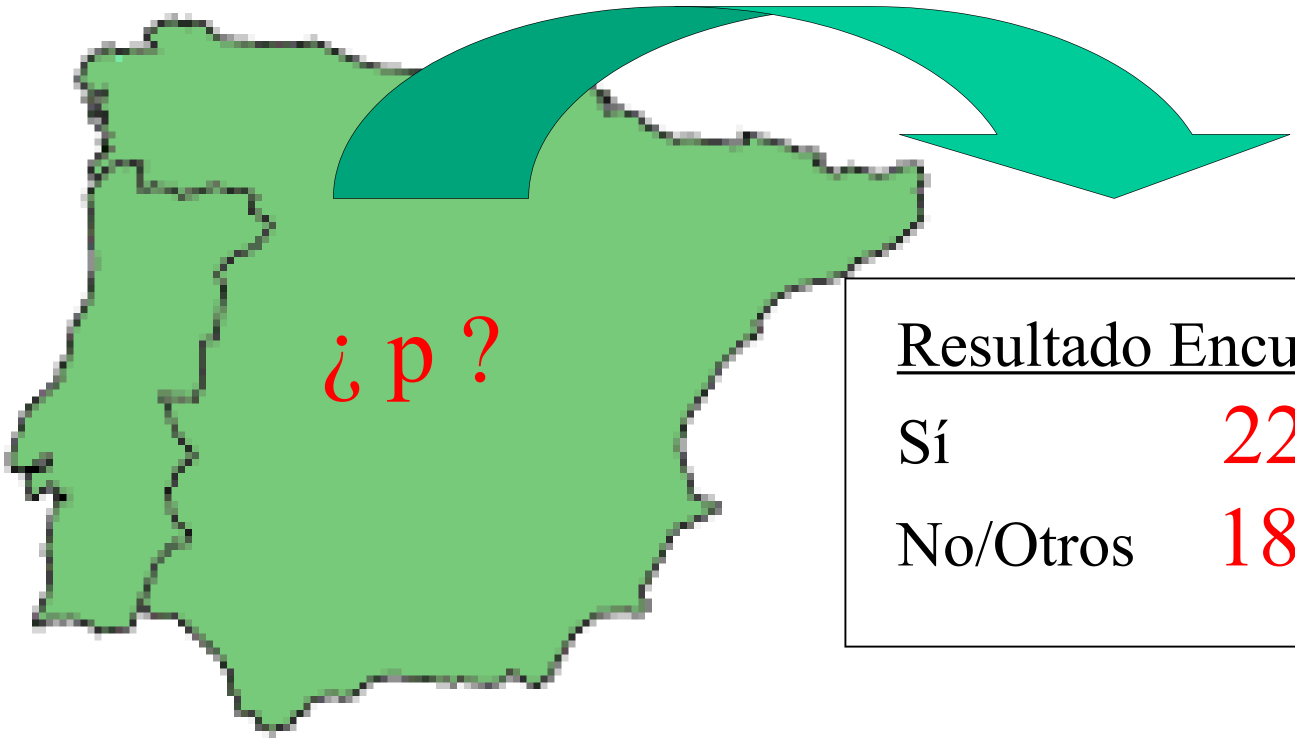
Contraste de Hipótesis

Contraste de Hipótesis

Se ha realizado una encuesta a 400 personas elegidas al azar
Llamando *p* a la proporción de votantes del partido político A.
Podemos afirmar que $p > 0.5$.



Resultado Encuesta	
Sí	220
No/Otros	180

Contraste de hipótesis

$$H_0: \quad p \leq 0.5$$
$$H_1: \quad p > 0.5$$

$\rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} H_0&: \quad p = 0.5 \\ H_1&: \quad p > 0.5 \end{aligned}}$$

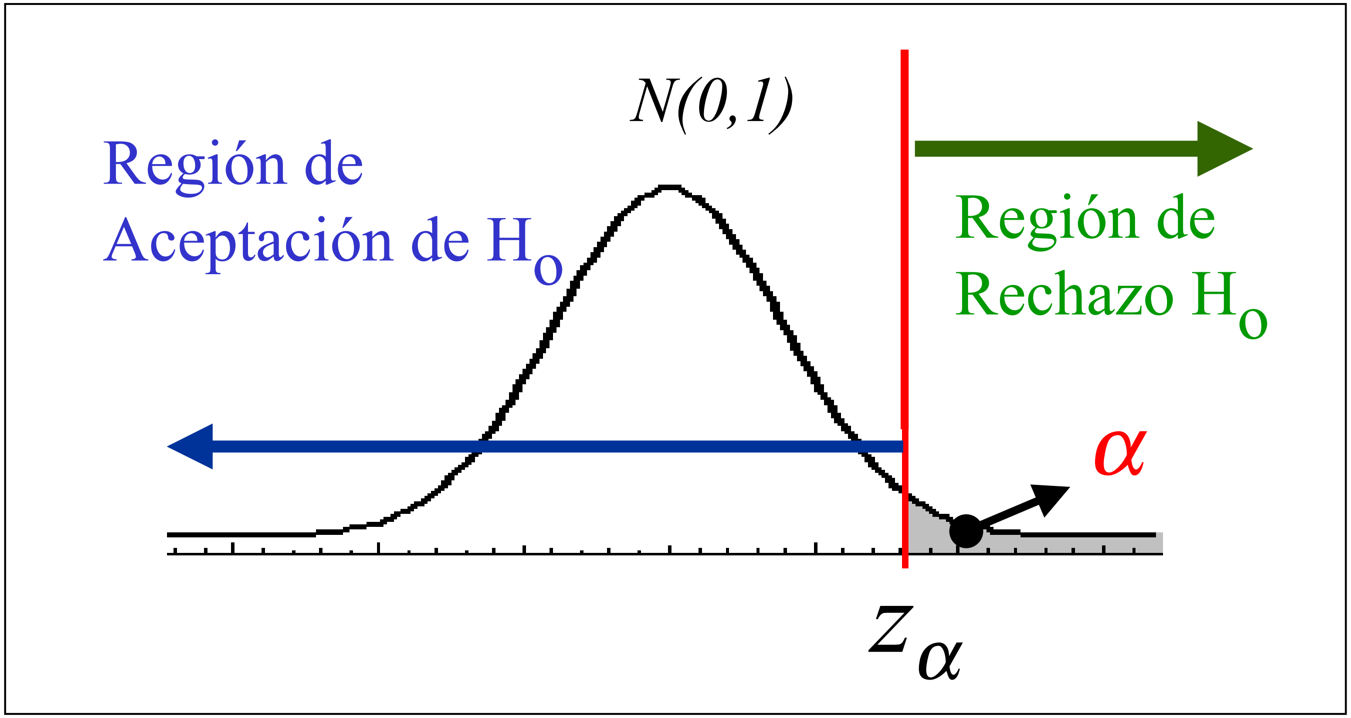
$$\hat{P} \rightarrow N(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}})$$

