Análisis de la Varianza

E.T.S.I. Industriales

UPM

¿Existen diferencias entre los tratamientos?

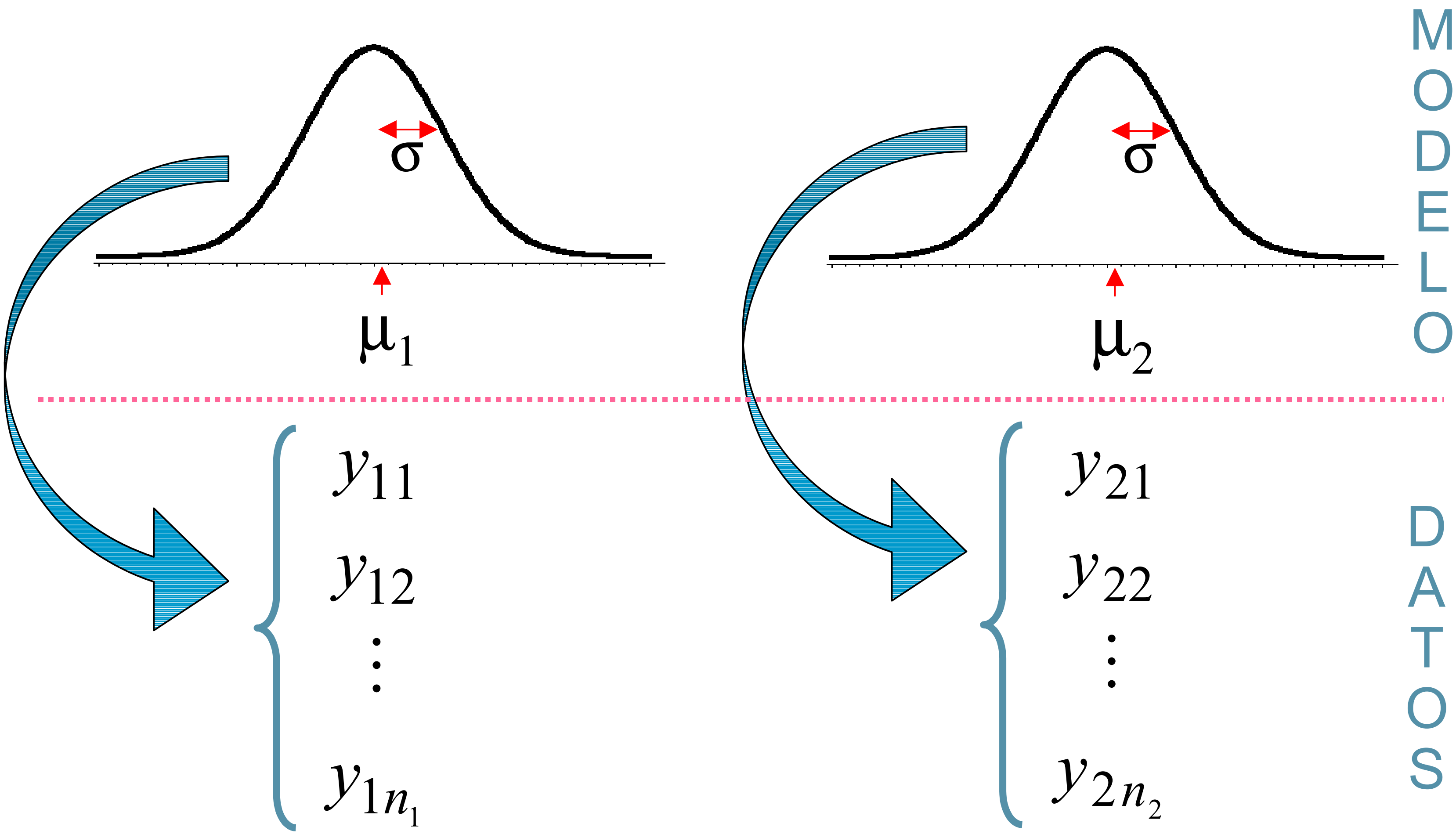
A	B
51,3	29,6
39,4	47,0
26,3	25,9
39,0	13,0
48,1	33,1
34,2	22,1
69,8	34,1
31,3	19,5
45,2	43,8
46,4	24,9

- Se desea comparar dos tratamientos para reducir el nivel de colesterol en la sangre. Se seleccionan 20 individuos y se asignan al azar a dos tipos de dietas A y B. La tabla muestra la reducción conseguida después de dos meses.

Método: 4 pasos

- Definición del modelo de distribución de probabilidad:
  - Hipótesis
  - Parámetros
- Estimación de los parámetros
- Diagnosis de las hipótesis
- Aplicación

Modelo



Modelo: Hipótesis y Parámetros

Hipótesis básicas:

- **Normalidad**

  $y_{ij} \Rightarrow N(\mu_i, \sigma^2)$

- **Homocedasticidad**

  $Var\ [y_{ij}] = \sigma^2$

- **Independencia**

  $Cov\ [y_{ij}, y_{kl}] = 0$

Parámetros

μ_1

μ_2

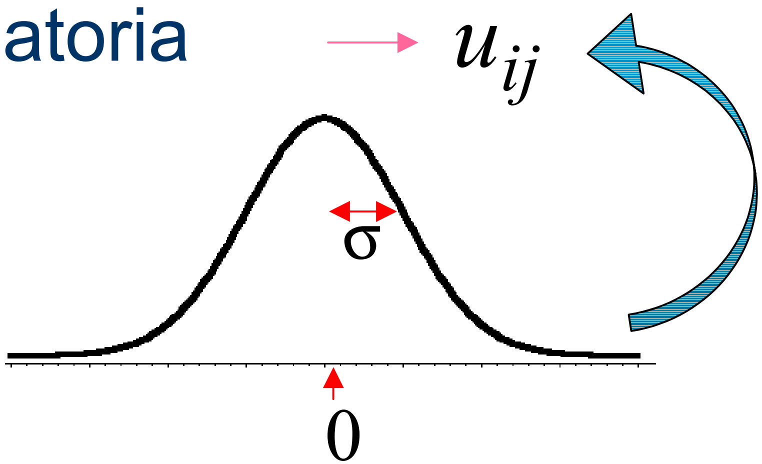
σ^2

Modelo

$$y_{ij} = \mu_i + u_{ij}, \qquad u_{ij} \rightarrow N(0,\sigma^2)$$

Las observaciones se descomponen en:

- Parte predecible $\rightarrow \mu_i$
- Parte aleatoria $\rightarrow u_{ij}$



Estimación medias:

$$\mu_1 : \quad \rightarrow \quad \bar{y}_{1\bullet} = \frac{\sum_{j=1}^{n_1} y_{1j}}{n_1}$$

$$\mu_2 : \quad \rightarrow \quad \bar{y}_{2\bullet} = \frac{\sum_{j=1}^{n_2} y_{2j}}{n_2}$$

A	B
51,3	29,6
39,4	47,0
26,3	25,9
39,0	13,0
48,1	33,1
34,2	22,1
69,8	34,1
31,3	19,5
45,2	43,8
46,4	24,9
43,1	**29,3**

Estimación varianza (residuos)

$$y_{ij} = \mu_i + u_{ij}, \quad u_{ij} \to N(0,\sigma^2)$$

$$u_{ij} = y_{ij} - \mu_i$$

$$e_{ij} = y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet}$$

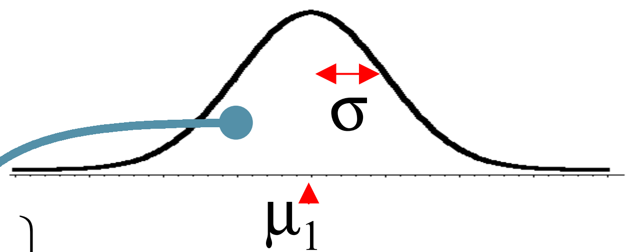
e_{ij} : **RESIDUO**

$$\sigma^2 :\to \hat{s}_R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{n_i} e_{ij}^2}{n-2}$$

