Distribución conjunta de variables aleatorias

Definiciones

Ejemplo: Se lanzan dos dados y se definen las variables aleatorias: suma (X) y valor absoluto de la diferencia (Y) de los resultados.

Distribución Conjunta P(X=x, Y=y)

		X : SUMA DE DOS DADOS										
		2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
	0	1/36		1/36		1/36		1/36		1/36		1/36
	1		1/18		1/18		1/18		1/18		1/18	
Y : DIFERENCIA	**2**			1/18		1/18		1/18		1/18		
DE DOS DADOS	**3**				1/18		1/18		1/18			
	4					1/18		1/18				
	5						1/18					

Distribuciones Marginales

						X: SUMA DE DOS DADOS							
		2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**Y**
	0	1/36		1/36		1/36		1/36		1/36		1/36	**6/36**
	1		1/18		1/18		1/18		1/18		1/18		**10/36**
***Y*: DIFERENCIA**	**2**			1/18		1/18		1/18		1/18			**8/36**
DE DOS DADOS	**3**				1/18		1/18		1/18				**6/36**
	4					1/18		1/18					**4/36**
	5						1/18						**2/36**
	X	**1/36**	**2/36**	**3/36**	**4/36**	**5/36**	**6/36**	**5/36**	**4/36**	**3/36**	**2/36**	**1/36**	

Marginal de *X*

Marginal de *Y*

Definiciones (v. a. discretas)

- Distribución de probabilidad conjunta de dos variables aleatorias X, Y

$$P(X=x,Y=y) \quad \begin{cases} P(X=x,Y=y)\geq 0, \quad \forall x,y \\ \sum_{x=-\infty}^{x=\infty}\sum_{y=-\infty}^{y=\infty} P(X=x,Y=y)=1. \end{cases}$$

- Función de distribución conjunta:

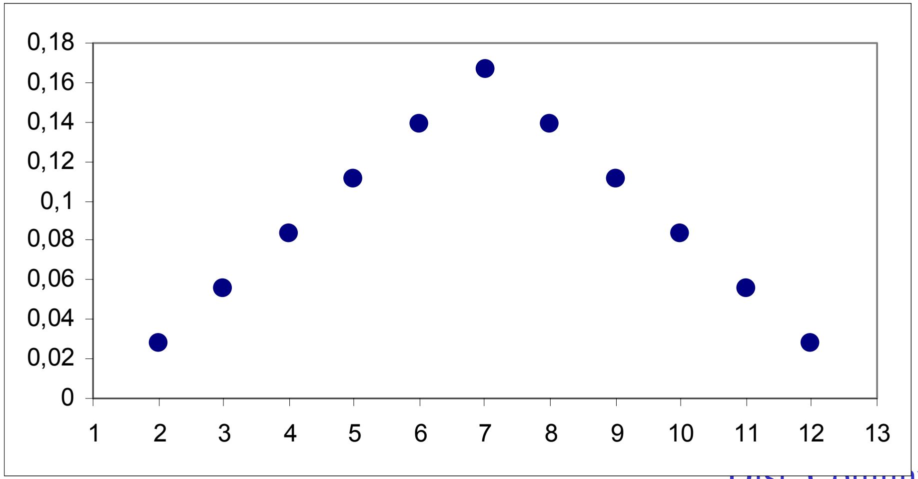
$$F_{XY}(x,y)=P(X\leq x,Y\leq y)$$

Distribuciones marginales

$$P(X = x) = \sum_{y=-\infty}^{y=\infty} P(X = x, Y = y)$$

$$P(Y = y) = \sum_{x=-\infty}^{x=\infty} P(X = x, Y = y)$$

Suma de
dos dados



Distribuciones condicionadas

						X: SUMA DE DOS DADOS							
		2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**Y**
	0	1/36		1/36		1/36		**1/36**		1/36		1/36	6/36
	1		1/18		1/18		1/18		1/18		1/18		10/36
***Y*: DIFERENCIA**	**2**			1/18		1/18		**1/18**		1/18			8/36
DE DOS DADOS	**3**				1/18		1/18		1/18				6/36
	4					1/18		**1/18**					4/36
	5						1/18						2/36
	X	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	**5/36**	4/36	3/36	2/36	1/36	