Si H_0 es cierto $p = 0.5$

$$\frac{\hat{P} - 0.5}{\sqrt{\frac{0.5 \times 0.5}{400}}} \rightarrow N(0,1)$$

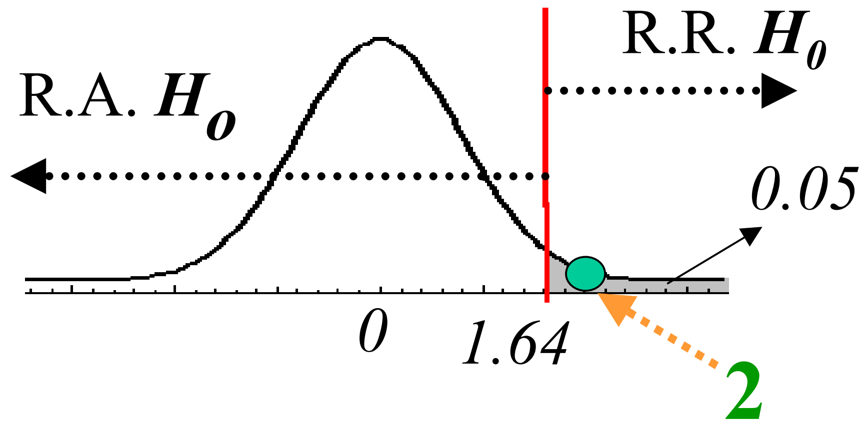
Nivel de significación α

$$\alpha = P(\text{ rechazar } H_0 \mid H_0 \text{ es cierta})$$



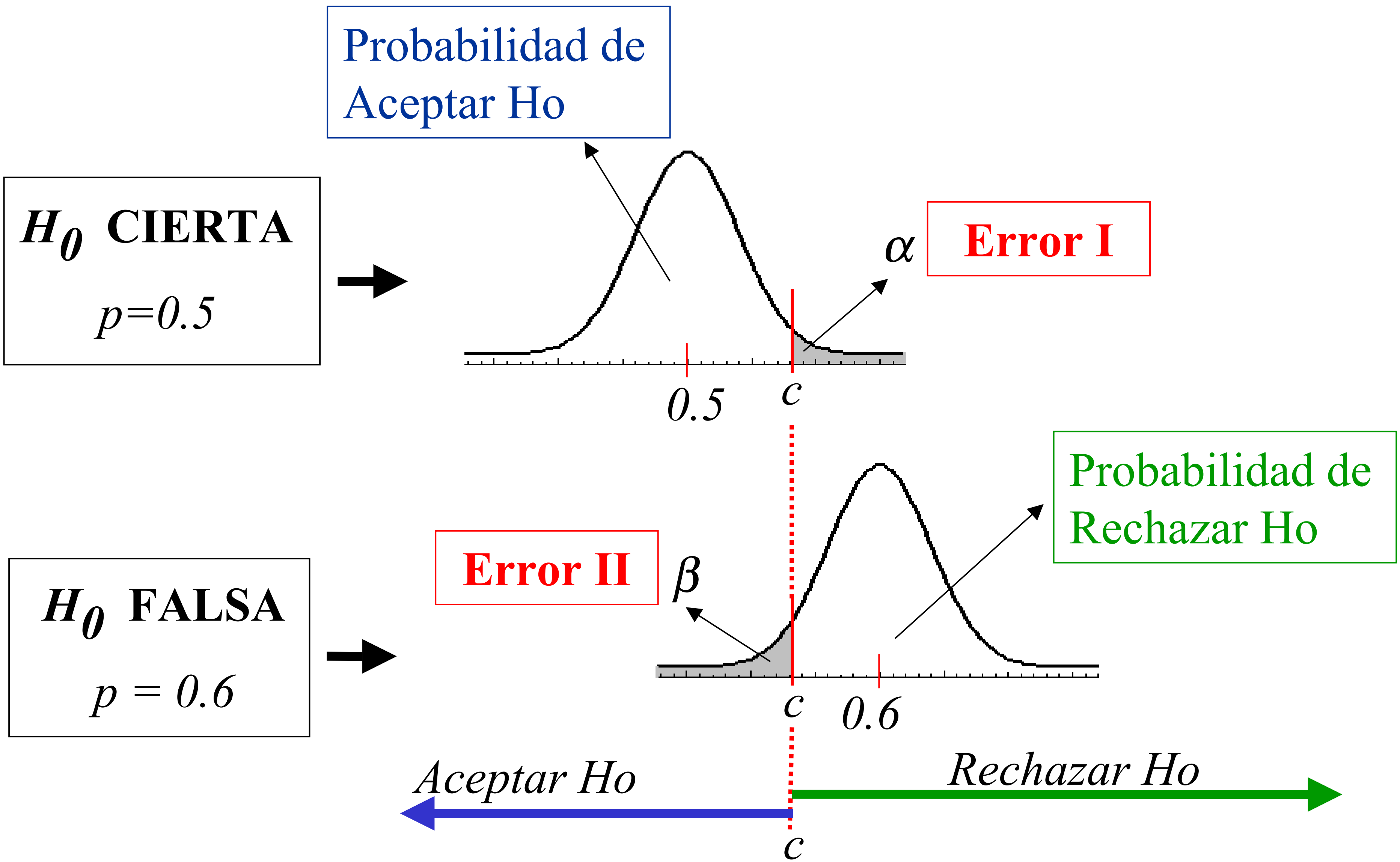
$$\text{Muestra } \hat{p} = 0.55 \Rightarrow z_0 = \frac{0.55 - 0.5}{\sqrt{\frac{0.5 \times 0.5}{400}}} = 2$$

$$\text{Elegido el nivel de significación } \alpha = 0.05$$



$$z_0 = 2 > z_\alpha = 1.64 \quad \Rightarrow \quad \text{Se rechaza } \mathrm{H}_0$$

