomial Negativa (r,p)





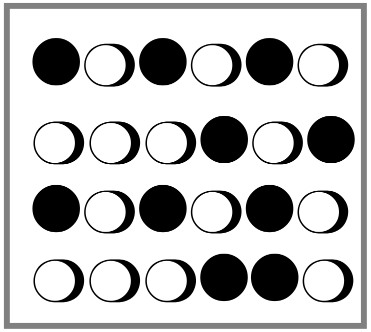
Ejemplo r =4

Proporción defectuosas = p

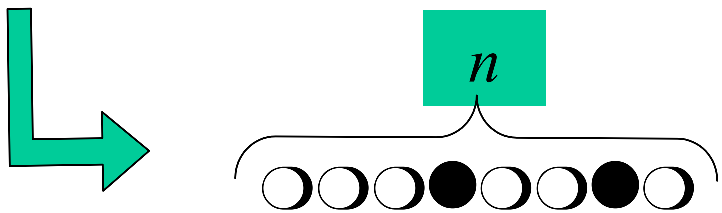
W = "Piezas extraídas hasta que aparezcan r defectuosas"

$$P(W = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, \quad k = r, r+1, r+2, \ldots.$$

Dist. Hipergeométrica (N,M,n)



Se extraen al azar y sin reposición $\underline{n}$ piezas de un lote de $\underline{N}$ en total de las que $\underline{K}$ son defectuosas (N pequeño).



V = "Número de piezas defectuosas al extraer $\underline{n}$"

$$P(V=k)=\frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}},\quad k=0,1,2,\ldots,n \quad y \quad n-(N-K)\le k\le K$$

Distribución de Poisson

- Número de defectos aparecidos en tramos de longitud fija de hilos de cobre.
- Número de partículas por centímetro cúbico en líquidos con sustancias en suspensión.
- Emisiones radiactivas: número de partículas emitidas en intervalos de tiempo fijo.
- Número de llamadas a una centralita de teléfonos en un día

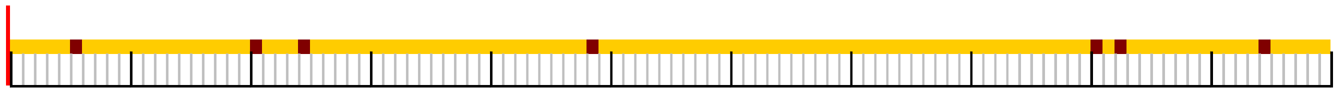
Distribución de Poisson

Ejemplo: Fabricación continua de conductor de cobre.

$\lambda \equiv$ Número medio de defectos cada 100 m

$X \equiv$ Número de defectos en un tramo de 100 m

Límite de la dist. binomial



$$P_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \qquad p = \frac{\lambda}{n}$$

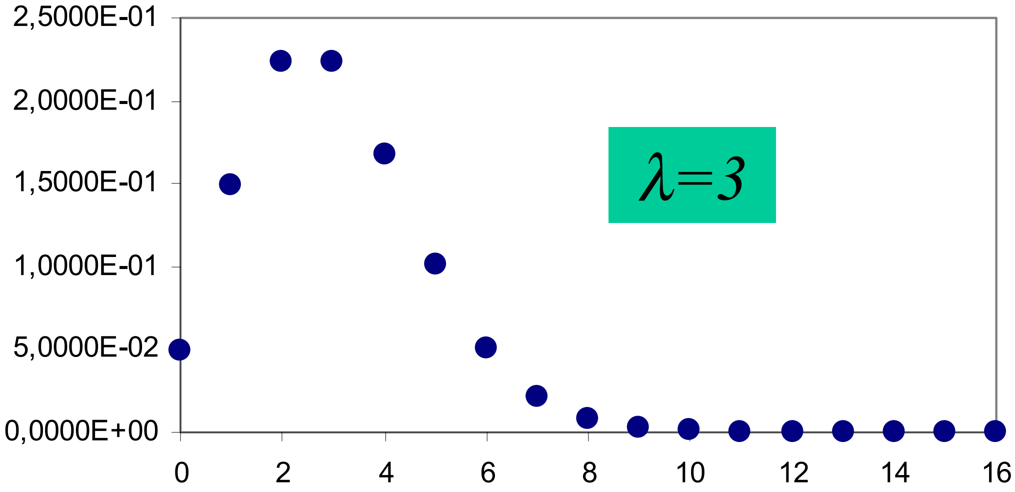
$$P_X(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-x)!\,x!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{n^x}}_{\to 1} \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\to e^{-\lambda}} \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}}_{\to 1}$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, \quad x = 0,1,2,\ldots$$

Distribución de Poisson

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, \quad x = 0,1,2,..$$



Media y Varianza

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, \quad x = 0,1,2,\ldots$$

$$E[X] = \sum_{x=0}^{\infty} x \times \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = \sum_{x=1}^{\infty} x \times \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}}_{e^{\lambda}} = \lambda$$

$$\boxed{E[X] = \lambda \qquad\qquad Var[X] = \lambda}$$

Ejemplo

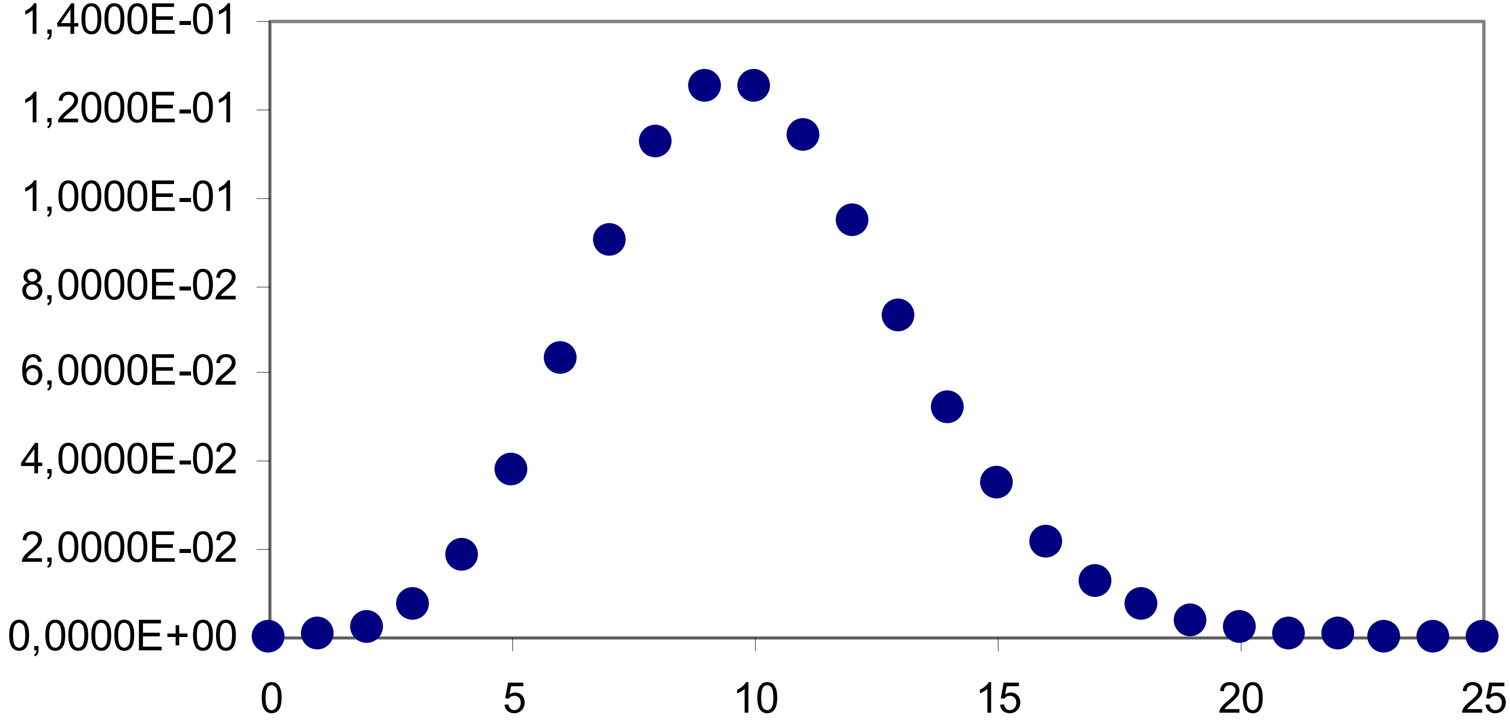
Una fuente radiactiva emite partículas según la distribución de Poisson de media 10 partículas por minuto. Se desea calcular:

- Probabilidad de 5 partículas en un minuto
- Probabilidad de 0 partículas en un minuto
- Probabilidad de más de 5 partículas en un minuto.
- Probabilidad de al menos 30 partículas en 5 minutos.