***Y* | *X* = 8**	
0	**1/5**
1	**0**
2	**2/5**
3	**0**
4	**2/5**
5	**0**
	1

Distribución de la diferencia entre los dados condicionada a que la suma es 8.

$$P(Y=y \mid X=8) = P(Y=y, X=8)/P(X=8)$$

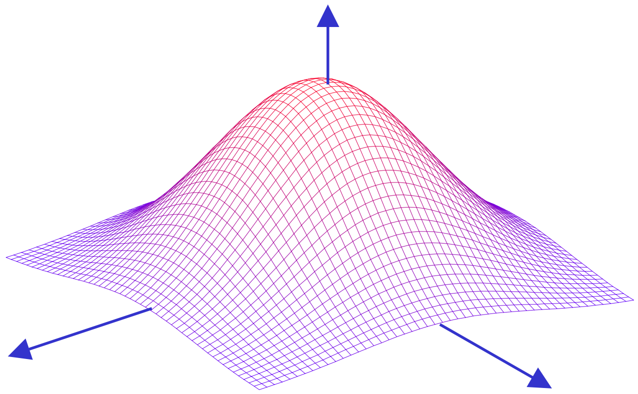
Variables aleatorias continuas

$$P(a \le X \le b, c \le Y \le d) = \int_c^d \int_a^b f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

Siendo $f_{XY}(x,y)$ la función de densidad conjunta, que cumple:

1) $f_{XY}(x,y) \ge 0, \quad \forall x, y$

2) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = 1$



Variables aleatorias continuas

- Función de distribución

$$F_{XY}(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{XY}(u,v)\,du\,dv$$

- Funciones de densidad marginales

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy$$

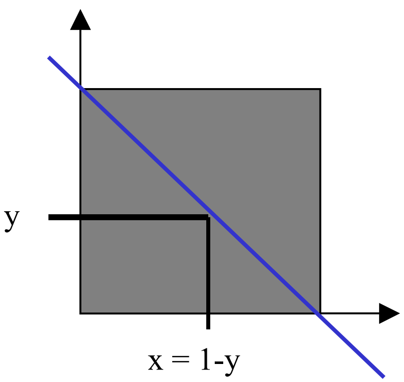
$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx$$

Las variables aleatorias X, Y tienen como función de densidad conjunta

$$f_{XY}(x,y) = 6xy^2, \quad 0 < x < 1, 0 < y < 1$$

1. $P(X \le x, Y \le y) = \int_0^x \int_0^y 6uv^2 du dv = x^2 y^3$
2. $P(X + Y \le 1) = \iint\limits_{x+y\le 1} 6xy^2 dx dy$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-y} 6xy^2 dx dy = \frac{1}{5}.$$



3. Marginales

$$f_X(x) = \int_0^1 6xy^2 dy = 2x, \quad 0 < x < 1$$

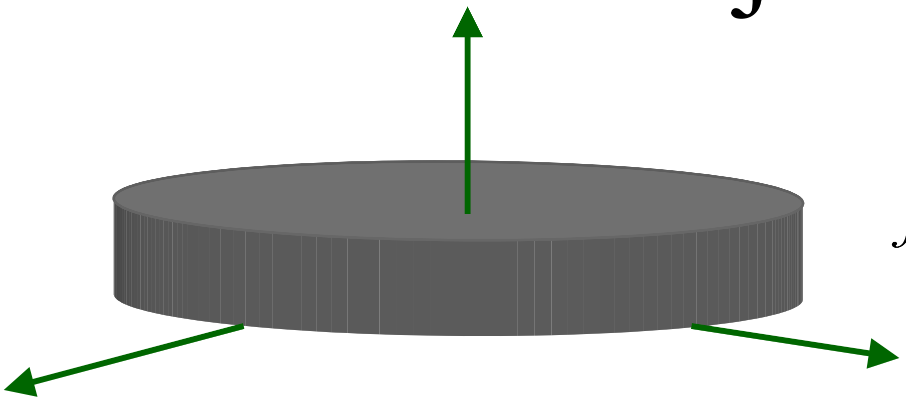
$$f_Y(y) = \int_0^1 6xy^2 dx = 3y^2, \quad 0 < y < 1$$