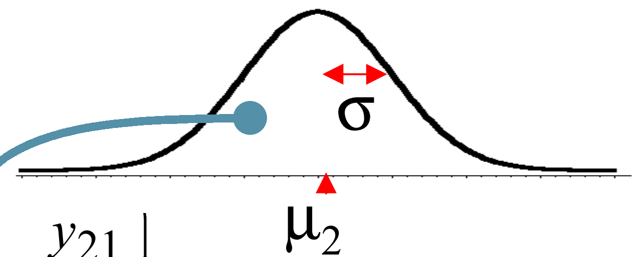
	Residuos		
	A	**B**	
	8,2	0,3	
	-3,7	17,7	
	-16,8	-3,4	
	-4,1	-16,3	
	5,0	3,8	
	-8,9	-7,2	
	26,7	4,8	
	-11,8	-9,8	
	2,1	14,5	
	3,3	-4,4	
	0,0	**0,0**	

$$\sum_{j=1}^{n_i} e_{ij} = 0; \hat{s}_R^2 = 130.95$$

Varianza residual: $\hat{s}_R^2$



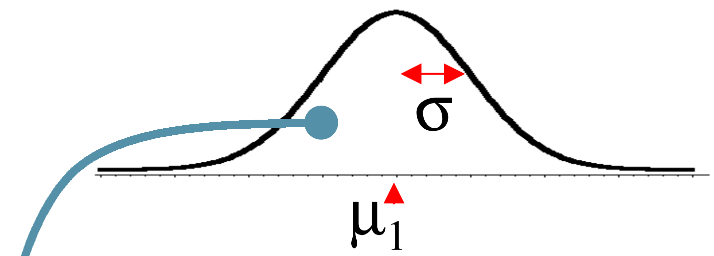
$$\left.\begin{matrix} y_{11} \\ y_{12} \\ \vdots \\ y_{1n_1} \end{matrix}\right\} \hat{s}_1^2 = \frac{\Sigma\,(y_{1j} - \bar{y}_{1\bullet})^2}{n_1 - 1}$$



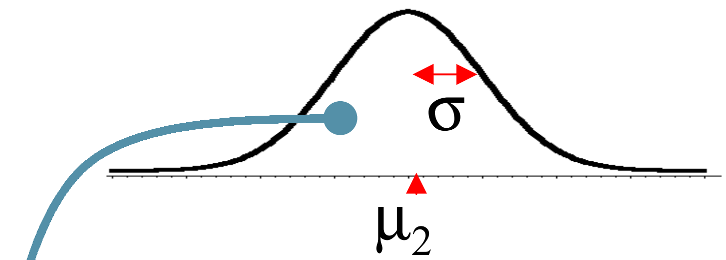
$$\left.\begin{matrix} y_{21} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{2n_2} \end{matrix}\right\} \hat{s}_2^2 = \frac{\Sigma(y_{2j} - \bar{y}_{2\bullet})^2}{n_2 - 1}$$

$$\hat{s}_R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{n_i} e_{ij}^2}{n-2} = \frac{n_1 - 1}{n-1}\hat{s}_1^2 + \frac{n_2 - 1}{n-1}\hat{s}_2^2$$

Diferencia de medias: $\bar{y}_{1\bullet} - \bar{y}_{2\bullet}$



$$\left.\begin{array}{c} y_{11} \\ y_{12} \\ \vdots \\ y_{1n_1} \end{array}\right\} \quad \bar{y}_{1\bullet} \rightarrow N\left(\mu_1, \frac{\sigma^2}{n_1}\right)$$



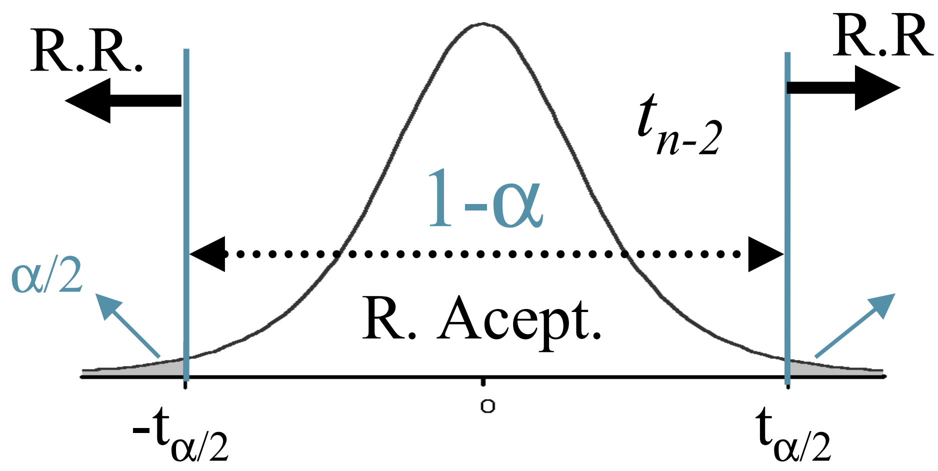
$$\left.\begin{array}{c} y_{21} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{2n_2} \end{array}\right\} \quad \bar{y}_{2\bullet} \rightarrow N\left(\mu_2, \frac{\sigma^2}{n_2}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{y}_{1\bullet} - \bar{y}_{2\bullet} \rightarrow N\left(\mu_1 - \mu_2, \dfrac{\sigma^2}{n_1} + \dfrac{\sigma^2}{n_2}\right) \\ \dfrac{(\bar{y}_{1\bullet} - \bar{y}_{2\bullet}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \rightarrow N(0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\dfrac{(\bar{y}_{1\bullet} - \bar{y}_{2\bullet}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\hat{s}_R\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \rightarrow t_{n-2}}$$

Contraste de igualdad de medias

$$H_0: \quad \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1: \quad \mu_1 \neq \mu_2$$

$$t_0 = \frac{\bar{y}_{1\bullet} - \bar{y}_{2\bullet}}{\hat{s}_R \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \rightarrow t_{n-2}$$

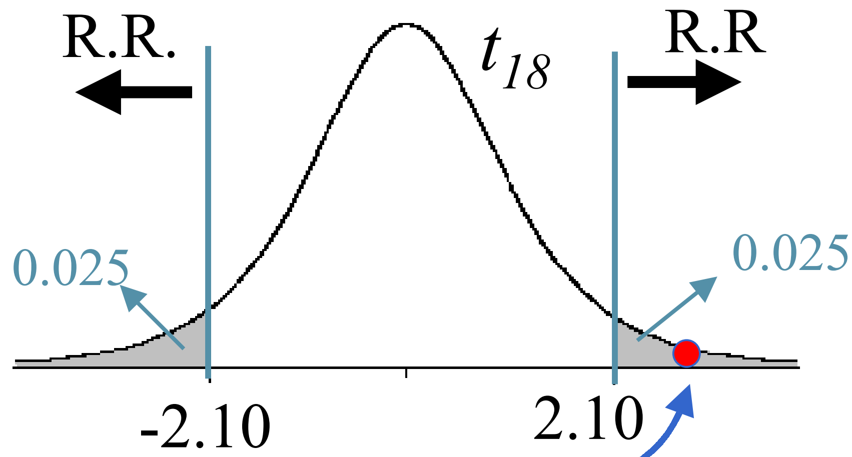


$$|t_0| \leq t_{\alpha/2} \Rightarrow \text{No se rechaza } H_0$$
$$|t_0| > t_{\alpha/2} \Rightarrow \text{Se rechaza } H_0$$

Ejemplo: $\alpha = 0.05$

$$H_0: \quad \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1: \quad \mu_1 \neq \mu_2$$

$$t_0 = \frac{43.1 - 29.3}{11.44\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}}} = 2.69$$