Con un nivel de significación de $\alpha = 0.05 \quad \Rightarrow \quad p > 0.5$


Probabilidad de Aceptar Ho
H0 CIERTA
p=0.5
α
Error I
0.5
c
Probabilidad de Rechazar Ho
Error II
β
H0 FALSA
p = 0.6
c
0.6
Aceptar Ho
Rechazar Ho
c

Tipos de errores

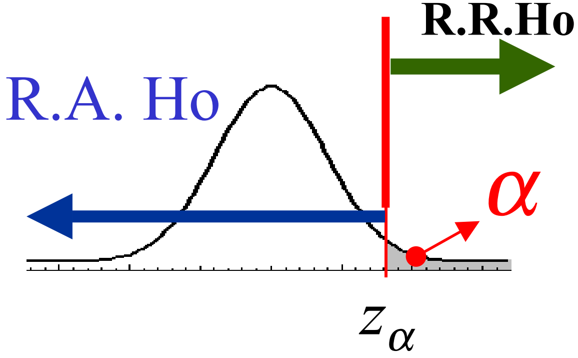
RESULTADO CONTRASTE

REALIDAD	Se **Acepta** H_o	Se **Rechaza** H_o
H_o **CIERTA**	**Ok**	**Error tipo I** α
H_o **FALSA**	**Error tipo II** β	**Ok**

Tipos de Contrastes

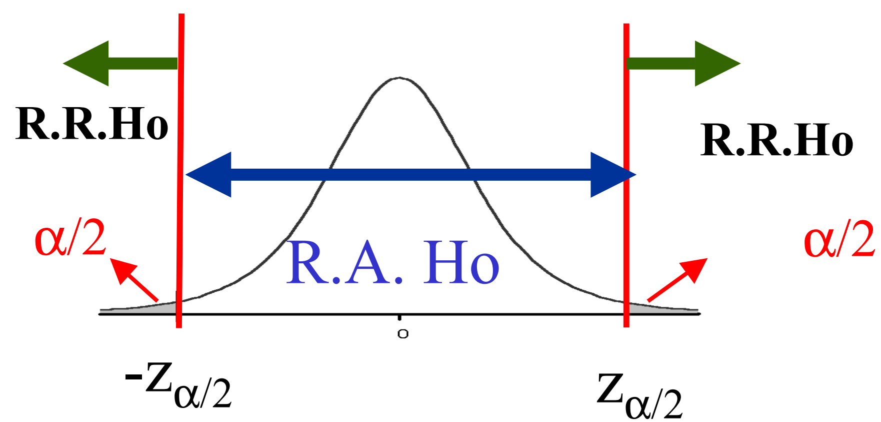
$$H_0: \quad p = 0.5$$
$$H_1: \quad p > 0.5$$

UNILATERAL



$$H_0: \quad p = 0.5$$
$$H_1: \quad p \neq 0.5$$

BILATERAL



Nivel de significación α

Nivel crítico o *p*-valor

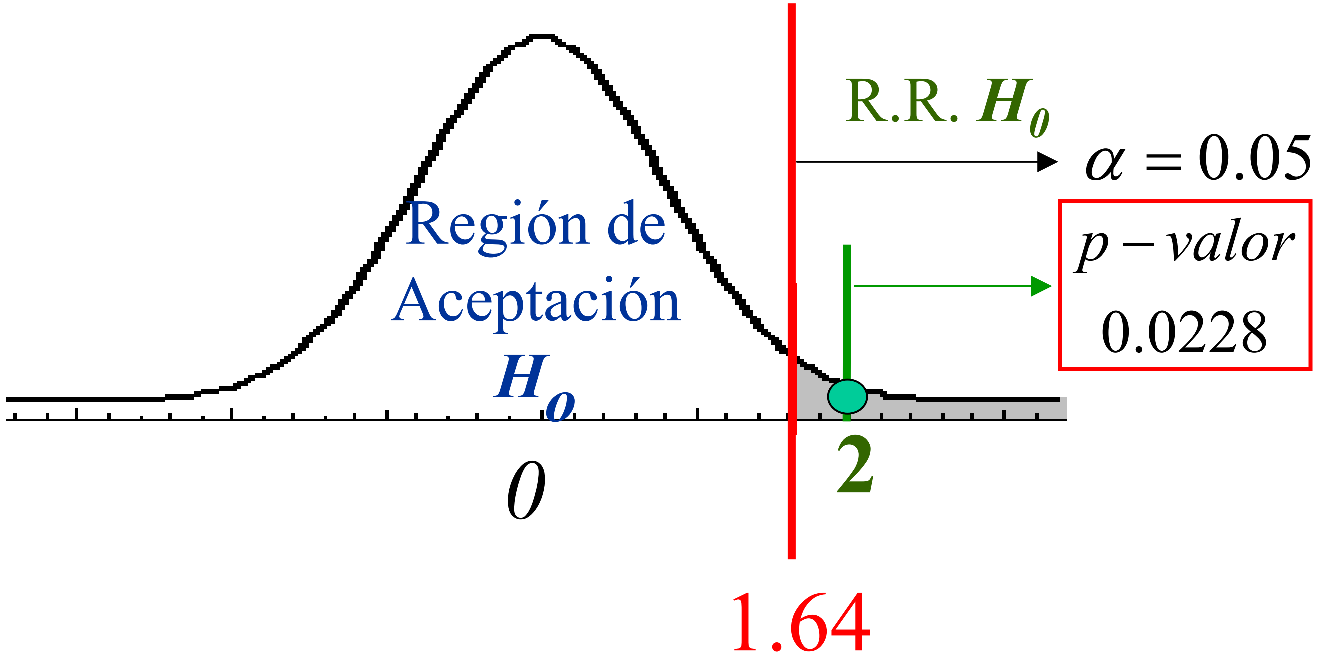
$$\boxed{\begin{aligned} H_0: &\quad p = p_0 \\ H_1: &\quad p > p_0 \end{aligned}}$$