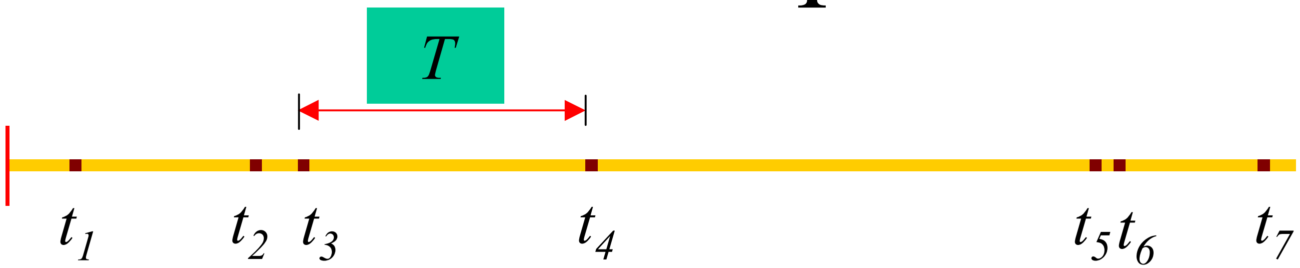
Ejemplo Poisson

1. $$P(X=5)=e^{-10}\frac{10^5}{5!}=0.0378$$
2. $$P(X=0)=e^{-10}=4.54E-15.$$
3. $$P(X>5)=1-P(X\leq 5)$$
$$=1-e^{-10}\sum_{x=0}^{5}\frac{10^x}{x!}=0.933.$$
4. $Y\equiv$ Nº de partículas en 5 minutos
$$\lambda'=5\times 10=50$$
$$P(Y\leq 30)=e^{-50}\sum_{x=0}^{30}\frac{50^x}{x!}=0.0016$$

Poisson de media 10



Distribución Exponencial

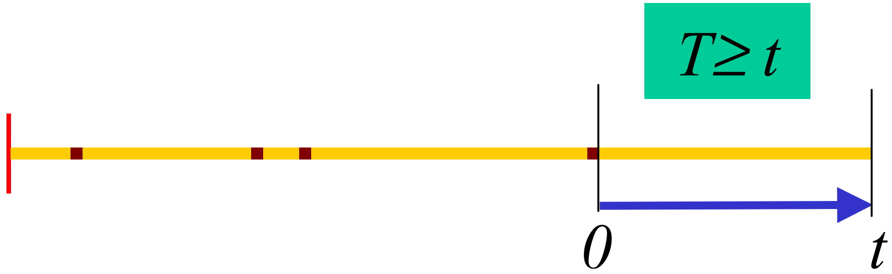


Ejemplo: Fabricación continua de conductor de cobre.

$\lambda \equiv$ Número medio de defectos cada 100 m

$T \equiv$ "Distancia entre dos defectos"

Distribución Exponencial



$$P(T \geq t) = P\left\{0 \text{ defectos en el intervalo } [0, \mathrm{t})\right\}$$

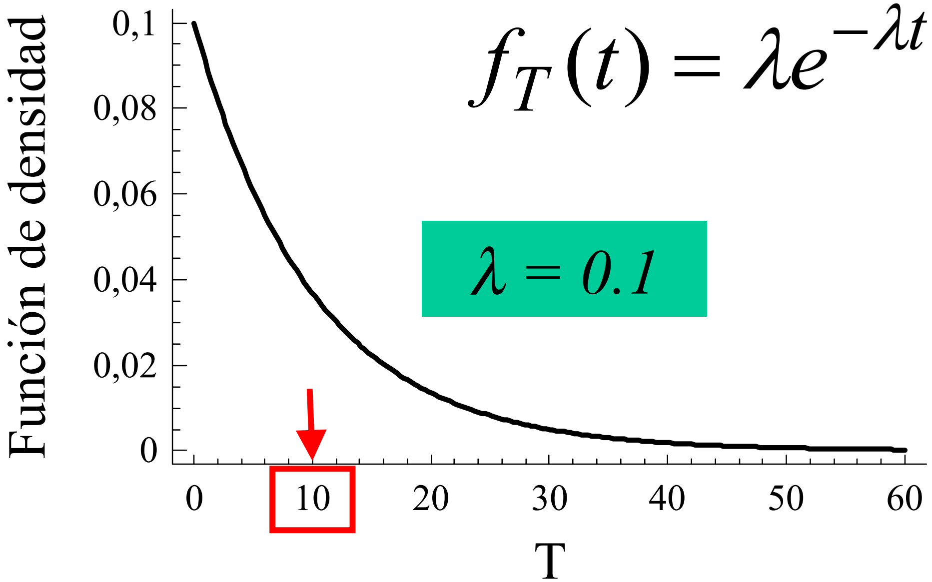
$$= e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$$

$$F_T(t) = P(T \leq t)$$

$$= 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$$

$$f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

Propiedades (Exponencial)



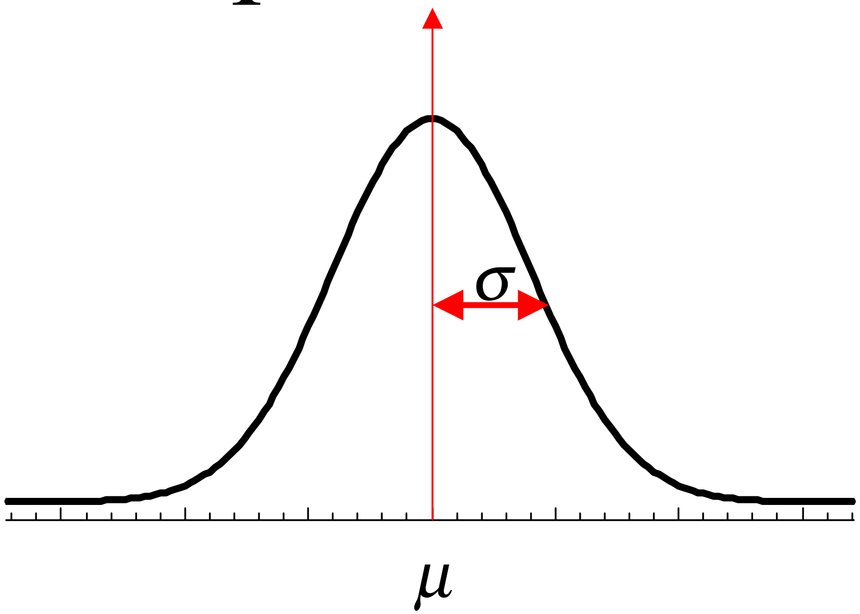
$$f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