Funciones de densidad condicionadas

$$f_{X|Y}(x\,|\,y)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)},\quad \text{cuando } f_Y(y)>0.$$

$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)},\quad \text{cuando } f_X(x)>0$$

Ejemplo



$$f(x,y)=\begin{cases} c, & x^2+y^2\le r^2 \\ 0, & x^2+y^2>r^2 \end{cases}$$

1. $$c=\frac{1}{\pi r^2}.$$

2. $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$$

$$=\frac{1}{\pi r^2}\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{+\sqrt{r^2-x^2}} dy$$

$$=\frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-x^2},\quad -r\le x\le r$$

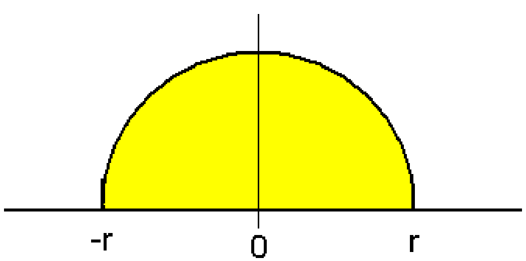
Ejemplo (cont.)

$$3. f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

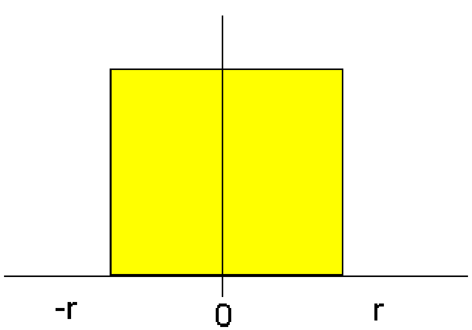
$$= \frac{1}{\pi r^2} \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{+\sqrt{r^2-y^2}} dx$$

$$= \frac{2}{\pi r^2} \sqrt{r^2 - y^2}, \quad -r \le y \le r$$

$$4. f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{2\sqrt{r^2 - y^2}}, \quad -\sqrt{r^2 - y^2} \le x \le \sqrt{r^2 - y^2}$$



$f_Y(y)$



$f_{X|Y}(x|y)$

Independencia

Las variables aleatorias *X, Y* son independientes si y sólo si

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y).$$

1. $$f_{XY}(x,y) = 6xy^2, \quad 0 < x < 1, 0 < y < 1 \Rightarrow \begin{cases} f_X(x) = 2x, 0 < x < 1 \\ f_Y(y) = 3y^2, 0 < y < 1 \end{cases}$$

Independientes

2. $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi r^2}, & x^2 + y^2 \le r^2 \\ 0, & x^2 + y^2 > r^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_X(x) = \dfrac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2 - x^2} & ,-r \le x \le r \\ f_Y(y) = \dfrac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2 - y^2} & ,-r \le y \le r \end{cases}$$

No Independientes

Esperanza de g(X,Y)

(a) Si X, Y son variables aleatorias discretas, se define esperanza de la función $g(X,Y)$ como:

$$E[g(X,Y)] = \sum_{x=-\infty}^{x=\infty} \sum_{y=-\infty}^{y=\infty} g(x,y) P(X=x, Y=y)$$

(b) Si X, Y son variables aleatorias continuas, se define esperanza de la función $g(X,Y)$ como:

$$E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f_{XY}(x,y)\, dx\, dy$$

Propiedades de E[g(X,Y)]

$$\text{Si } g(X,Y) = g_1(X) + g_2(Y) \text{ se cumple}$$

$$E[g_1(X) + g_2(Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left(g_1(x) + g_2(y)\right) f_{XY}(x,y)dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_1(x) f_{XY}(x,y)dxdy + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_2(y)\ f_{XY}(x,y)dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dy\right)dx + \int_{-\infty}^{\infty} g_2(y)\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dx\right)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x) f_X(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} g_2(y) f_Y(y)dy$$

$$= E[g_1(X)] + E[g_2(Y)]$$

Ejemplo

$$\mathrm{E[X+Y] = E[X] + E[Y]}$$

Covarianza

La covarianza de dos variables aleatorias $X,\ Y$, se denota por $Cov(X,Y)$ y se define como :

$$Cov(X,Y) \ = \ E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$

donde $\mu_X = E[X]$ y $\mu_Y = E[Y]$.