$$\hat{P} \to N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$$

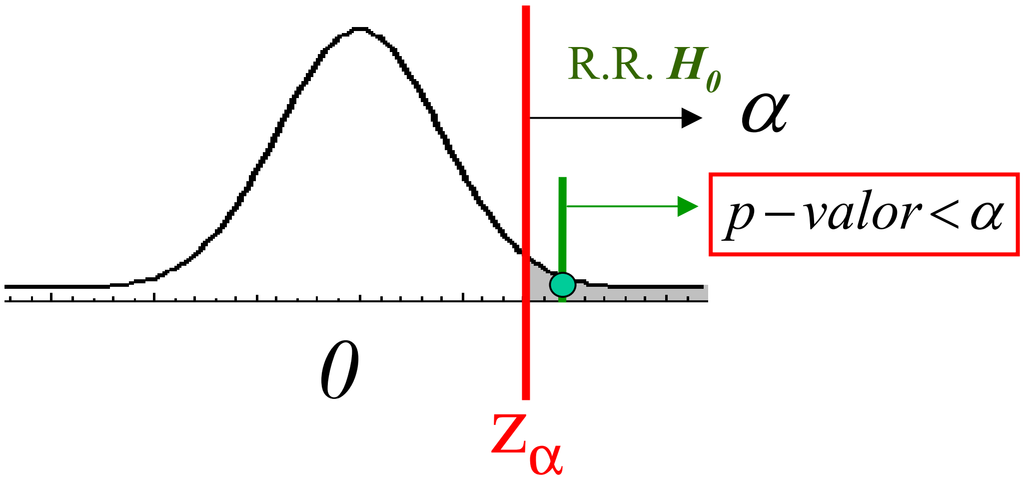
$$\begin{aligned} p-valor &= \Pr(\hat{P} > \hat{p} \mid H_0 \text{ es cierto}) \\ &= \Pr\left(\frac{\hat{P} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} > \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}\right) \\ &= \Pr(Z > z_0) \end{aligned}$$

Ejemplo

Datos: $\hat{p} = \dfrac{220}{400} = 0.55$



Relación entre *p-valor* y α

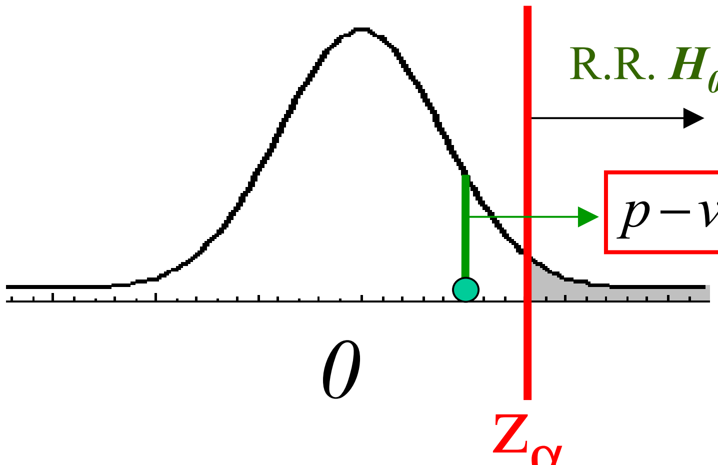


p-valor < α

Se rechaza H_0

p-valor $\geq \alpha$

No se rechaza H_0



1. Normal: Contraste para μ con σ conocido

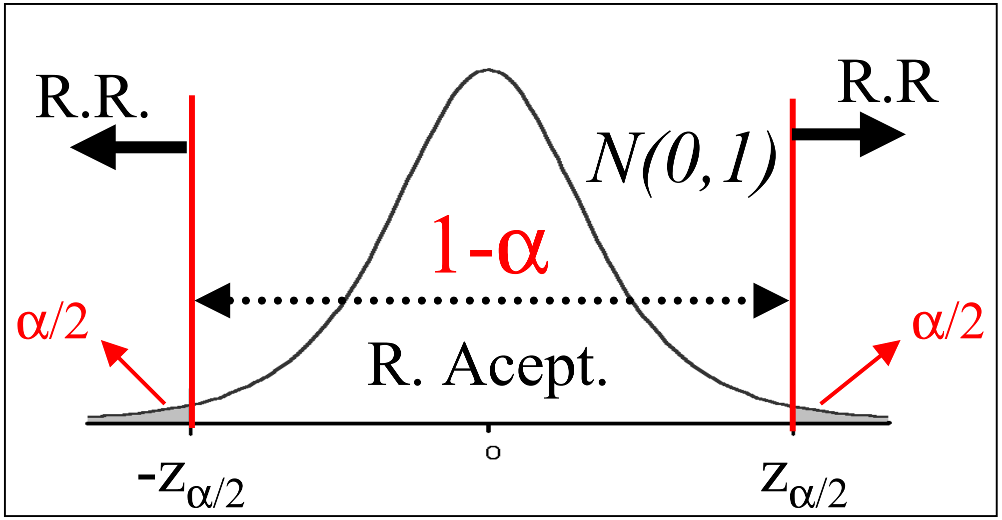
$$X_1, X_2, \ldots, X_n \rightarrow N(\mu, \sigma)$$

$$H_0: \quad \mu = \mu_0$$

$$H_1: \quad \mu \neq \mu_0$$

$$\overline{X} \rightarrow N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \rightarrow N(0,1)$$



$$z_0 = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \longrightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} |z_0| \leq z_{\alpha/2} \Rightarrow \text{No se rechaza } H_0 \\ |z_0| > z_{\alpha/2} \Rightarrow \text{Se rechaza } H_0 \end{array}}$$