$\lambda = 0.1$

$$E[T] = \int_{-\infty}^{\infty} t f_T(t) dt$$
$$= \int_0^{\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$$

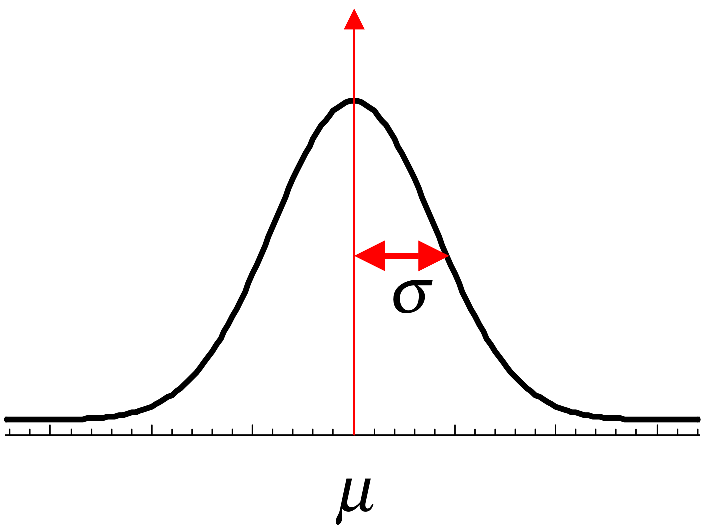
$$Var[T] = E[T^2] - E[T]^2$$
$$= \int_0^{\infty} \lambda t^2 e^{-\lambda t} dt - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Distribución Normal
Campana de Gauss



$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 \right\}, \quad x \in \Re$$