Propiedades

- $Cov(X,Y)=E[XY] - E[X]E[Y]$
- Si X e Y son independientes, entonces $Cov(X,Y) = 0$.
- $Var\ (X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2\ Cov(X,Y)$

Correlación

Se define coeficiente de correlación ρ entre dos variables aleatorias X, Y como

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}.$$

Propiedades

- $-1 \leq \rho(X,Y) \leq +1$
- Si X e Y son independientes, entonces $\rho(X,Y) = 0$.
- $Y = a + b\,X \Leftrightarrow \rho(X,Y) = 1\ (b>0)$ o $\rho(X,Y) = -1\ (b<0)$

n variables aleatorias

Para hacer cálculo de probabilidades de un suceso en el que intervenga las variables aleatorias $X_1, X_2, ..., X_n$ es preciso conocer la distribución de probabilidad conjunta.

Si las variables son continuas se emplea la función de densidad conjunta

$$f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Vector de variables aleatorias

$\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_n) \rightarrow$ Conjunto (vector) de n v.a. continuas

Su distribución de probabilidad conjunta viene caracterizada por su función de densidad conjunta : $f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_n)$

o por la función de distribución conjunta $F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_n)$.

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} \int_{-\infty}^{x_{n-1}} \cdots \int_{-\infty}^{x_1} f_{\mathbf{X}}(t_1, t_2, ..., t_n) dt_1 dt_2 \cdots dt_n$$

Distribuciones marginales

$\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_n) \rightarrow$ Conjunto (vector) de n v.a. continuas

La función de densidad marginal de $\mathrm{X_i}$, $f_i(x_i)$,

$$f_i(x_i) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_n)dx_1 dx_2 \cdots dx_n}_{\text{Todas menos } x_i}$$

La función de densidad marginal de (X_i, X_j), $f_{ij}(x_i, x_j)$,

$$f_{ij}(x_i, x_j) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_n)dx_1 dx_2 \cdots dx_n}_{\text{Todas menos } x_i \text{ y } x_j}$$

Esperanza

Esperanza de g(**X**) $= g(X_1, X_2, ..., X_n)$

$$E[g(\mathbf{X})] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, x_2, ..., x_n) f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

Es fácil demostrar :

$$E[X_i] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_i f_i(x_i) dx_i$$

$$E[g(X_1, X_2)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, x_2) f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, ..., x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, x_2) f_{12}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

Vector de Medias y Matriz de Varianzas

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)^T, \rightarrow \text{Vector de } n \text{ variables aleatorias}$$

$$E[\mathbf{X}] = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \mu_1 = E[X_1] \\ \mu_2 = E[X_2] \\ \vdots \\ \mu_n = E[X_n] \end{cases}$$

$$Var[\mathbf{X}] = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1n} & \sigma_{2n} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} Var(X_i) = \sigma_i^2 \\ Cov(X_i, X_j) = \sigma_{ij} \quad i \neq j \end{cases}$$

Independencia

Las variables aleatorias $X_1, X_2, ..., X_n$ son independientes si y sólo si

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2) \cdots f_n(x_n).$$

Transformaciones Lineales

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^T, \rightarrow \text{Vector de } n \text{ variables aleatorias}$$

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T, \rightarrow \text{Vector de } n \text{ constantes}$$

$$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_n X_n = \mathbf{a}^\mathbf{T} \mathbf{X}$$

$$E[Y] = \mathbf{a}^\mathbf{T} E[\mathbf{X}]$$

$$Var[Y] = \mathbf{a}^\mathbf{T}\, Var[\mathbf{X}]\mathbf{a}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1n} & \sigma_{2n} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Transformaciones Lineales Caso General

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)^T, \rightarrow \text{Vector de } n \text{ variables aleatorias}$$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \rightarrow \text{Matriz de } m \times n \text{ constantes}$$

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \mathbf{AX} \rightarrow E[Y] = \mathbf{A}E[\mathbf{X}]$$

$$Var[Y] = \mathbf{A}\, Var[\mathbf{X}]\, \mathbf{A}^T$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1n} & \sigma_{2n} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Transformaciones Lineales (Independencia)