2. Normal: Contraste para μ con σ desconocido

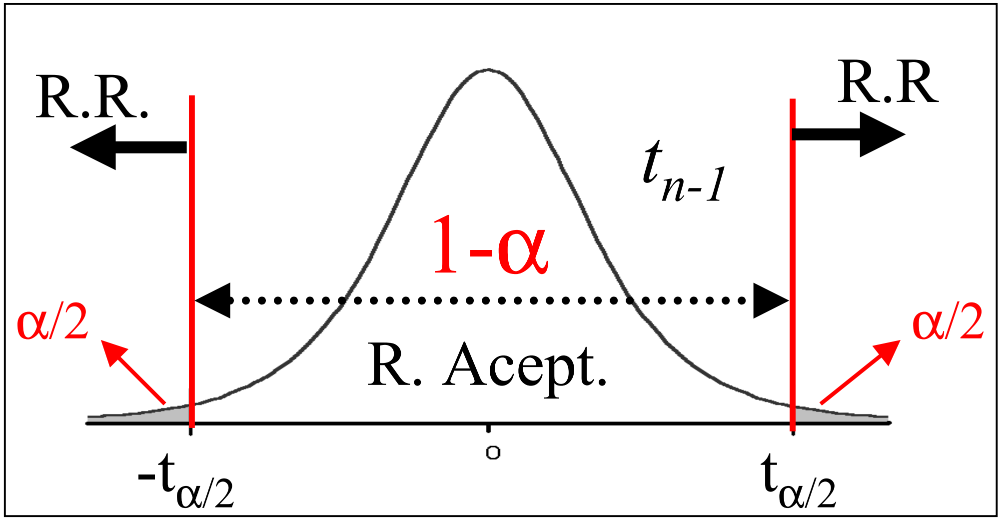
$$X_1, X_2, \ldots, X_n \rightarrow N(\mu, \sigma)$$

$$H_0: \quad \mu = \mu_0$$

$$H_1: \quad \mu \neq \mu_0$$

$$\overline{X} \rightarrow N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\hat{S} / \sqrt{n}} \rightarrow t_{n-1}$$



$$t_0 = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\hat{s} / \sqrt{n}} \longrightarrow$$

$$|t_0| \leq t_{\alpha/2} \Rightarrow \text{No se rechaza } H_0$$

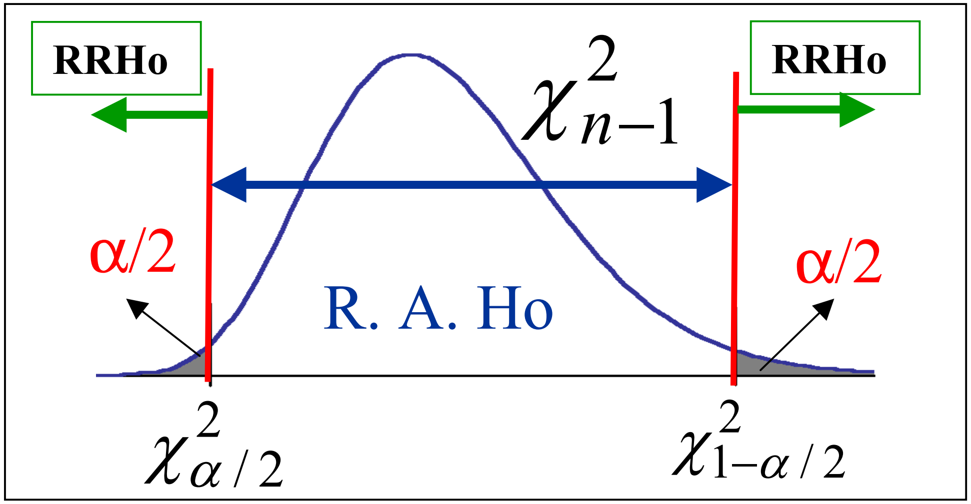
$$|t_0| > t_{\alpha/2} \Rightarrow \text{Se rechaza } H_0$$

3. Normal: Contraste para σ^2

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \to N(\mu, \sigma)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} H_0: \quad \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_0: \quad \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{array}}$$

$$\hat{S}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$$



$$\frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2} \to \chi^2_{n-1} \quad \Rightarrow \quad P(\chi^2_{\alpha/2} \leq \chi^2_{n-1} \leq \chi^2_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

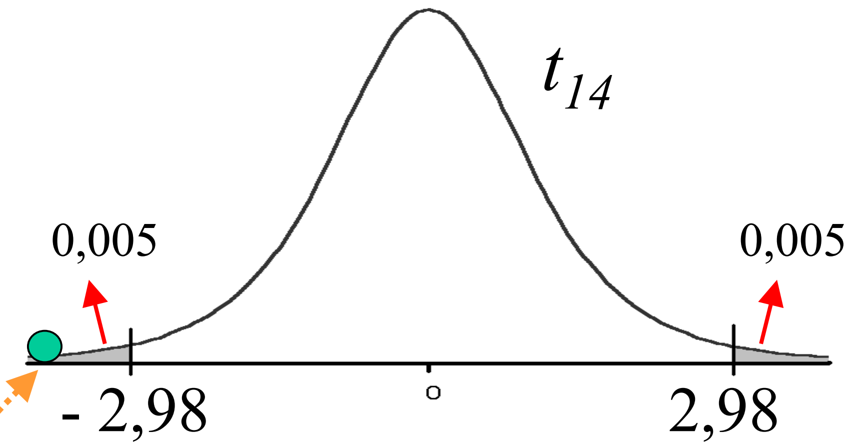
Datos: $\square^2$

$$\chi_0^2 = \frac{(n-1)\hat{s}^2}{\sigma_0^2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \chi_0^2 \in \left[\chi^2_{\alpha/2}, \chi^2_{1-\alpha/2}\right] & \Rightarrow \text{No rechazo } \mathrm{H}_0 \\ \chi_0^2 \notin \left[\chi^2_{\alpha/2}, \chi^2_{1-\alpha/2}\right] & \Rightarrow \text{Rechazo } \mathrm{H}_0 \end{cases}$$

EJEMPLO 1. La resistencia a la compresión de 15 probetas de acero elegidas al azar es:

40,15	65,10	49,50	22,40	38,20
60,40	43,40	26,35	31,20	55,60
47,25	73,20	35,90	45,25	52,40

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : \mu = 60 \\ H_1 : \mu \neq 60 \end{array}\right\} \quad \alpha = 0.01$$



$$\frac{\overline{X} - \mu}{\hat{S} / \sqrt{15}} \rightarrow t_{14}$$

$$P(-2{,}98 \leq t_{14} \leq 2{,}98) = 0.99$$

Datos:

$$\overline{x} = 45{,}75 \quad \hat{s} = 14{,}2 \quad \Rightarrow \qquad t_0 = \frac{45{,}75 - 60}{14{,}2 / \sqrt{15}} = -3.88$$