Medidas Características

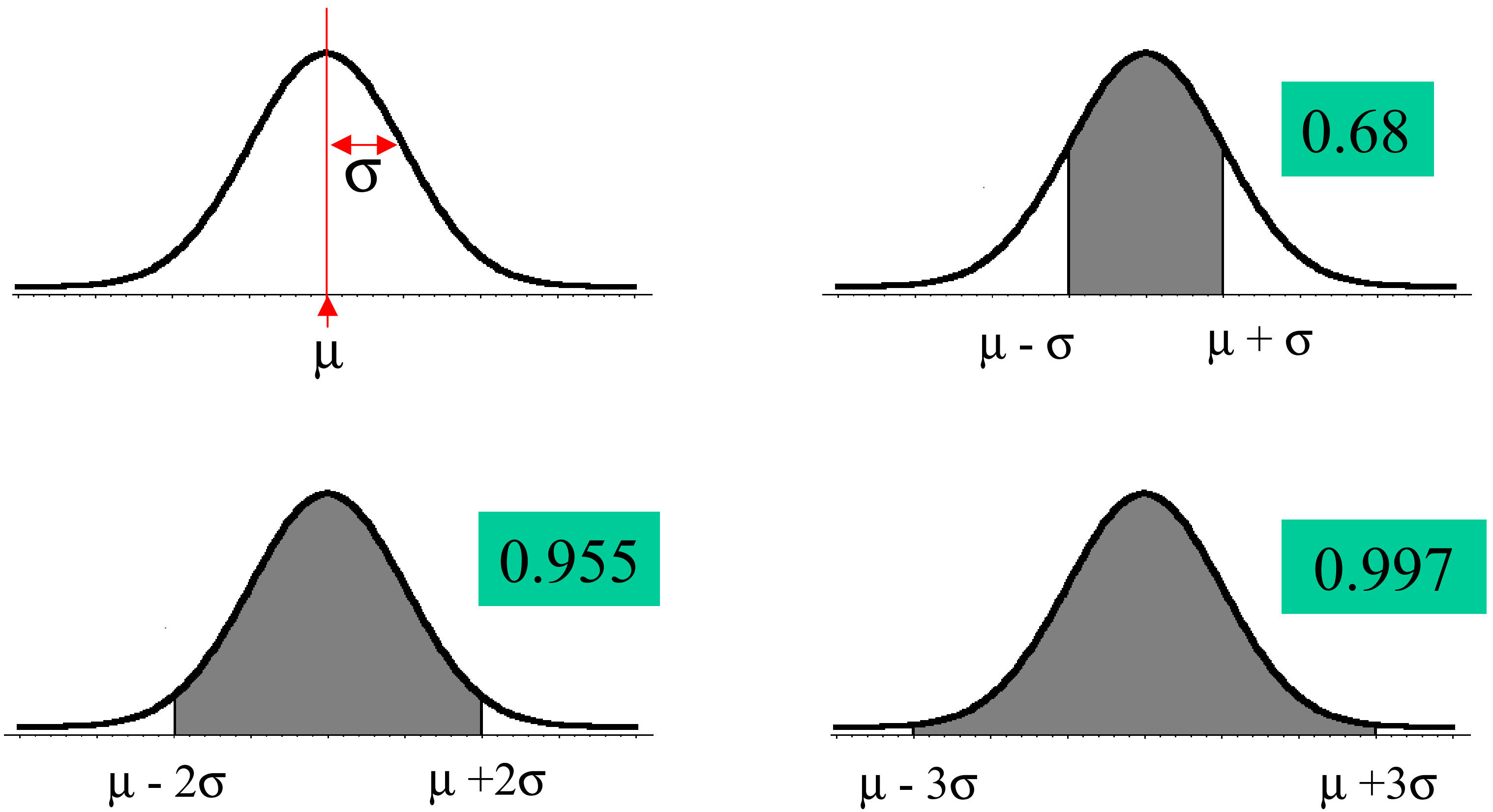


$$X \to N(\mu, \sigma)$$

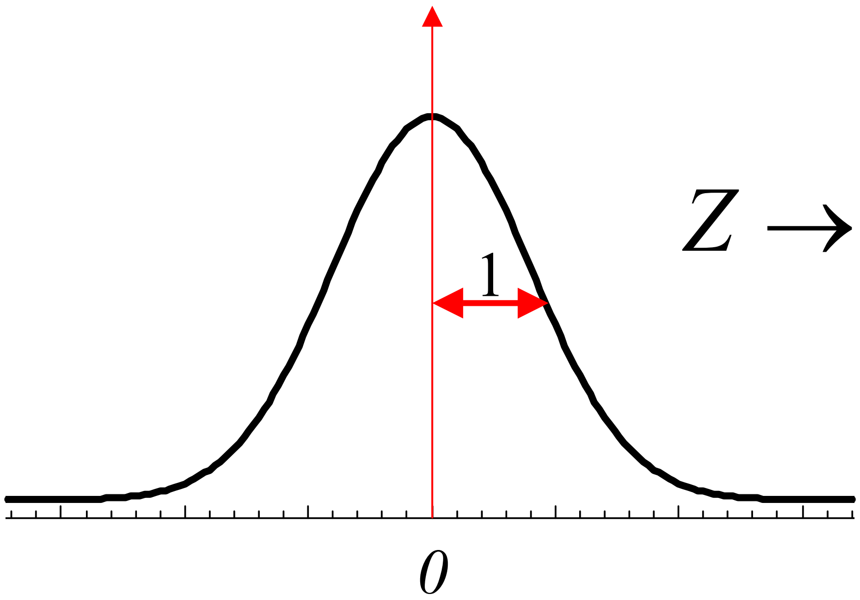
$$E[X] = \mu \qquad Var[X] = \sigma^2$$

$$E[(X-\mu)^3] = 0 \qquad E[(X-\mu)^4] = 3\sigma^4$$

$$\text{Asimetría} = 0 \qquad \text{Curtosis} = 3.$$


σ
μ
0.68
μ - σ
μ + σ
0.955
μ - 2σ
μ +2σ
0.997
μ - 3σ
μ +3σ

Normal Estándar



$$Z \to N(0,1)$$

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}, \quad z \in \Re$$

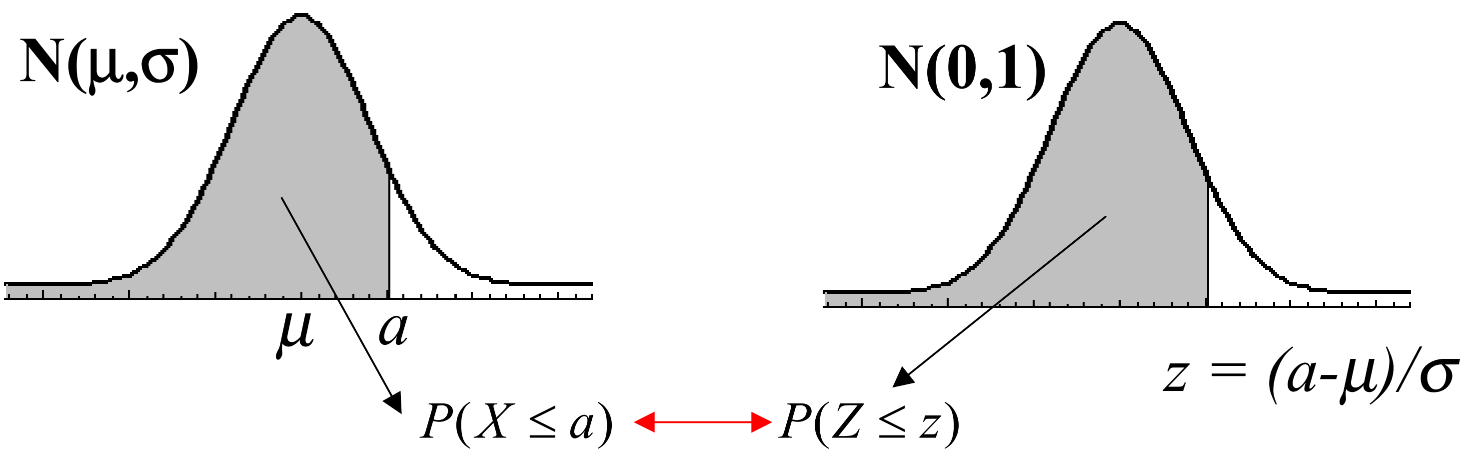
$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$

TABLAS

Estandarización

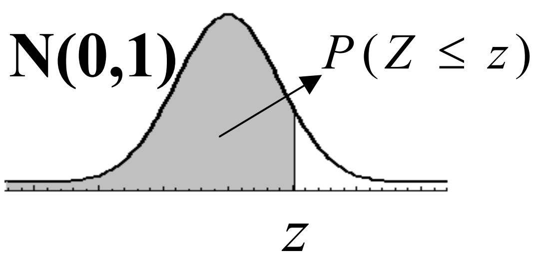
$$X \to N(\mu,\sigma) \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \to N(0,1)$$

$$P(X \le x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \le \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$



TABLA

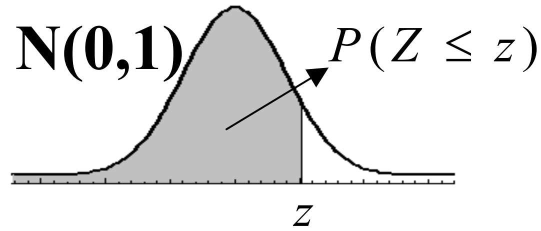
Normal Estandar



Z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0,1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0,2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0,3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0,4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0,5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0,6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0,7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0,8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0,9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1,0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1,1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1,2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1,3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1,4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1,5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1,6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1,7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1,8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1,9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2,0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2,1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2,2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2,3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2,4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2,5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2,6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2,7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2,8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2,9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3,0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990

Ejemplo.

$$P(Z \leq 1.96) = 0.9750$$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
3,1	.9990323	.9990645	.9990957	.9991259	.9991552	.9991836	.9992111	.9992377	.9992636	.9992886
3,2	.9993128	.9993363	.9993590	.9993810	.9994023	.9994229	.9994429	.9994622	.9994809	.9994990
3,3	.9995165	.9995335	.9995499	.9995657	.9995811	.9995959	.9996102	.9996241	.9996375	.9996505
3,4	.9996630	.9996751	.9996868	.9996982	.9997091	.9997197	.9997299	.9997397	.9997492	.9997584
3,5	.9997673	.9997759	.9997842	.9997922	.9997999	.9998073	.9998145	.9998215	.9998282	.9998346
3,6	.9998409	.9998469	.9998527	.9998583	.9998636	.9998688	.9998739	.9998787	.9998834	.9998878
3,7	.9998922	.9998963	.9999004	.9999042	.9999080	.9999116	.9999150	.9999184	.9999216	.9999247
3,8	.9999276	.9999305	.9999333	.9999359	.9999385	.9999409	.9999433	.9999456	.9999478	.9999499
3,9	.9999519	.9999538	.9999557	.9999575	.9999592	.9999609	.9999625	.9999640	.9999655	.9999669
4,0	.9999683	.9999696	.9999709	.9999721	.9999733	.9999744	.9999755	.9999765	.9999775	.9999784

Ejemplo (Normal)

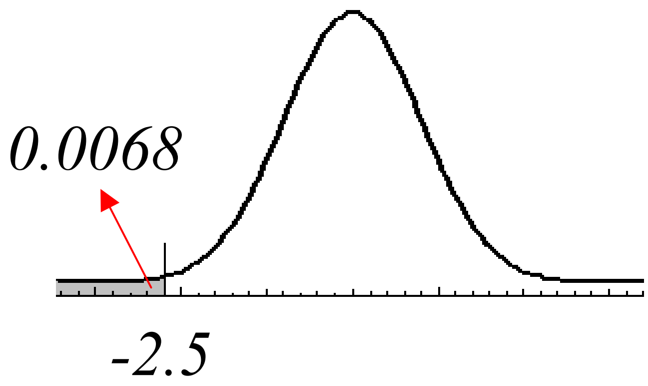
La longitud X de ciertos tornillos es una variable aleatoria con distribución normal de media 30 mm y desviación típica 0.2 mm. Se aceptan como válidos aquellos que cumplen $29.5 < X < 30.3$.

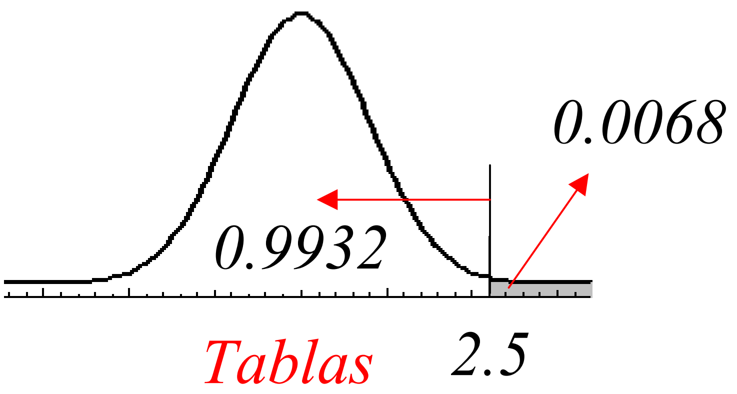
- Proporción de tornillos no aceptables por cortos.
- Proporción de tornillos no aceptables por largos.
- Proporción de tornillos válidos.