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)^T, \rightarrow \text{Vector de } n \text{ variables aleatorias independientes}$$

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)^T, \rightarrow \text{Vector de } n \text{ constantes}$$

$$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_n X_n = \mathbf{a}^{\mathbf{T}} \mathbf{X}$$

$$E[Y] = a_1 E[X_1] + a_2 E[X_2] + \cdots + a_n [X_n]$$

$$Var[Y] = \mathbf{a}^{\mathbf{T}} \, Var[\mathbf{X}] \mathbf{a} = \left(a_1 \; a_2 \cdots a_n \right) \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$= a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2 + \cdots + a_n^2 \sigma_n^2$$

Ejemplo:

Calcular la media y la varianza de la suma de 12 variables aleatorias independientes con distribución uniforme en (0,1)

$$U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{12} \end{pmatrix}, \qquad U_i \to Uniforme(0,1) \quad \begin{cases} E[U_i] = 1/2 \\ Var[U_i] = 1/12 \\ Cov(U_i, U_j) = 0 \end{cases}$$

$$Y = U_1 + U_2 + \cdots + U_{12}$$

$$E[Y] = \sum_{i=1}^{12} E[U_i] = 6$$

$$Var[Y] = \sum_{i=1}^{12} Var[U_i] = 1$$

Ejemplo

- Se dispone de n sobres con sus correspondientes cartas. Se extraen las cartas de los sobres, se sortean y se vuelven a introducir de forma aleatoria cada una en un sobre. ¿Cuál es el número esperado de cartas que coinciden con su sobre inicial?

$$X \equiv \text{Número de coincidencias} \qquad X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{Si la carta } i \text{ } \textbf{no} \text{ coincide con su sobre inicial} \\ 1, & \text{Si la carta } i \text{ } \textbf{sí} \text{ coincide con su sobre inicial} \end{cases}$$

$$E[X] = E[X_1] + E[X_2] + \cdots + E[X_n]$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} = 1.$$

Ejemplo

- Un proceso fabrica una proporción p de tornillos defectuosos. Se define X como la variable *"número de tornillos extraídos del proceso hasta que aparecen r defectuosos"*. Se pide E[X] y Var[X].

$X_1 \equiv$ Número de tornillos extraídos hasta que aparece el primer defectuoso

$X_2 \equiv$ Número de tornillos **nuevos** extraídos hasta que aparece el 2º defectuoso

$X_i \equiv$ Número de tornillos **nuevos** extraídos hasta que aparece el i-ésimo defectuoso

$$\mathrm{X} = \mathrm{X}_1 + X_2 + \cdots + X_r$$

$$X_i : \text{variable aleatoria geométrica} \begin{cases} \mathrm{E}[\mathrm{X_i}] = 1/p \\ Var[X_i] = (1-p)/p^2 \end{cases}$$

$$E[X] = E[\mathrm{X}_1] + E[X_2] + \cdots + E[X_r] = \frac{r}{p}$$

$$Var[X] = Var[X_1] + Var[X_2] + \cdots + Var[X_r] = \frac{r(1-p)}{p^2}.$$

Media de *n* variables aleatorias independientes

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^T, \rightarrow \text{Vector de } n \text{ variables aleatorias independientes}$$

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

$$E[\overline{X}] = \frac{E[X_1] + E[X_2] + \cdots + E[X_n]}{n}$$

$$Var[\overline{X}] = \frac{Var[X_1] + Var[X_2] + \cdots + Var[X_n]}{n^2}$$

Si las variables tienen la misma media y varianza

ì $= E[X_i] \quad \forall i \qquad \sigma^2 = Var[X_i] \quad \forall i$

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \Rightarrow \begin{cases} E[\overline{X}] = \mu \\ Var[\overline{X}] = \dfrac{\sigma^2}{n} \end{cases} \Rightarrow \overline{X} \rightarrow N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

Teorema Central del Límite

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una secuencia de variables aleatorias independientes con la misma distribución de probabilidad de media μ y varianza $\sigma^2 < \infty$. Entonces