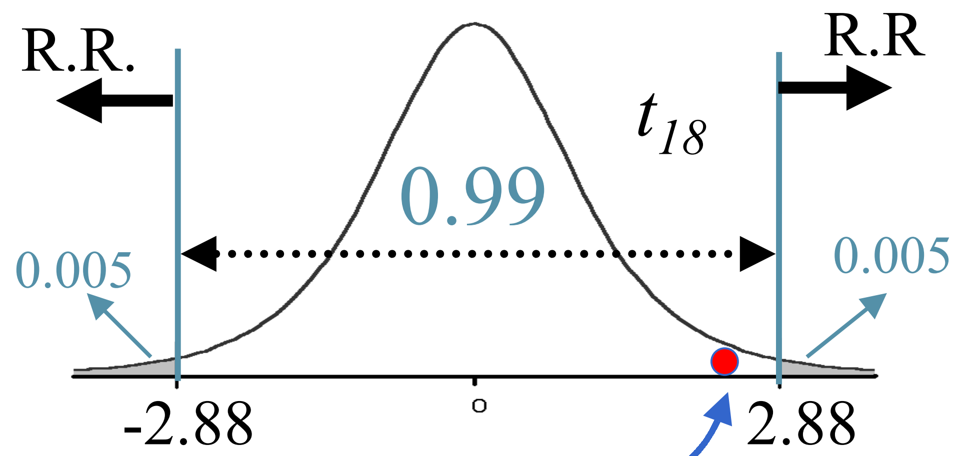


$$\boxed{2.69 > 2.10 \Rightarrow Se\ \text{rechaza}\ H_0}$$

Ejemplo: α = 0.01

$$H_0: \quad \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1: \quad \mu_1 \neq \mu_2$$

$$t_0 = \frac{43.1 - 29.3}{11.44\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}}} = 2.69$$

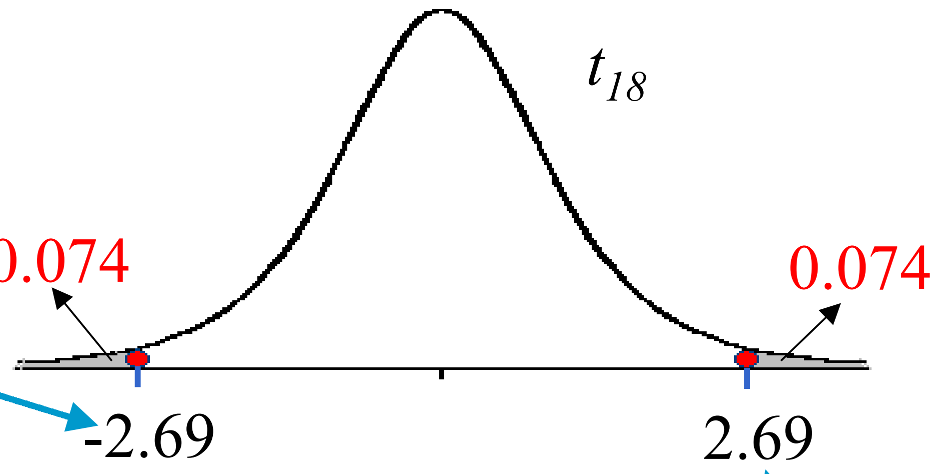


$$\boxed{2.69 \leq 2.88 \Rightarrow \text{No se rechaza } H_0}$$

Nivel crítico (bilateral)

$$H_0: \quad \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1: \quad \mu_1 \neq \mu_2$$

$$t_0 = \frac{43.1 - 29.3}{11.44\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}}} = 2.69$$



$$\boxed{p - valor = \Pr(|t_{18}| > 2.69) = 0.0147}$$

- $\alpha = 0.05 > p\text{-}valor \Rightarrow$ Se rechaza H_0
- $\alpha = 0.01 < p\text{-}valor \Rightarrow$ No se rechaza H_0

Conclusiones (fijado α)

- Si $|t_o| > t_{\alpha/2}$ se dice que **la diferencia de medias es significativa**. O simplemente que los tratamientos son distintos (tienen medias distintas)

- Si $|t_o| \leq t_{\alpha/2}$ se dice que **la diferencia de medias no es significativa**. No hay evidencia suficiente para afirmar que las medias de los tratamientos sean diferentes.

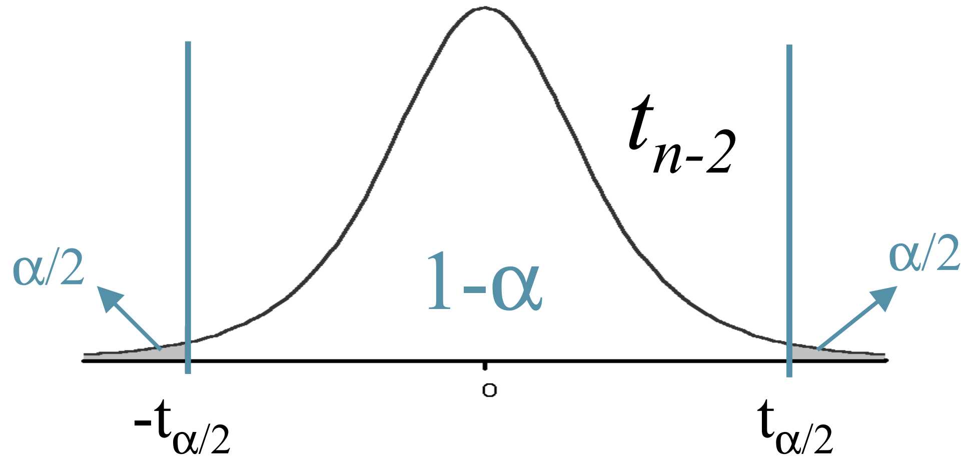
No rechazar H_o, <u>no implica</u> que H_o sea cierta

- El resultado $|t_o| \leq t_{\alpha/2}$, (no se rechaza H_o) **no debe interpretarse** como que "*se ha demostrado que las dos medias son iguales*".

  No rechazar la hipótesis nula implica que la diferencia entre las medias $\mu_1 - \mu_2$ no es lo suficientemente grande como para ser detectada con el tamaño muestral dado.

Intervalo de confianza para la diferencia de medias: $\mu_1 - \mu_2$

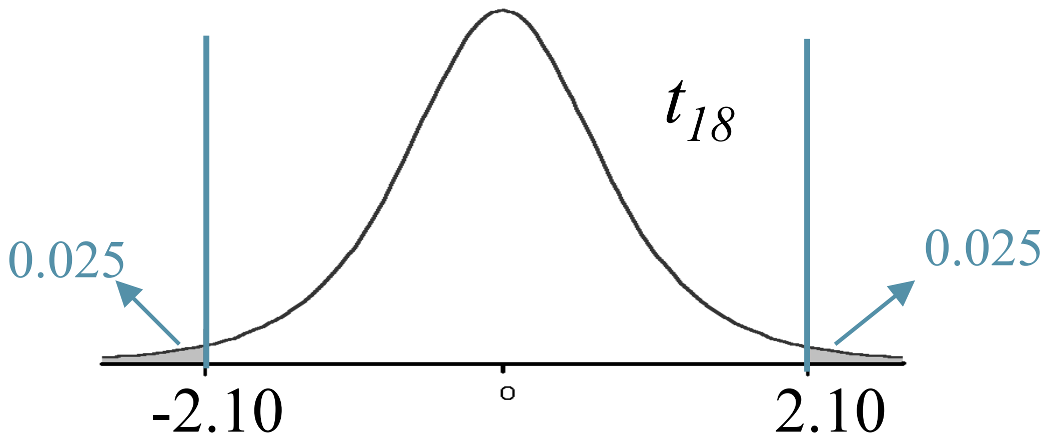
$$\frac{(\bar{y}_{1\bullet} - \bar{y}_{2\bullet}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\hat{s}_R \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \rightarrow t_{n-2}$$



$$\Pr\left\{-t_{\alpha/2} \le \frac{(\bar{y}_{1\bullet} - \bar{y}_{2\bullet}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\hat{s}_R \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \le t_{\alpha/2}\right\} = 1 - \alpha$$

$$\mu_1 - \mu_2 \in (\bar{y}_{1\bullet} - \bar{y}_{2\bullet}) \ \pm \ t_{\alpha/2} \hat{s}_R \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

Ejemplo: intervalo de confianza $\mu_1 - \mu_2$

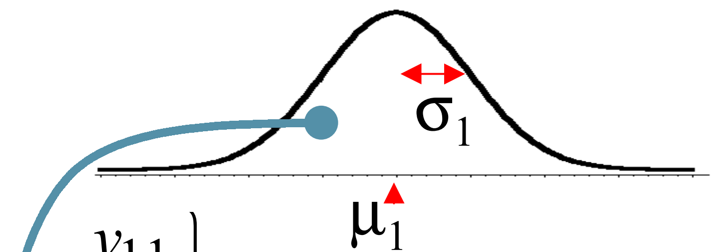


$$\mu_1 - \mu_2 \in (\bar{y}_{1\bullet} - \bar{y}_{2\bullet}) \pm t_{\alpha/2}\hat{s}_R\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