Ejemplo (Solución)

$$X \to N(30,\, 0.2) \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \to N(0,1)$$

1. $$P(X \le 29.5) = P\left(\frac{X-30}{0.2} \le \frac{29.5-30}{0.2}\right)$$
$$= P(Z \le -2.5) = \Phi(-2.5) = 0.0068$$





2. $P(X \geq 30.4) = P(\frac{X-30}{0.2} \geq \frac{30.4-30}{0.2})$

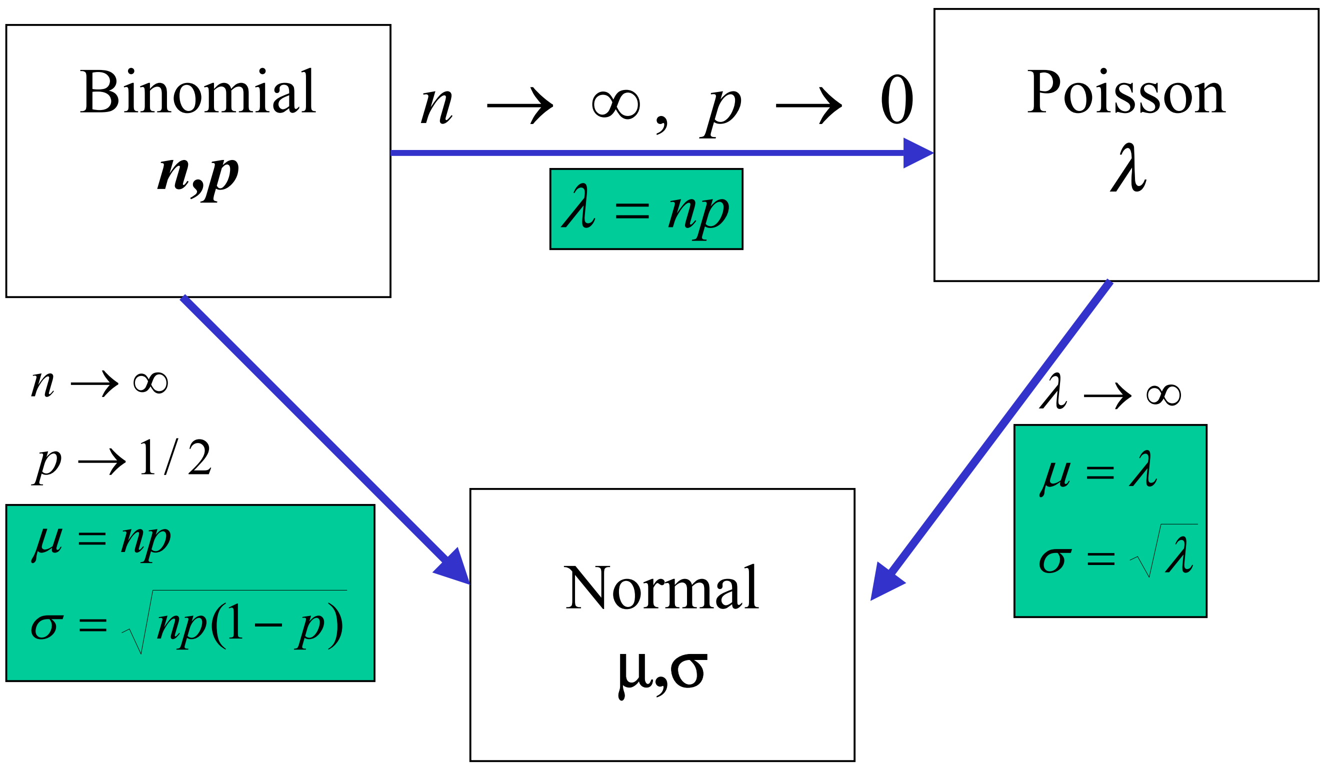
$= P(Z \geq 2.0) = 1 - \Phi(2) = 0.0228$

3. $P(\text{"}Defectuosas\text{"}) = 0.0228 + 0.0068 = 0.0296$

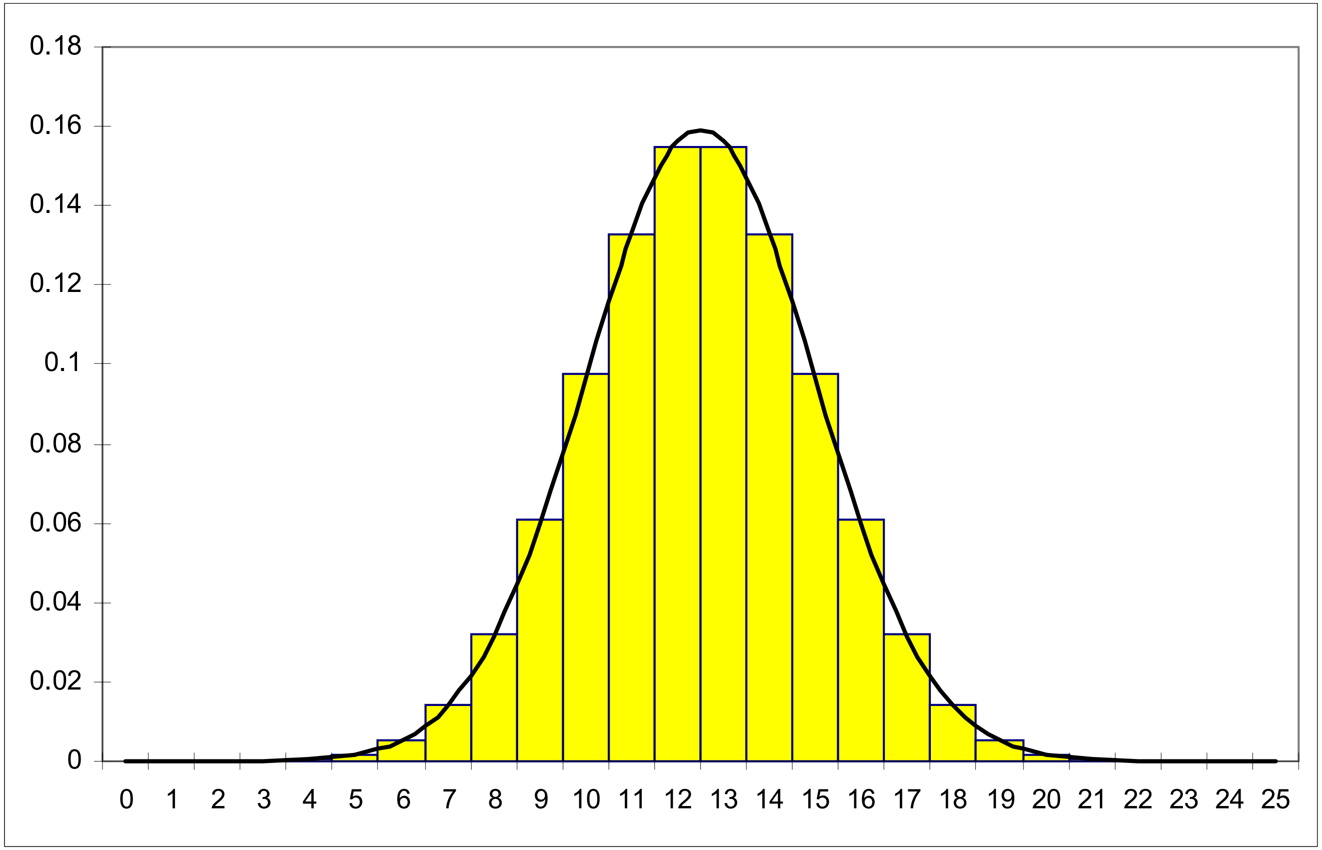
$Y \equiv N^{o}$ de piezas defectuosa en un lote de 1000