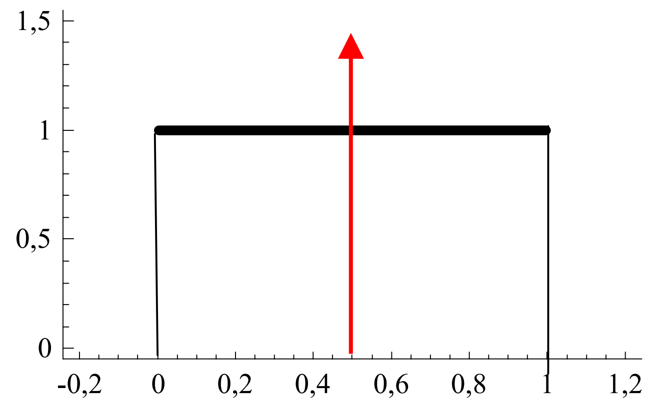
$$\lim_{n \to \infty} P\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \leq t \right) = \Phi(t), \quad -\infty < t < \infty$$

donde $\overline{X} = (X_1 + X_2 + \cdots + X_n) / n$

$$\Phi(\mathrm{t}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{t} e^{-x^2/2} dx$$

es la función de distribución de la normal estándar.

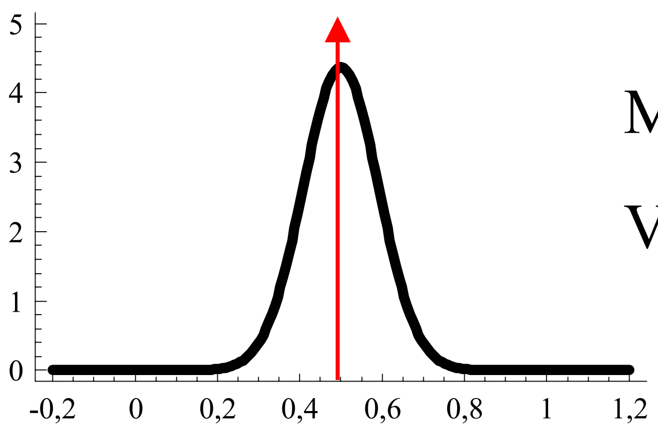
X_i



Media = 0.5

Var = 0.08

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}}{10}$$



Media = 0.5

Var = 0.08/10

Distribución normal multivariante

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}; \quad \mu = E[X] = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}; \quad \mathbf{M} = Var[X] = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1n} & \sigma_{2n} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |M|^{1/2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mu)^T \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{x} - \mu) \right\}$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \Re^n$$