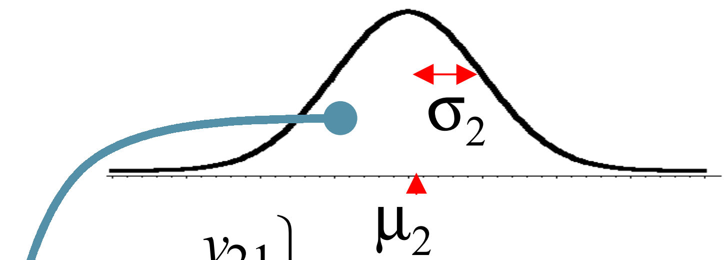
$$\mu_1 - \mu_2 \in (43.1 - 29.3) \pm 2.10 \times 11.44 \times \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}}$$

$$\mu_1 - \mu_2 \in 13.8 \pm 10.74$$

Hipótesis de homocedasticidad



$$\left.\begin{array}{l} y_{11} \\ y_{12} \\ \vdots \\ y_{1n_1} \end{array}\right\} \hat{s}_1^2 = \frac{\Sigma (y_{1j} - \bar{y}_{1\bullet})^2}{n_1 - 1}$$



$$\left.\begin{array}{l} y_{21} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{2n_2} \end{array}\right\} \hat{s}_2^2 = \frac{\Sigma (y_{2j} - \bar{y}_{2\bullet})^2}{n_2 - 1}$$

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

Distribución F

$$\left.\begin{matrix} y_{11} \\ y_{12} \\ \vdots \\ y_{1n_1} \end{matrix}\right\} \hat{s}_1^2 = \frac{\Sigma(y_{1j} - \bar{y}_{1\bullet})^2}{n_1 - 1}$$

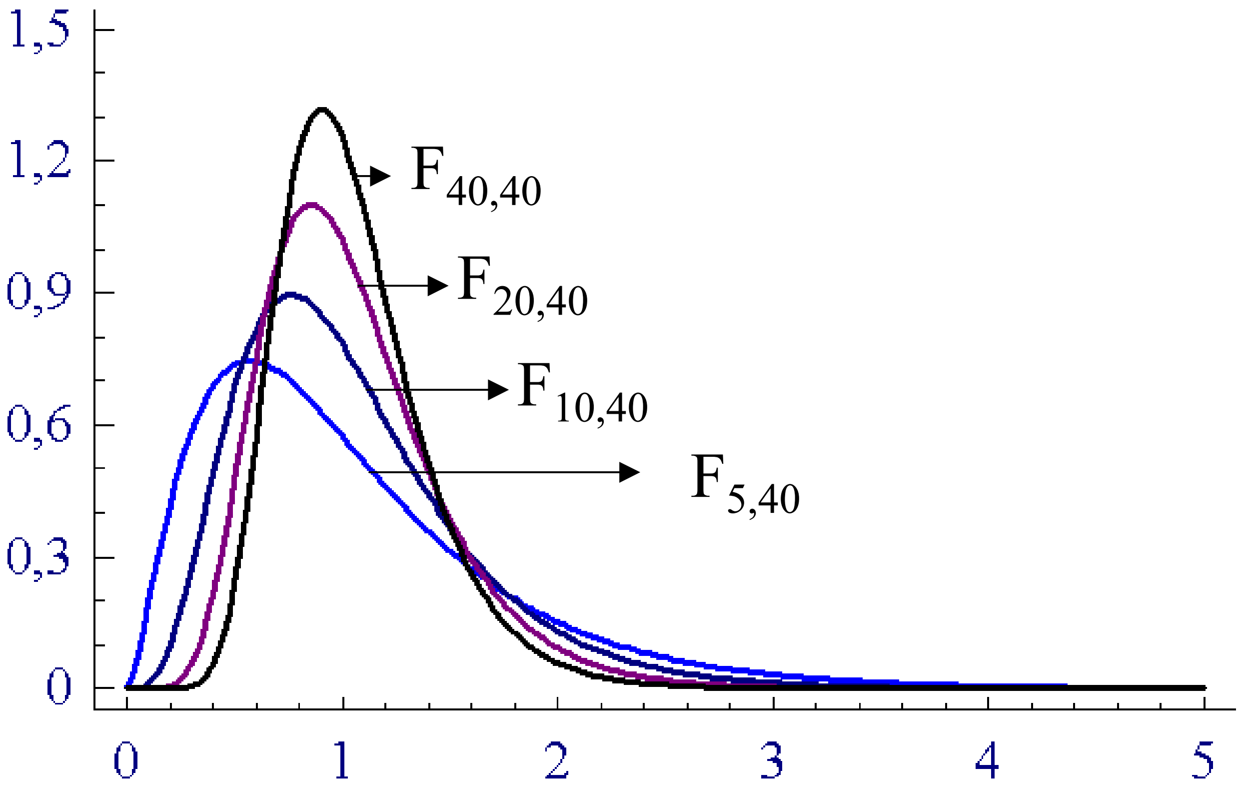
$$\left.\begin{matrix} y_{21} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{2n_2} \end{matrix}\right\} \hat{s}_2^2 = \frac{\Sigma(y_{2j} - \bar{y}_{2\bullet})^2}{n_2 - 1}$$

$$\frac{(n_1 - 1)\hat{s}_1^2}{\sigma_1^2} \to \chi^2_{n_1 - 1}$$

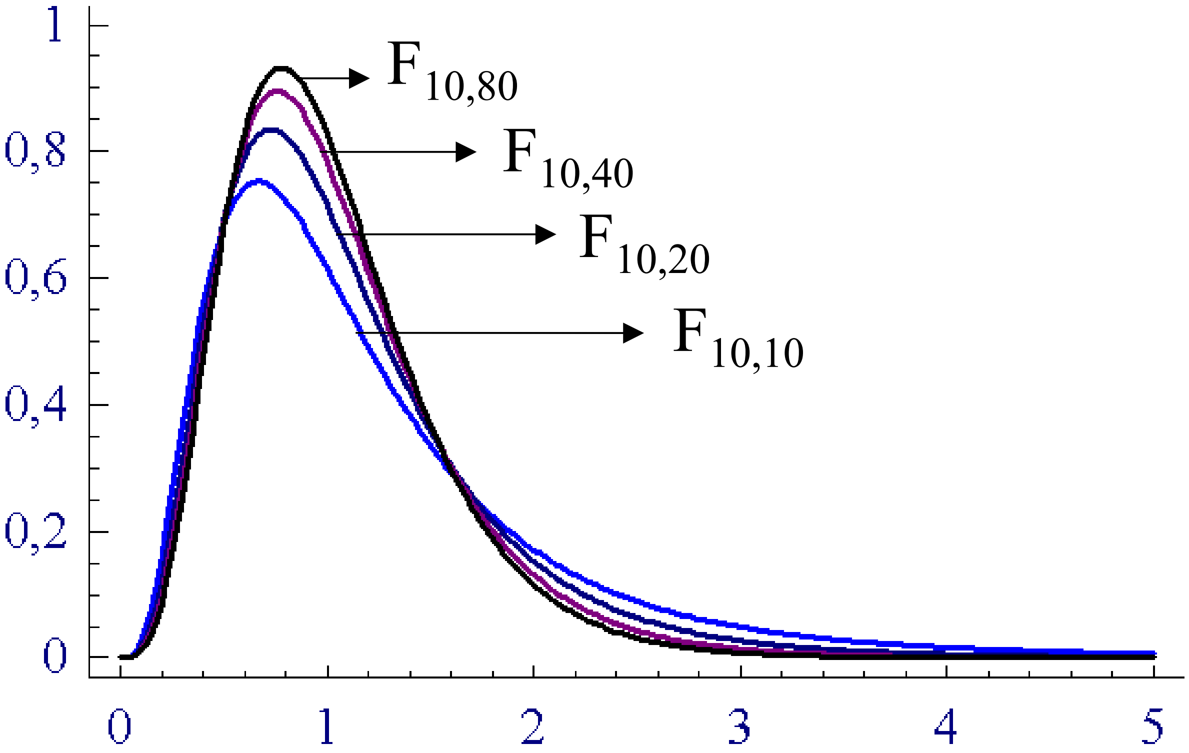
$$\frac{(n_2 - 1)\hat{s}_2^2}{\sigma_2^2} \to \chi^2_{n_2 - 1}$$

$$\boxed{F = \frac{\chi^2_{n_1-1} \big/ (n_1 - 1)}{\chi^2_{n_2-1} \big/ (n_2 - 1)} = \frac{\hat{s}_1^2 \big/ \sigma_1^2}{\hat{s}_2^2 \big/ \sigma_2^2} \to F_{n_1-1, n_2-1}}$$