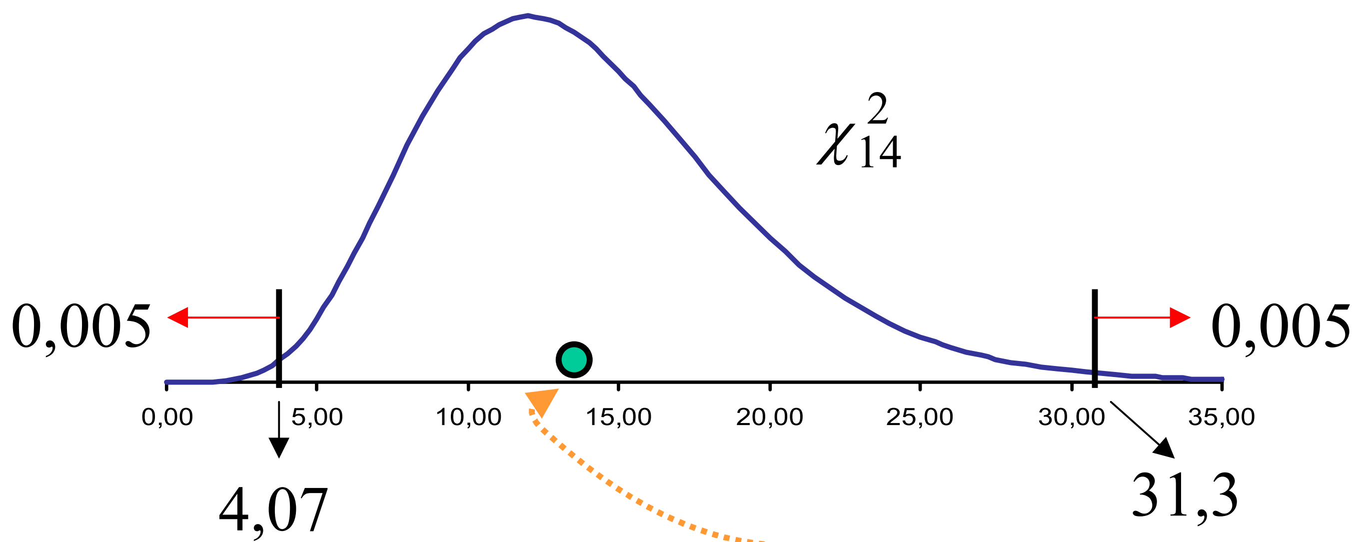
Como 3.88 > 2.98 $\Rightarrow$ Se **rechaza** H_0 con **α=0.01**

$$H_0 : \sigma^2 = 200$$

$$H_1 : \sigma^2 \neq 200$$

$$\frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2} \to \chi^2_{n-1} \qquad \frac{14\hat{S}^2}{\sigma^2} \to \chi^2_{14}$$

$$P(4{,}07 \leq \chi^2_{14} \leq 31{,}3) = 0{,}99$$



Datos:

$$\hat{s}^2 = 201{,}6 \longrightarrow \chi^2_0 = \frac{14 \times 201{,}6}{200} = 14.1$$

Como $4{,}07 \leq 14{,}1 \leq 31{,}3 \Rightarrow$ **No se rechaza $\mathbf{H_0}$**

4. Poisson: Contraste para λ

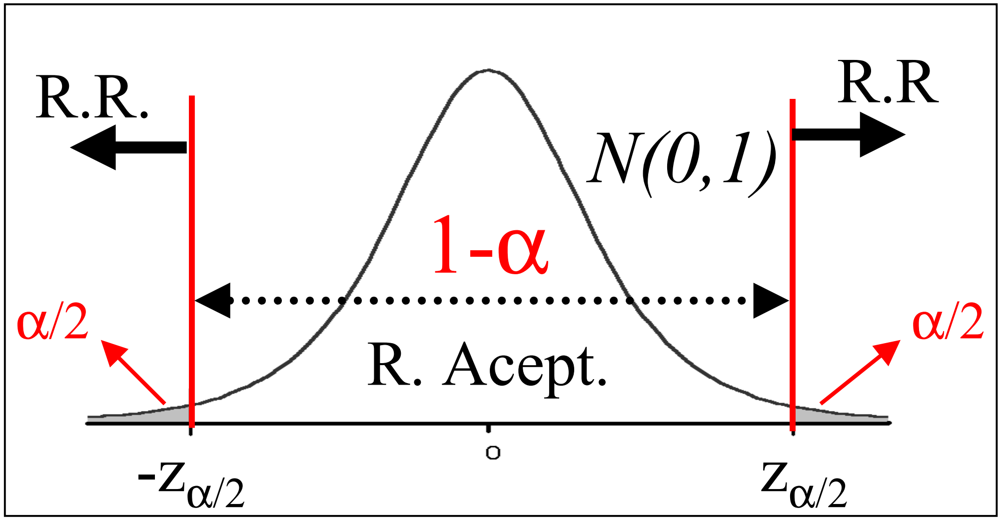
$$X_1, X_2, \ldots, X_n \rightarrow \text{Poisson } (\lambda)$$

$$\left.\begin{aligned} H_0 &: \quad \lambda = \lambda_0 \\ H_1 &: \quad \lambda \neq \lambda_0 \end{aligned}\right\rangle \quad \text{nivel de significación } \alpha$$

$$\hat{\lambda} = \overline{X} \overset{aprox}{\rightarrow} \mathrm{N}(\lambda, \sqrt{\frac{\lambda}{n}})$$

$$Z = \frac{\hat{\lambda} - \lambda}{\sqrt{\frac{\lambda}{n}}} \rightarrow \mathrm{N}(0,1)$$

$$P(-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$



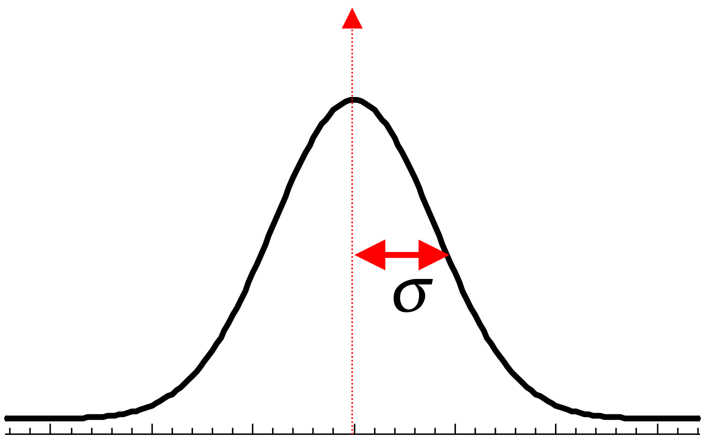
$$z_0 = \frac{\hat{\lambda} - \lambda_0}{\sqrt{\frac{\lambda_0}{n}}}$$