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)^T \in \Re^n$$

$\mathbf{M} \in$ Matriz $n \times n$ semidefinida positiva

Distribución normal bivariante

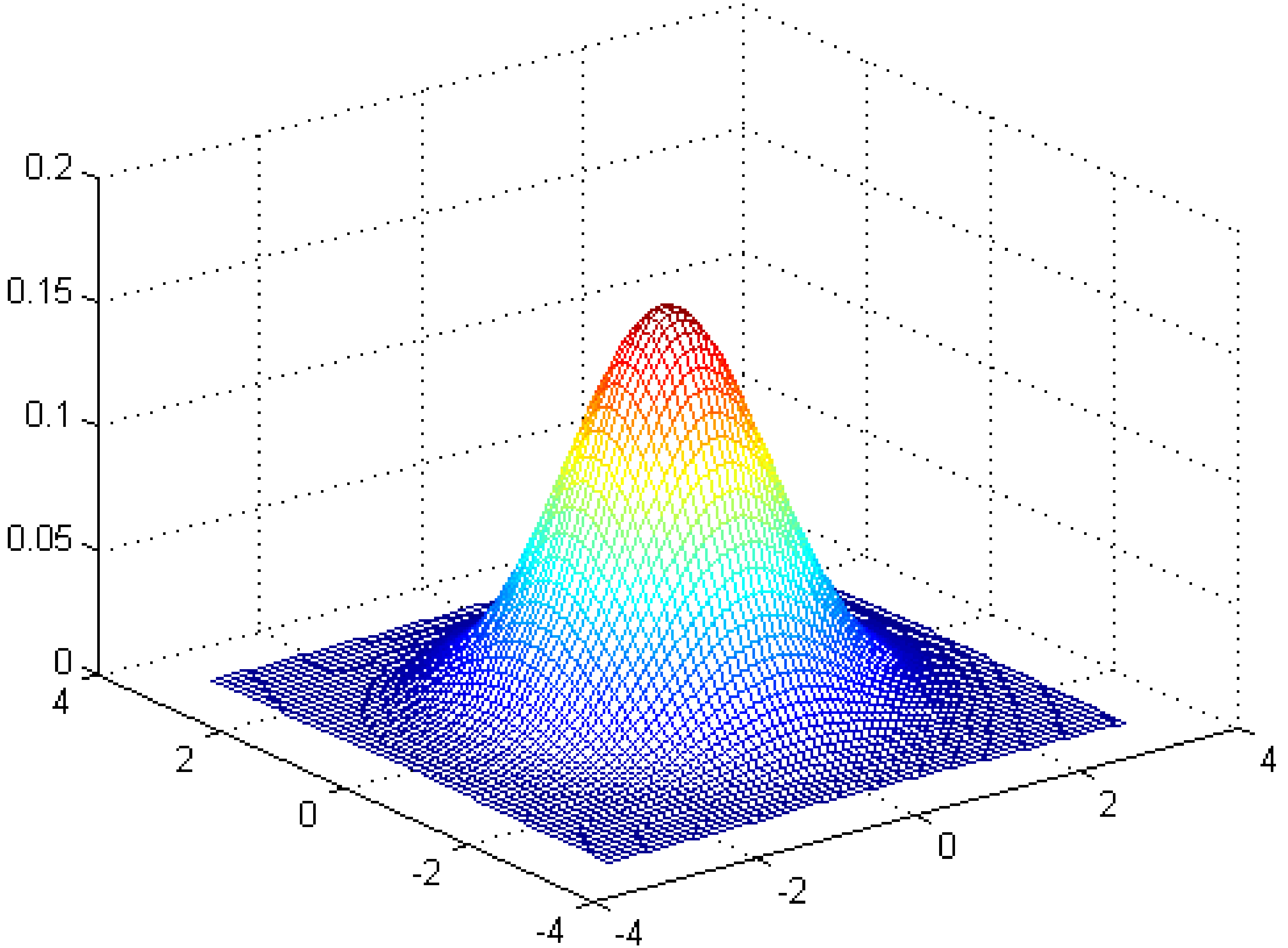
$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi|M|^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x_1-\mu_1\ \ x_2-\mu_2)\mathbf{M}^{-1}\begin{pmatrix}x_1-\mu_1\\ x_2-\mu_2\end{pmatrix}\right\}$$