Distribución F



Algunas distribuciones F



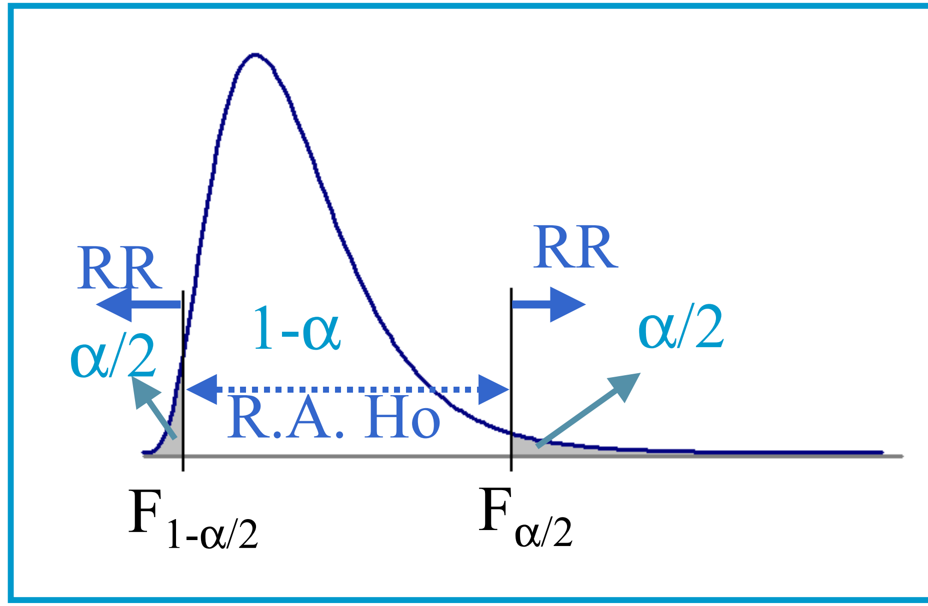
Contraste de igualdad de varianzas

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

Si H_0 es cierto $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$,

$$F_0 = \frac{\hat{s}_1^2}{\hat{s}_1^2} \rightarrow F_{n_1 - 1, n_2 - 1}$$



$$\text{Si } F_0 \in \left[F_{1-\alpha/2}, F_{\alpha/2}\right] \Rightarrow \text{No se rechaza } H_0$$

$$\text{Si } F_0 \notin \left[F_{1-\alpha/2}, F_{\alpha/2}\right] \Rightarrow \text{Se rechaza } H_0$$

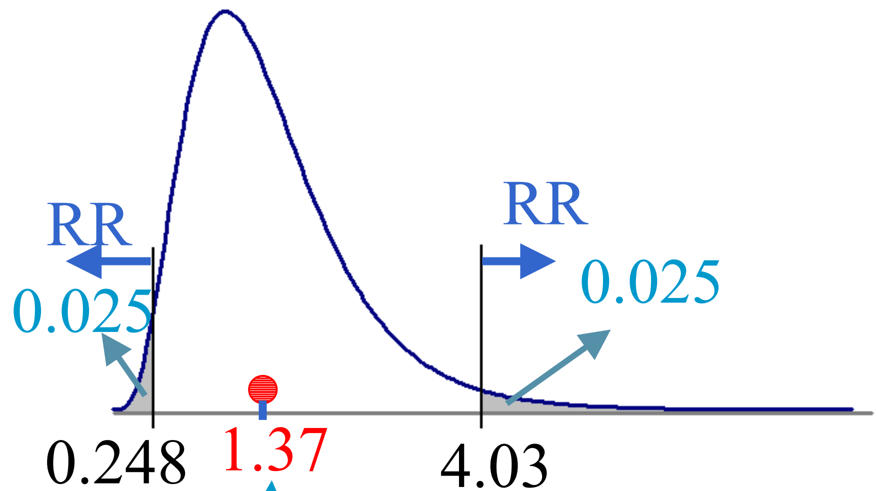
Ejemplo: Contraste de igualdad de varianzas

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

$$\hat{s}_1^2 = 154.02 \quad \hat{s}_2^2 = 111.7$$

$$F_0 = \frac{154.02}{111.7} = 1.37$$



$$1.37 \in [0.248, 4.03] \Rightarrow \text{No se rechaza } H_0$$

Comparación de más de dos tratamientos

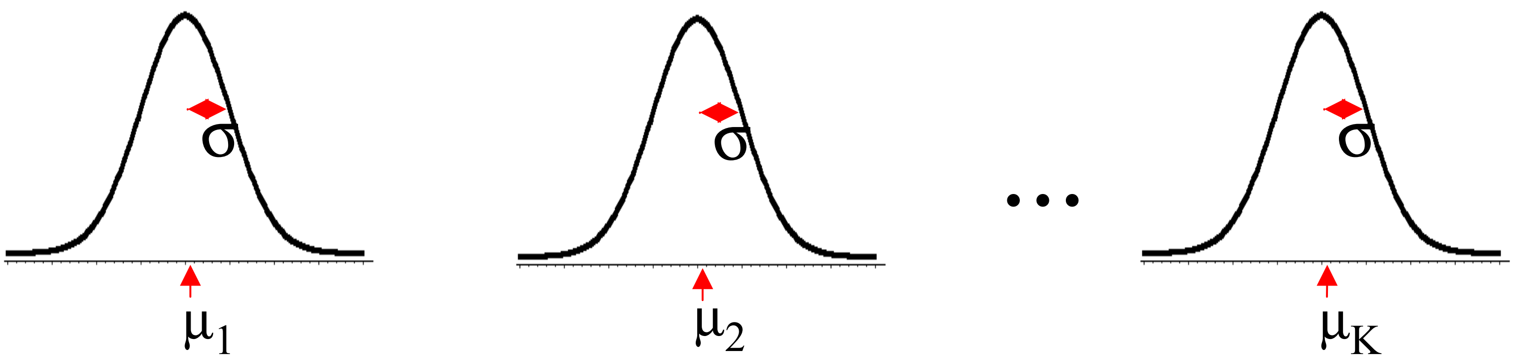
- Se desea comparar el rendimiento de cuatro semillas **A**,**B**,**C** y **D**. Un terreno se divide en 24 parcelas similares y se asigna al azar cada semilla a 6 parcelas.

A	B	C	D
229.1	233.4	211.1	270.4
253.7	233.0	223.1	248.6
241.3	219.2	217.5	230.0
254.7	200.0	211.8	250.7
237.2	224.3	207.6	230.0
241.3	202.0	213.7	245.8

Método: 4 pasos

- Definición del modelo de distribución de probabilidad:
  - Hipótesis
  - Parámetros
- Estimación de los parámetros
- Diagnosis de las hipótesis
- Aplicación

Modelo



$$
\begin{array}{cccc}
\downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
y_{11} & y_{21} & & y_{K1} \\
y_{12} & y_{22} & & y_{K2} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
y_{1n_1} & y_{2n_2} & & y_{Kn_K}
\end{array}
$$

Modelo: Hipótesis y Parámetros

Hipótesis básicas:

- Normalidad

  $y_{ij} \Rightarrow N(\mu_i,\sigma^2)$

- Homocedasticidad

  $Var\,[y_{ij}] = \sigma^2$

- Independencia

  $Cov\,[y_{ij}, y_{kl}] = 0$

Parámetros

μ_1

μ_2

$\vdots$

μ_K

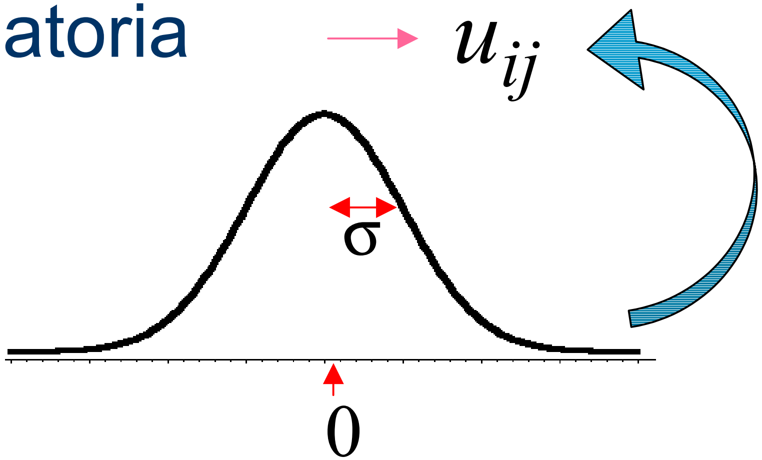
σ^2

Modelo

$$y_{ij} = \mu_i + u_{ij}, \qquad u_{ij} \rightarrow N(0, \sigma^2)$$

Las observaciones se descomponen en:

- Parte predecible → μ_i
- Parte aleatoria → u_{ij}



Estimación medias: Max. Verosímil

$$\mu_1 : \quad \rightarrow \quad \bar{y}_{1\bullet} = \frac{\sum_{j=1}^{n_1} y_{1j}}{n_1}$$

$$\mu_2 : \quad \rightarrow \quad \bar{y}_{2\bullet} = \frac{\sum_{j=1}^{n_2} y_{2j}}{n_2}$$

$$\vdots$$

$$\mu_K : \quad \rightarrow \quad \bar{y}_{K\bullet} = \frac{\sum_{j=1}^{n_K} y_{Kj}}{n_K}$$

A	B	C	D
229.1	233.4	211.1	270.4
253.7	233.0	223.1	248.6
241.3	219.2	217.5	230.0
254.7	200.0	211.8	250.7
237.2	224.3	207.6	230.0
241.3	202.0	213.7	245.8
242.9	218.7	214.1	245.9

Estimación varianza (residuos)

$$y_{ij} = \mu_i + u_{ij}, \quad u_{ij} \to N(0,\sigma^2)$$

$$u_{ij} = y_{ij} - \mu_i$$

$$e_{ij} = y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet}$$

e_{ij} : **RESIDUO**

$$\sigma^2 :\to \hat{s}_R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{n_i} e_{ij}^2}{n-K}$$

Residuos			
A	B	C	D
-13.8	14.8	-3.0	24.5
10.8	14.4	9.0	2.7
-1.6	0.6	3.4	-15.9
11.8	-18.7	-2.3	4.8
-5.7	5.7	-6.5	-15.9
-1.6	-16.7	-0.4	-0.1
0.0	0.0	0.0	0.0

$$\hat{s}_R^2 = 142.4$$

Comparación de medias

- La comparación de tratamientos con este modelo se reduce a comparar las medias $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_K$, en primer lugar con el contraste:

$$H_0: \quad \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_K$$

$$H_1: \quad \text{Al menos una es diferente}$$

Descomposición de la variabilidad

$$y_{ij} = \mu_i + u_{ij} \Rightarrow y_{ij} = \bar{y}_{i\bullet} + (y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet}): \quad \text{restando } \bar{y}_{\bullet\bullet} = \frac{\sum\sum y_{ij}}{n},$$

$$y_{ij} - \bar{y}_{\bullet\bullet} = (\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet}) + (y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet})$$

elevando al cuadrado y sumando para todo i,j

$$\text{(donde } \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{n_i}(\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet})(y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet}) = 0\text{)}$$

$$\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \bar{y}_{\bullet\bullet})^2 = \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{n_i}(\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet})^2 + \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet})^2$$

$$\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \bar{y}_{\bullet\bullet})^2 = \sum_{i=1}^{K}n_i(\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet})^2 + \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet})^2$$

Variabilidades

Variabilidades	Grados de libertad
$VT = \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{\bullet\bullet})^2$	n-1
$VE = \sum_{i=1}^{K} n_i (\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet})^2$	K-1
$VNE = \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet})^2 = \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{n_i} e_{ij}^{\ 2}$	n-K

$$\boxed{\begin{array}{c} VT = VE \quad + \quad VNE \\ n-1 = (K-1) + (n-K) \end{array}}$$

Descomposición: ejemplo

$$\bar{y}_{\bullet\bullet} = 230.4$$

Datos					Medias					Residuos			
229.1	233.4	211.1	270.4		242.9	218.7	214.1	245.9		-13.8	14.8	-3.0	24.5
253.7	233.0	223.1	248.6		242.9	218.7	214.1	245.9		10.8	14.4	9.0	2.7
241.3	219.2	217.5	230.0	=	242.9	218.7	214.1	245.9	+	-1.6	0.6	3.4	-15.9
254.7	200.0	211.8	250.7		242.9	218.7	214.1	245.9		11.8	-18.7	-2.3	4.8
237.2	224.3	207.6	230.0		242.9	218.7	214.1	245.9		-5.7	5.7	-6.5	-15.9
241.3	202.0	213.7	245.8		242.9	218.7	214.1	245.9		-1.6	-16.7	-0.4	-0.1

-1.3	3.0	-19.3	40.0		12.5	-11.7	-16.3	15.5		-13.8	14.8	-3.0	24.5
23.3	2.6	-7.3	18.2		12.5	-11.7	-16.3	15.5		10.8	14.4	9.0	2.7
10.9	-11.2	-12.9	-0.4	=	12.5	-11.7	-16.3	15.5	+	-1.6	0.6	3.4	-15.9
24.3	-30.4	-18.6	20.3		12.5	-11.7	-16.3	15.5		11.8	-18.7	-2.3	4.8
6.8	-6.1	-22.8	-0.4		12.5	-11.7	-16.3	15.5		-5.7	5.7	-6.5	-15.9
10.9	-28.4	-16.7	15.4		12.5	-11.7	-16.3	15.5		-1.6	-16.7	-0.4	-0.1

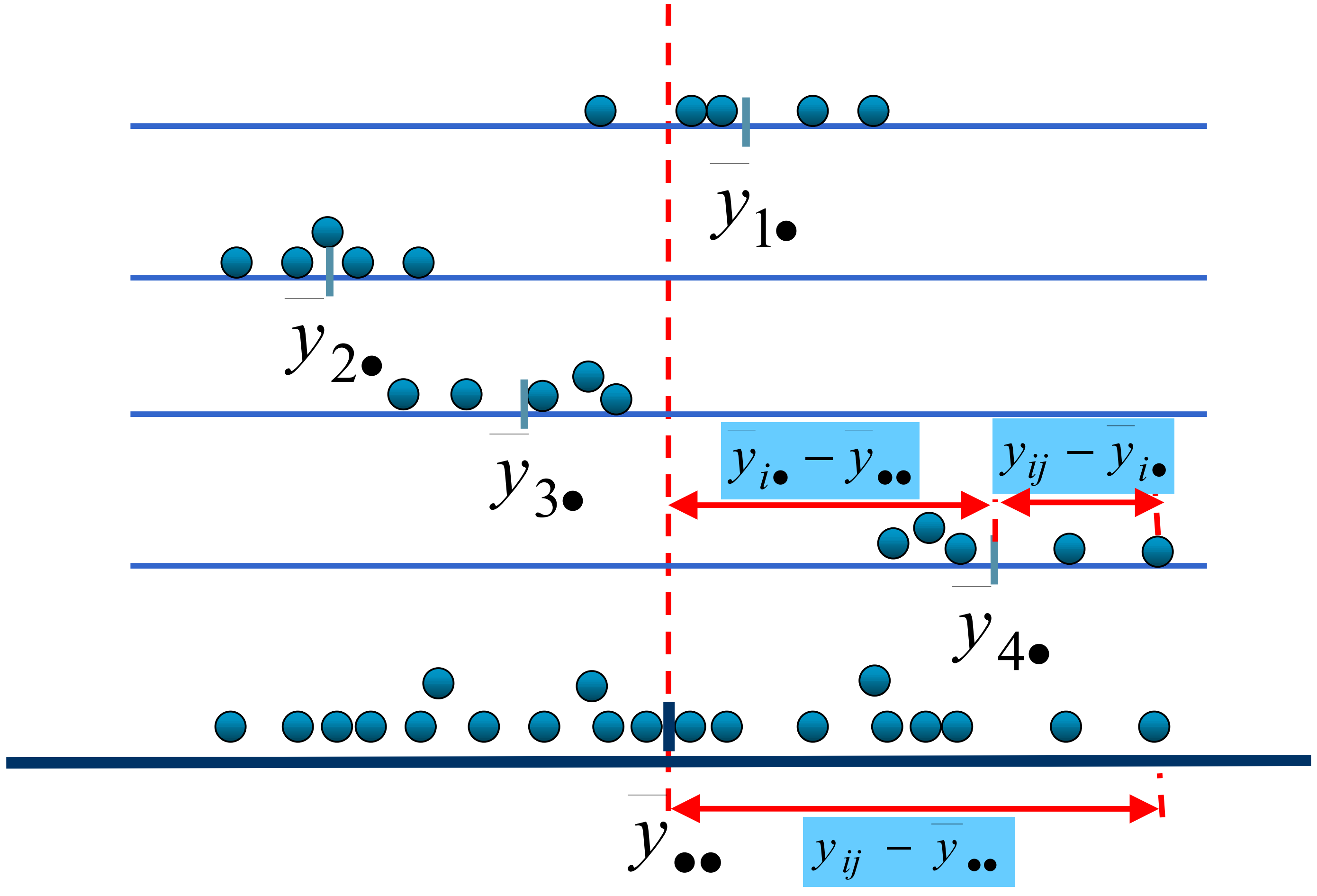
$$y_{ij} - \bar{y}_{\bullet\bullet} \qquad \bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet} \qquad y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet}$$