$$|z_0| \leq z_{\alpha/2} \Rightarrow \text{No se rechaza } H_0$$

$$|z_0| > z_{\alpha/2} \Rightarrow \text{Se rechaza } H_0$$

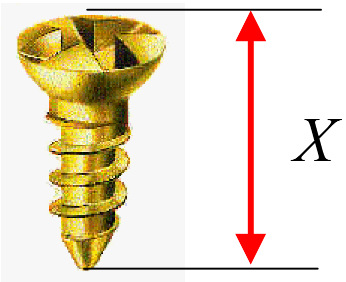
Contraste χ^2 de bondad de ajuste

POBLACIÓN



μ

$$¿\, X \rightarrow N(\mu, \sigma)\, ?$$



MUESTRA n

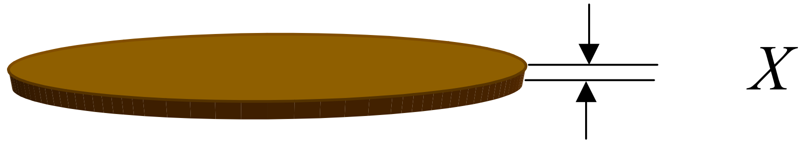
$$X_1, X_2, \ldots, X_n$$

$\boxed{\text{Datos Conocidos}}$

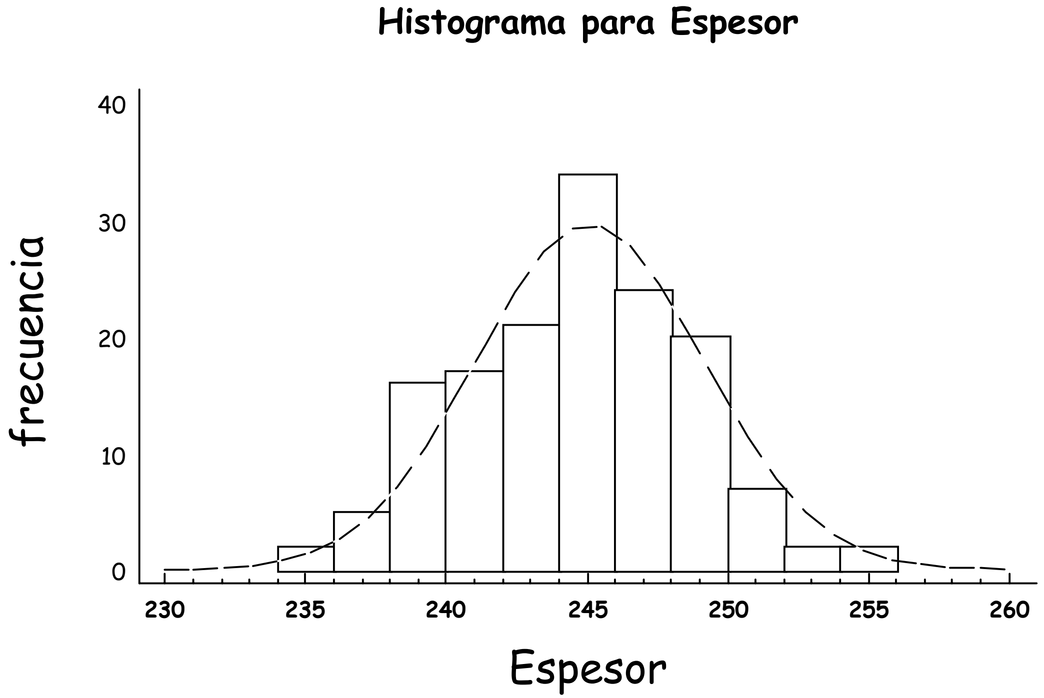
$$\boxed{\begin{array}{l} \hat{\mu} = \bar{x} \\ \hat{\sigma} = \hat{s} \end{array}}$$

¿Tienen los datos distribución Normal?

Espesores de 150 obleas de Silicio (micras)



240	235	240	240	247	237	243	242	236	239
243	237	243	242	245	239	245	245	239	240
250	246	244	246	255	242	248	248	241	242
253	249	249	249	250	247	251	251	246	243
248	246	246	248	249	245	250	249	242	244
238	240	245	240	237	242	244	242	243	239
242	241	250	243	239	244	246	245	246	240
245	246	250	246	243	246	246	248	247	250
251	247	247	250	247	251	250	243	252	252
247	249	248	248	246	248	246	246	247	250
239	240	238	241	242	243	241	241	241	241
242	243	240	245	244	245	239	244	243	243
246	244	245	243	245	247	244	245	245	249
250	248	248	247	248	252	250	249	248	255
248	245	246	245	245	249	246	247	246	253


Histograma para Espesor
40
30
20
10
0
frecuencia
230
235
240
245
250
255
260
Espesor

Contraste χ^2 de bondad de ajuste

$$H_0 : X_i, \forall i = 1,2,\ldots,n \rightarrow f_X$$

$$H_1 : X_i, \forall i = 1,2,\ldots,n \rightarrow f_X$$

Si H_0 es cierto :

Clases	Fr. Observada	Fr. Esperada
$c_o \leq x_i < c_1$	O_1	E_1
$c_1 \leq x_i < c_2$	O_2	E_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$c_{k-1} \leq x_i < c_k$	O_k	E_k
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$c_{K-1} \leq x_i < c_K$	O_K	E_K

$$\boxed{\begin{aligned} E_k &= np_k \\ p_k &= \Pr(c_{k-1} \leq X < c_k) \end{aligned}}$$

$$\sum_{k=1}^{K} O_k = \sum_{k=1}^{K} E_k = n$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{K} \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k} \rightarrow \chi^2_{K-r-1}}$$