$\mathrm{E[Y]} = 1000 \times 0.0296 = 29.6$

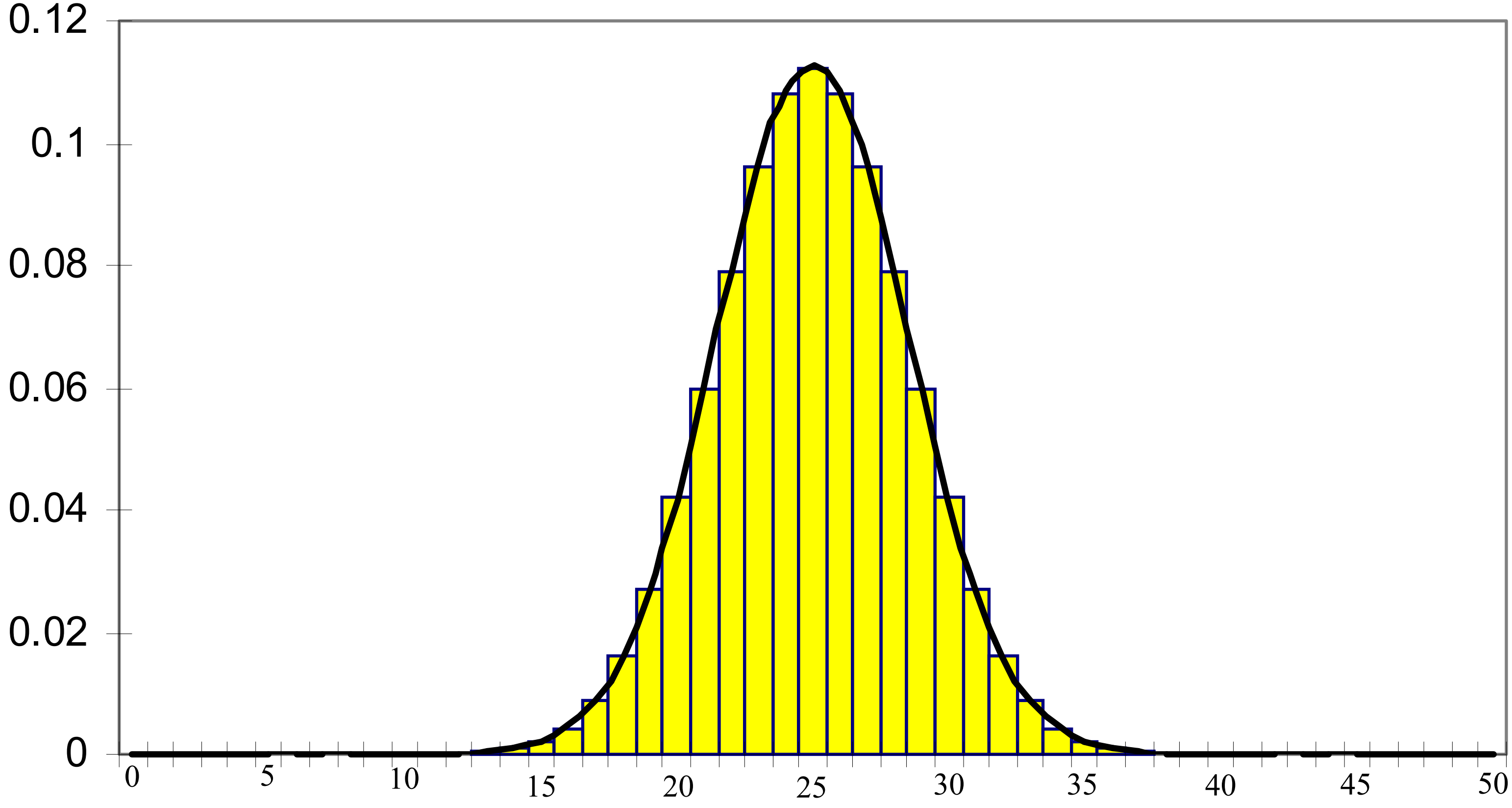
Binomial-Poisson-Normal



Aproximación Binomial-Normal
n=25, p=1/2

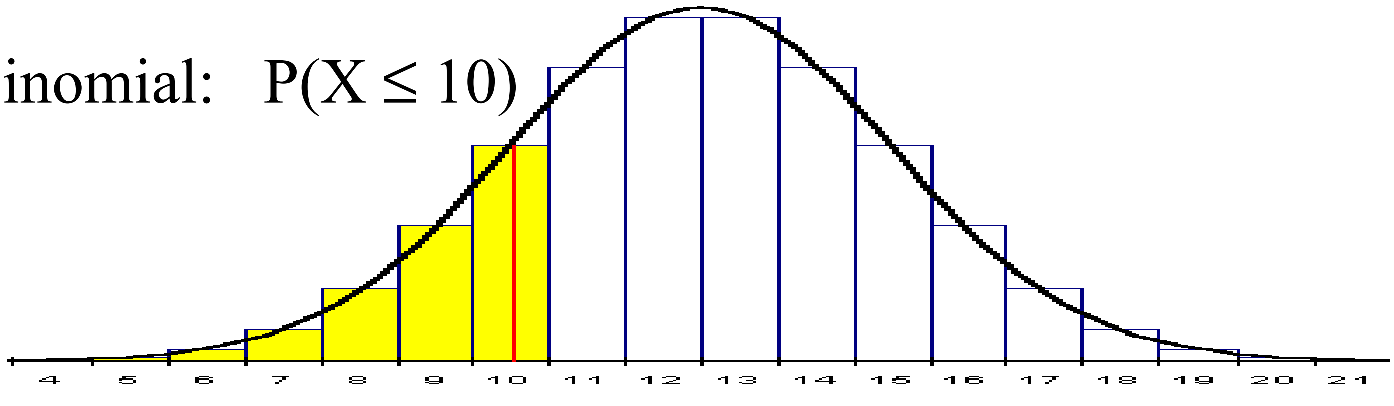


Aproximación de Normal y Binomial
n = 50, p=0.5

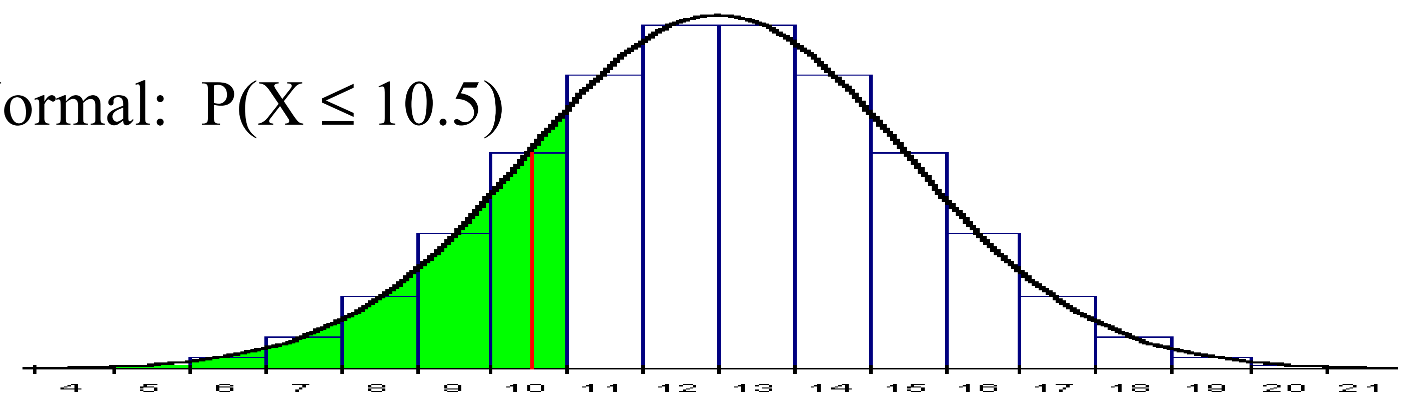


Corrección por continuidad

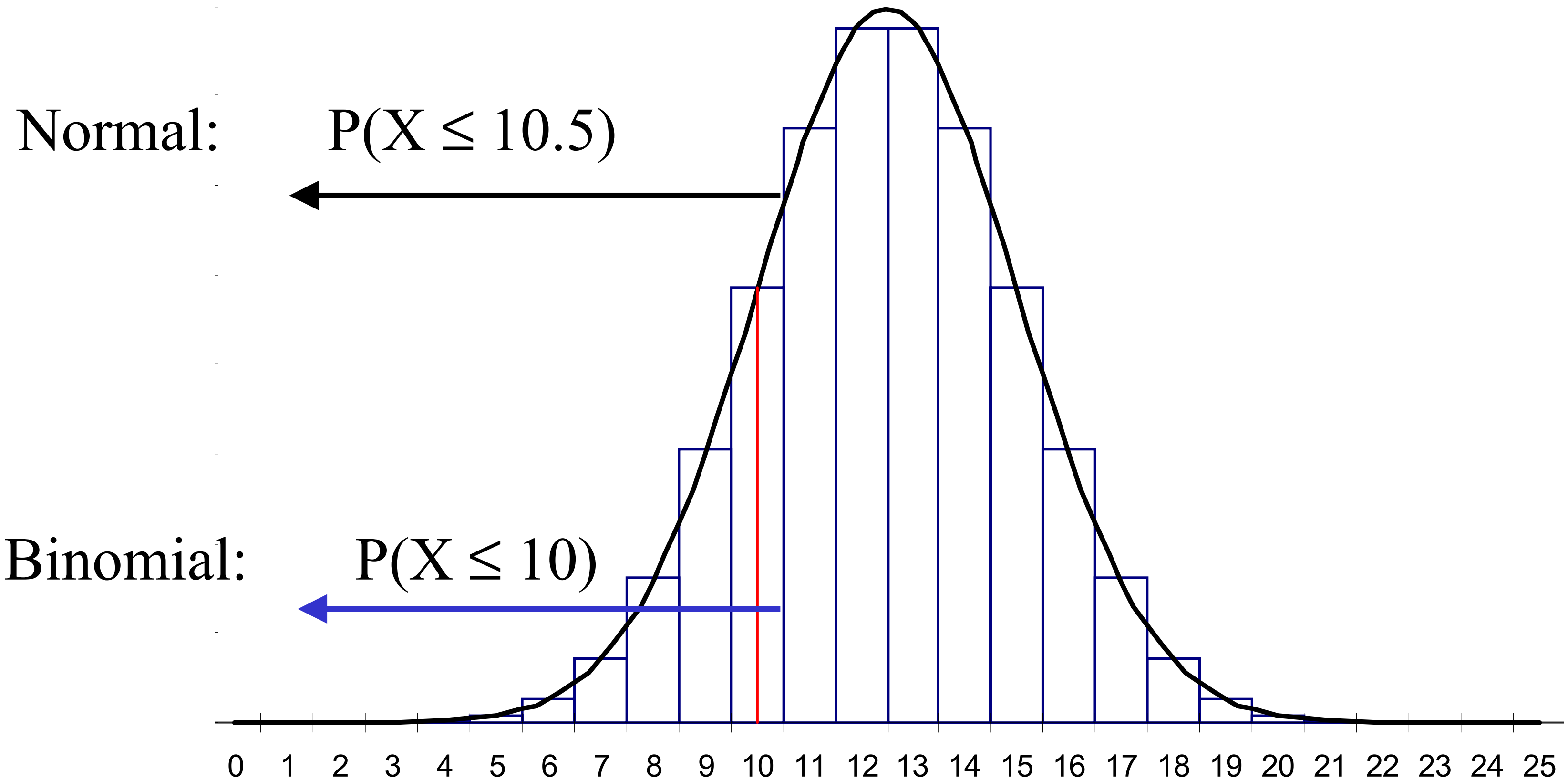
Binomial: $P(X \leq 10)$



Normal: $P(X \leq 10.5)$



Corrección por continuidad



Se ha tomado una muestra de 45 piezas de un proceso que fabrica un promedio de 25% de piezas fuera de especificación.

1.¿Cuál es la probabilidad de que en la muestra haya exactamente 13 elementos defectuosos?

Cálculo exacto : $X \rightarrow \text{Binomial}(n = 45,\ p = 0.25)$

$$P(X = 13) = \binom{45}{13} 0.25^{13} 0.75^{32} = 0.110$$

Aproximación Normal : $Y \rightarrow N(11.25,\ 2.9)$

$$P(X = 13) = P(12.5 \leq Y \leq 13.5) = 0.1142$$

2. ¿Cuál es la probabilidad de que la muestra contenga 13 o más piezas defectuosas?

$$E : P(X \geq 13) = P(X = 13) + P(X = 14) + \cdots + P(X = 45) = 0.325$$