Variabilidades: ejemplo

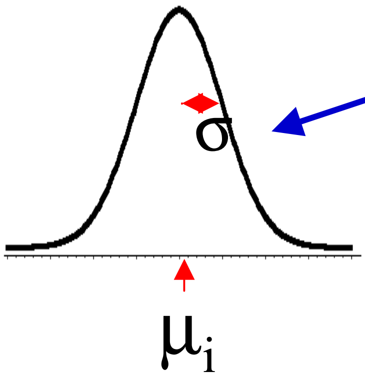
Variabilidades	Grados de libertad
$VT = \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{\bullet\bullet})^2 = 7645.5$	$n\text{-}1 = 23$
$VE = \sum_{i=1}^{K} n_i (\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet})^2 = 4798.1$	$K\text{-}1 = 3$
$VNE = \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{n_i} e_{ij}{}^2 = 2847.4$	$n\text{-}K = 20$

$$\boxed{\begin{array}{l} 7645.5 = 4798.1 + 2847.4 \\ 23 = 3 + 20 \end{array}}$$

Interpretación gráfica de la descomposición



Distribución de VE



$$y_{ij} \to N(\mu_i, \sigma^2) \Rightarrow \bar{y}_{i\bullet} \to N(\mu_i, \frac{\sigma^2}{n_i})$$

Si $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_K$ que llamaremos μ

$$\bar{y}_{i\bullet} \to N(\mu, \frac{\sigma^2}{n_i})$$

$$\left(\frac{\bar{y}_{1\bullet} - \mu}{\sigma / \sqrt{n_1}}\right)^2 + \left(\frac{\bar{y}_{2\bullet} - \mu}{\sigma / \sqrt{n_2}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\bar{y}_{K\bullet} - \mu}{\sigma / \sqrt{n_K}}\right)^2 \to \chi^2_K$$

$$\left(\frac{\bar{y}_{1\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet}}{\sigma / \sqrt{n_1}}\right)^2 + \left(\frac{\bar{y}_{2\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet}}{\sigma / \sqrt{n_2}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\bar{y}_{K\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet}}{\sigma / \sqrt{n_K}}\right)^2 \to \chi^2_{K-1}$$

Distribución de VNE

$$y_{ij} \to N(\mu_i, \sigma^2) \Rightarrow \hat{s}_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet})^2}{n_i - 1} \to \frac{(n_i - 1)\hat{s}_i^2}{\sigma^2} \to \chi^2_{n_i - 1}$$

$$\hat{s}_R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet})^2}{n - K} = \frac{\sum_{j=1}^{n_1} (y_{1j} - \bar{y}_{1\bullet})^2 + \sum_{j=1}^{n_2} (y_{2j} - \bar{y}_{2\bullet})^2 + \cdots + \sum_{j=1}^{n_K} (y_{Kj} - \bar{y}_{K\bullet})^2}{n - K}$$

$$= \frac{(n_1 - 1)\hat{s}_1^2 + (n_2 - 1)\hat{s}_2^2 + \cdots + (n_K - 1)\hat{s}_K^2}{n - K}$$

$$\frac{(n - K)\hat{s}_R^2}{\sigma^2} = \frac{(n_1 - 1)\hat{s}_1^2}{\sigma^2} + \frac{(n_2 - 1)\hat{s}_2^2}{\sigma^2} + \cdots + \frac{(n_K - 1)\hat{s}_K^2}{\sigma^2}$$

$$= \chi^2_{n_1 - 1} + \chi^2_{n_2 - 1} + \cdots + \chi^2_{n_K - 1} = \chi^2_{n - K}$$

Contraste (Análisis de la Varianza)

$$H_0: \quad \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_K$$
$$H_1: \quad \text{Al menos una es diferente}$$

- $\dfrac{(n-K)\hat{s}_R^2}{\sigma^2} \to \chi^2_{n-K}$
- Si Ho es cierto: $\dfrac{\sum_{i=1}^{K} n_i(\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet})^2}{\sigma^2} \to \chi^2_{K-1}$

$$F_0 = \frac{\sum_{i=1}^{K} n_i(\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet})^2}{(K-1)\hat{s}_R^2} \to F_{K-1,n-K}$$

$$F_0 \leq F_\alpha \Rightarrow \text{No se rechaza } H_0$$

$$F_0 > F_\alpha \Rightarrow \text{Se rechaza } H_0$$

Tabla de *Análisis de la Varianza*

Fuentes	Suma de Cuadrados	Grados de Libertad	Varianzas	F
Tratamientos	$\sum n_i(\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet})^2$	$K-1$	$\sum n_i(\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet})^2 /(K-1)$	$\dfrac{\sum n_i(\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet})^2}{(K-1)\hat{s}_R^2}$
Residual	$\sum\sum(y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet})^2$	$n-K$	$\hat{s}_R^2$	
Total	$\sum\sum(y_{ij} - \bar{y}_{\bullet\bullet})^2$	$n-1$		

Tabla de *Análisis de la Varianza*

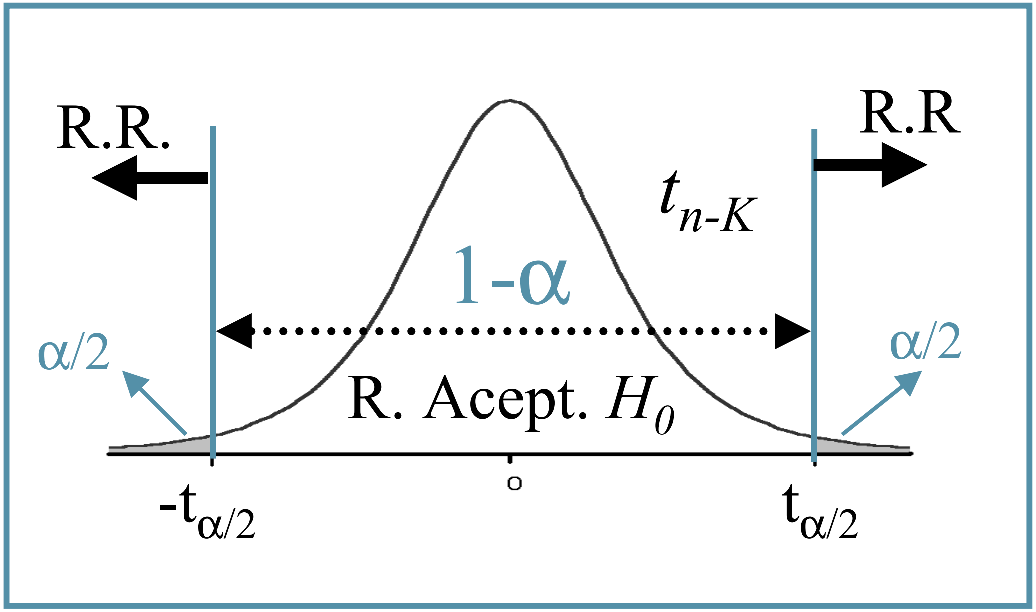
Fuentes	Suma de Cuadrados	Grados de Libertad	Varianzas	F
Tratamientos	4798.1	3	1599.3	11.2
Residual	2847.4	20	142.4	
Total	7645.5	23		