Justificación del contraste χ^2

$$O_k \to B(n, p_k) \xrightarrow{n\to\infty} \boxed{O_k \to N(np_k, \sqrt{np_k(1-p_k)})}$$

$$E_k = np_k$$

$$\frac{O_k - np_k}{\sqrt{np_k \underbrace{(1-p_k)}_{\cong 1}}} \to N(0,1)$$

$$\frac{O_k - E_k}{\sqrt{E_k}} \to N(0,1) \Rightarrow \sum_{k=1}^{K}\left(\frac{O_k - E_k}{\sqrt{E_k}}\right)^2 \xrightarrow{aprox} \chi^2_{K-r-1}$$

K $\equiv$ <u>Nº de CLASES</u>   ***r*** $\equiv$ <u>Nº de parámetro estimados</u>

Obleas: Frecuencias Observadas

Clase		Fr. Observada
		Oi
-inf	238	7
238	240	16
240	242	17
242	244	21
244	246	34
246	248	24
248	250	20
250	252	7
252	+inf	4
Total		150

$\bar{x} = 245.1 \quad \text{micras}$

$\hat{s} = 4 \quad \text{micras}$

Frecuencias esperadas N(245.1;4)

Clase		Fr. Observada	Fr. Esperada
		Oi	Ei
-inf	238	7	5,88
238	240	16	9,58
240	242	17	17,71
242	244	21	25,71
244	246	34	29,35
246	248	24	26,34
248	250	20	18,58
250	252	7	10,3
252	+inf	4	6,54
Total		150	150

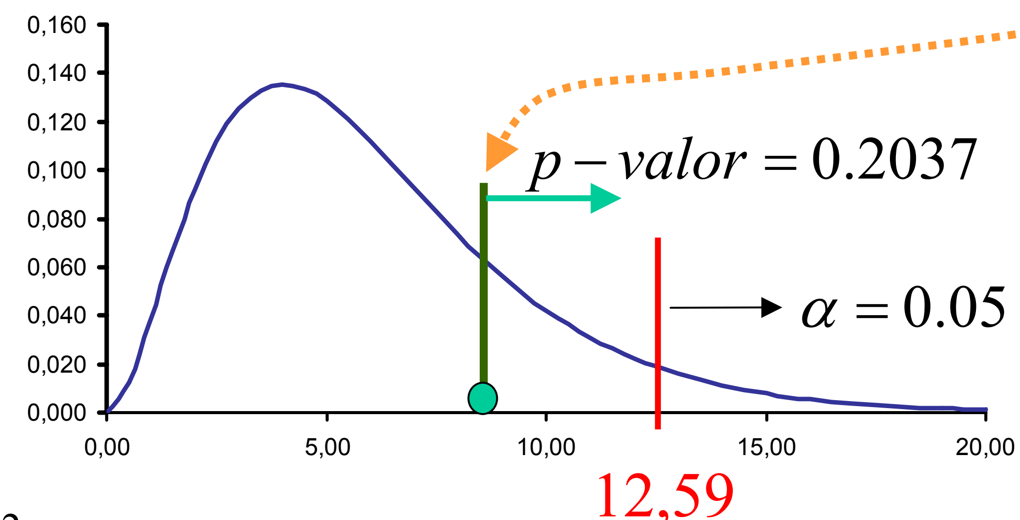
$$
\left.
\begin{aligned}
p_4 &= \Pr(242 \leq X \leq 244) \\
&= \Pr\left(\frac{242-245.1}{4} \leq \frac{X-245.1}{4} \leq \frac{244-245.1}{4}\right) \\
&= P(-0.275 \leq Z \leq -0.775) \\
&= 0.1714 \\
E_4 &= np_4 = 150 \times 0.1714 = 25.71
\end{aligned}
\right\}
$$

Contraste de Normalidad

$$H_0 : X_i \to \text{Normal}$$

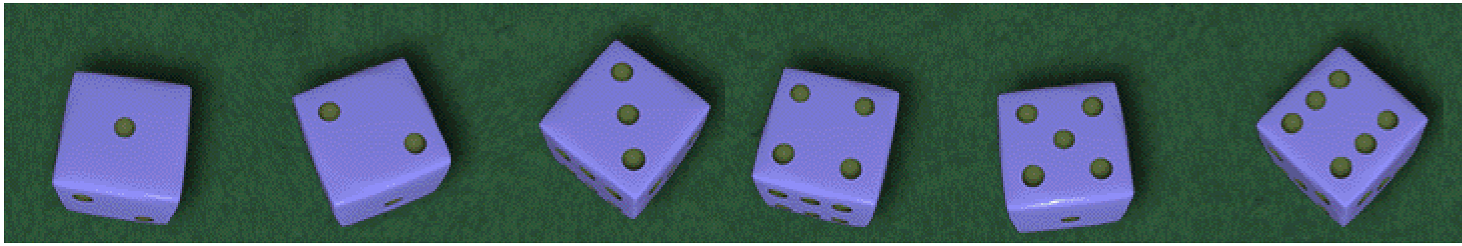
$$H_1 : X_i \not\to \text{Normal}$$

$$\chi_0^2 = \frac{(7-5.88)^2}{5.88} + \frac{(16-9{,}58)^2}{9.58} + \cdots + \frac{(4-6.54)^2}{6.54} = 8.5$$



$$\Pr(\chi_6^2 \le 12.59) = 0.95$$

$$\chi_0^2 = 8.5 < 12.59 \Rightarrow \text{No se rechaza la hipótesis de normalidad}$$



Se ha lanzado 300 veces un dado y se han obtenido los resultados:

Resultados	Observadas
1	49
2	59
3	49
4	51
5	43
6	49
Total	300

¿Se puede afirmar con $\alpha=0.05$ que el dado está desequilibrado?

$$\Pr(X = i) = 1/6, \quad \forall i = 1,2,\ldots,6$$

$$H_o : X \rightarrow \text{Equiprobable}$$

$$\mathrm{H}_1 : X \rightarrow \text{No equiprobable}$$

Resultados	Observados	Esperados
1	49	50
2	59	50
3	49	50
4	51	50
5	43	50
6	49	50
Total	300	300

$$\chi_0^2 = \frac{(49-50)^2}{50} + \frac{(59-50)^2}{50} + \cdots + \frac{(49-50)^2}{50} = 2.68$$

$$\Pr(\chi_5^2 \leq 11.07) = 0.95 \Rightarrow \quad \chi_0^2 = 2.68 < 11.07 \Rightarrow \text{No se Rechaza } \mathrm{H}_0$$