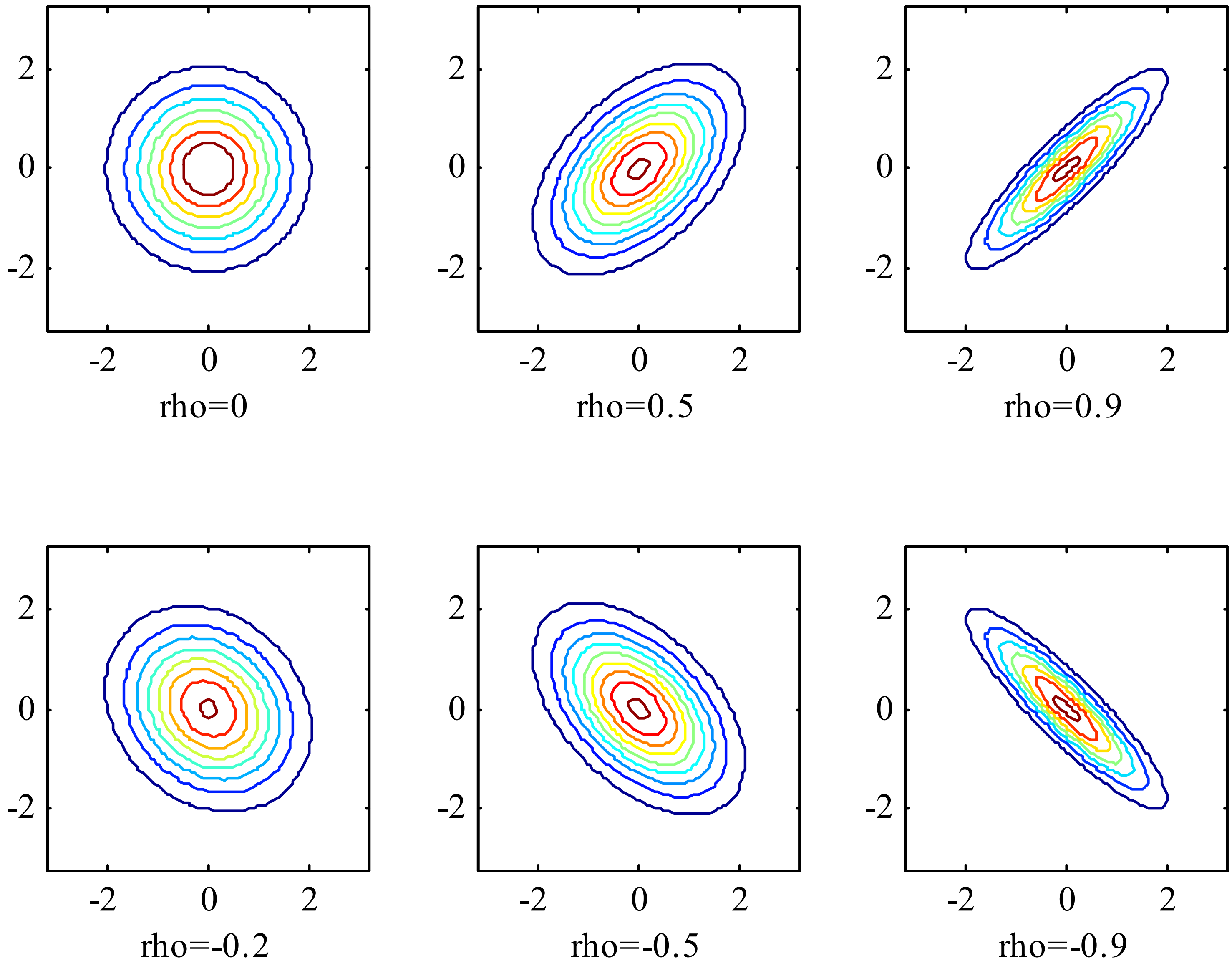
$$\mathbf{x}=(x_1,x_2)^T\in\Re^2 \qquad \mathbf{M}=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \sigma_{12}\\ \sigma_{12} & \sigma_2^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix};$$

$$\mu=(\mu_1,\mu_2)^T\in\Re^2$$

$$|\mathbf{M}|=\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2),\quad \mathbf{M}^{-1}=\frac{1}{(1-\rho^2)}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sigma_1^2} & \frac{-\rho}{\sigma_1\sigma_2}\\ \frac{-\rho}{\sigma_1\sigma_2} & \frac{1}{\sigma_2^2}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2+\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 -2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right]\right\}}$$


0.2
0.15
0.1
0.05
0
4
2
0
-2
-4
-4
-2
0
2
4


2
0
-2
-2
0
2
rho=0
rho=0.5
rho=0.9
rho=-0.2
rho=-0.5
rho=-0.9

Propiedades

- Las dist. marginales son normales $N(\mu_i, \sigma_i)$.
- Las dist. condicionadas son normales.
- $\rho=0 \Leftrightarrow$ Las variables son independientes
- Transformaciones lineales:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{AX}$$

$$\boldsymbol{X} \text{ es } N(\mu, \boldsymbol{M}) \Rightarrow \boldsymbol{Y} \text{ es } \boldsymbol{N(A\ \mu, AMA^T)}$$

Ejemplo

Sea la (X_1, X_2, X_3) normal tridimensional de media $(10, 20, 30)$ y matriz de varianzas

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

¿ $P(X_1 + X_2 \geq X_3 + 1)$?

$$Y = X_1 + X_2 - X_3 \to Normal \begin{cases} E[Y] = 10 + 20 - 30 = 0 \\ Var[Y] = Var(X_1) + Var(X_2) + Var(X_3) = 6 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 \geq X_3 + 1) &= P(X_1 + X_2 - X_3 \geq 1) \\ &= P(Y \geq 1) \\ &= P\left(\frac{Y-0}{\sqrt{6}} \geq 1/\sqrt{6}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(1/\sqrt{6}\right) \end{aligned}$$