$$A : P(Y \geq 12.5) = 1\text{-}Ö\left(\frac{12.5\text{-}11.25}{2.9}\right) = 1 - Ö(0.4310) = 0.333$$

Plan de muestreo simple por atributos

Una compañía recibe lotes con un gran número de piezas. Según el contrato cada lote debe tener como máximo una proporción de piezas defectuosas igual p_A *(AQL)*.

Un plan de muestreo simple por atributos consiste en determinar

n: número de piezas muestreadas

c: número máximo de piezas defectuosas en la muestra

De forma que si X es el número de piezas defectuosas en la muestra se aplica la siguiente regla:

$x \leq c$ se acepta el lote

$x > c$ se rechaza el lote

Riesgos del vendedor y comprador

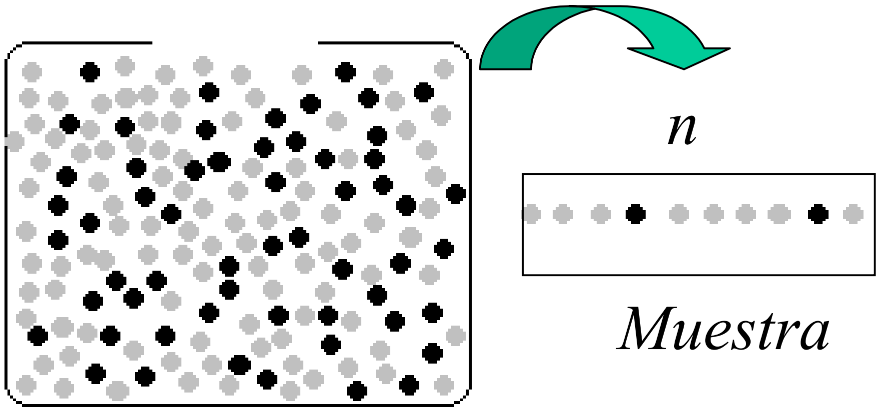
- **Riesgo del vendedor**: Probabilidad de rechazar un lote bueno (con porcentaje de defectuosas igual al p_A *(AQL))*

$$\alpha = P(X > c \mid p = p_A).$$

- **Riesgo del comprador**: Probabilidad de aceptar un lote malo (con un porcentaje de defectuosas $p_R >> p_A$)

$$\beta = P(X \leq c \mid p = p_R).$$

Planteamiento del problema



DATOS:

$p_A = AQL$ α: *Riesgo vendedor*

$p_R = RQL$ β: *Riesgo comprador*

OBJETIVO:

n: tamaño muestral

c: máximo defectuosas

Ecuación del vendedor

$p \equiv$ Proporción de piezas defectuosas en el lote

$X \equiv$ Número de piezas defectuosas en una muestra de n

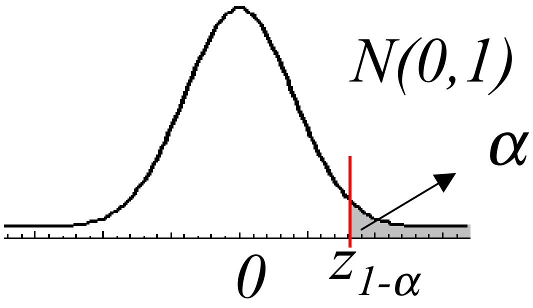
$$X \to \text{Binomial}(n, p) \approx N(np, \sqrt{np(1-p)})$$

Si $p = p_A$

$$\alpha = P(X > c | p = p_A) = P\left(\frac{X - np_A}{\sqrt{np_A(1-p_A)}} > \frac{c - np_A}{\sqrt{np_A(1-p_A)}}\right)$$

$$= P(Z \geq z_{1-\alpha})$$

Conocido $\alpha \Rightarrow \boxed{z_{1-\alpha} = \frac{c - np_A}{\sqrt{np_A(1-p_A)}}}$



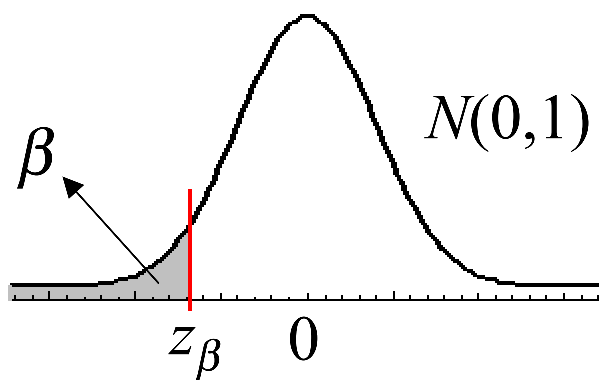
Ecuación del comprador

Si $p = p_R$:

$$\beta = P(X \le c | p = p_R) = P\left(\frac{X - np_R}{\sqrt{np_R(1-p_R)}} \le \frac{c - np_R}{\sqrt{np_R(1-p_R)}}\right)$$

$$= P(Z \le z_\beta)$$

Conocido $\beta \Rightarrow \boxed{z_\beta = \frac{c - np_R}{\sqrt{np_R(1-p_R)}}}$

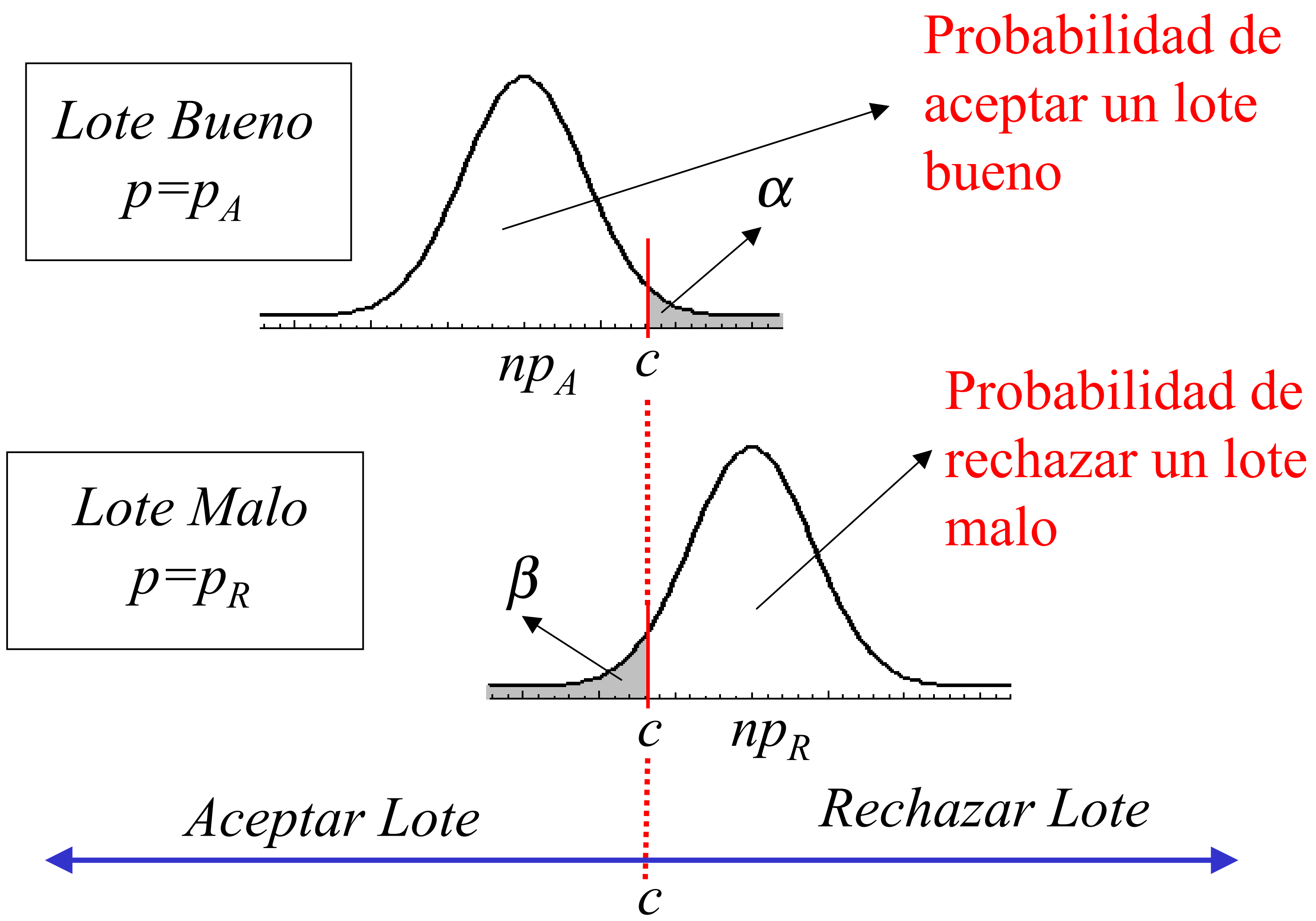


Valores de *n* y *c*

$$z_{1-\alpha} = \frac{c - np_A}{\sqrt{np_A(1-p_A)}} \qquad z_\beta = \frac{c - np_R}{\sqrt{np_R(1-p_R)}}$$

$$n = \left(\frac{z_{1-\alpha}\sqrt{p_A(1-p_A)} - z_\beta\sqrt{p_R(1-p_R)}}{p_R - p_A} \right)^2$$

$$c = np_A + z_{1-\alpha}\sqrt{np_A(1-p_A)}$$


Lote Bueno
p=pA
Probabilidad de aceptar un lote bueno
α
npA
c
Lote Malo
p=pR
Probabilidad de rechazar un lote malo
β
c
npR
Aceptar Lote
Rechazar Lote
c

Ejemplo: plan de muestreo

Diseñar un plan de muestreo para lotes de 10000 unidades con un AQL igual al 0.02, RQL igual a 0.08, riesgo de comprador de 0.10 y del vendedor igual al 0.05.

$$\text{Para } \alpha = 0.05 \Rightarrow \mathrm{z}_{1\text{-}\alpha} = 1.64 \text{ y } \beta = 0.10 \Rightarrow \mathrm{z}_{\beta} = -1.28$$

$$n = \left(\frac{1.65\sqrt{0.02 \times 0.98} + 1.28\sqrt{0.08 \times 0.92}}{0.08 - 0.02} \right)^2 \approx 93$$

$$c = 93 \times 0.02 + 1.65\sqrt{93 \times 0.02 \times 0.98} \approx 4$$