Intervalos de confianza para las medias

$$y_{ij} \rightarrow N(\mu_i, \sigma^2) \Rightarrow \bar{y}_{i\bullet} \rightarrow N\left(\mu_i, \frac{\sigma^2}{n_i}\right)$$

$$\frac{\bar{y}_{i\bullet} - \mu_i}{\frac{\sigma}{\sqrt{n_i}}} \rightarrow N(0,1)$$

$$\frac{\bar{y}_{i\bullet} - \mu_i}{\frac{\hat{s}_R}{\sqrt{n_i}}} \rightarrow t_{n-K}$$

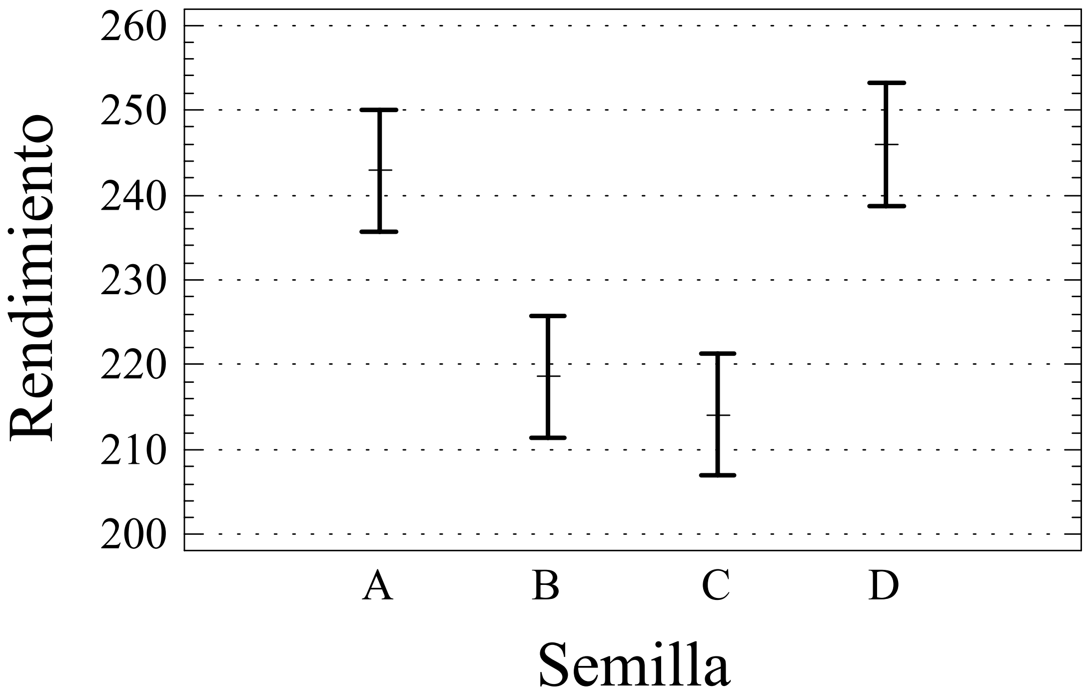


$$\mu_i \in \bar{y}_{i\bullet} \pm t_{\alpha/2} \frac{\hat{s}_R}{\sqrt{n_i}}$$

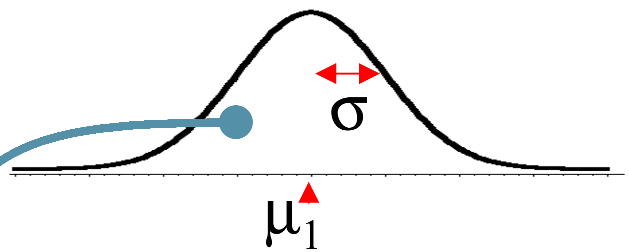
Intervalos de confianza

Semilla	Media	L. Inferior	L. Superior
A	242.9	235.7	250.1
B	218.7	211.4	225.8
C	214.1	206.9	221.3
D	245.9	238.7	253.1

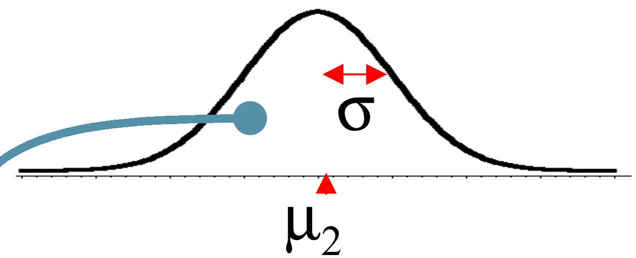
Intervalos de confianza (95%)



Diferencia de medias: $\bar{y}_{1\bullet} - \bar{y}_{2\bullet}$



$$\left.\begin{array}{l} y_{11} \\ y_{12} \\ \vdots \\ y_{1n_1} \end{array}\right\} \quad \bar{y}_{1\bullet} \to N\left(\mu_1, \frac{\sigma^2}{n_1}\right)$$



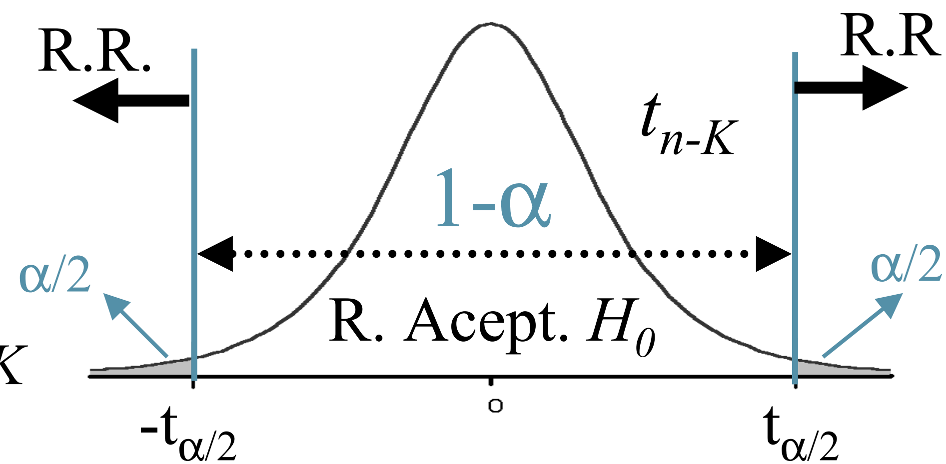
$$\left.\begin{array}{l} y_{21} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{2n_2} \end{array}\right\} \quad \bar{y}_{2\bullet} \to N\left(\mu_2, \frac{\sigma^2}{n_2}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{y}_{1\bullet} - \bar{y}_{2\bullet} \to N\left(\mu_1 - \mu_2, \dfrac{\sigma^2}{n_1} + \dfrac{\sigma^2}{n_2}\right) \\[2ex] \dfrac{(\bar{y}_{1\bullet} - \bar{y}_{2\bullet}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \to N(0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{(\bar{y}_{1\bullet} - \bar{y}_{2\bullet}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\hat{s}_R\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \to t_{n-K}$$

Contraste múltiples

$$\boxed{\begin{aligned} H_0 &: \quad \mu_i = \mu_j \\ H_1 &: \quad \mu_i \neq \mu_j \end{aligned}}$$

$$t_{ij} = \frac{\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{j\bullet}}{\hat{s}_R \sqrt{\dfrac{1}{n_i} + \dfrac{1}{n_j}}} \to t_{n-K}$$



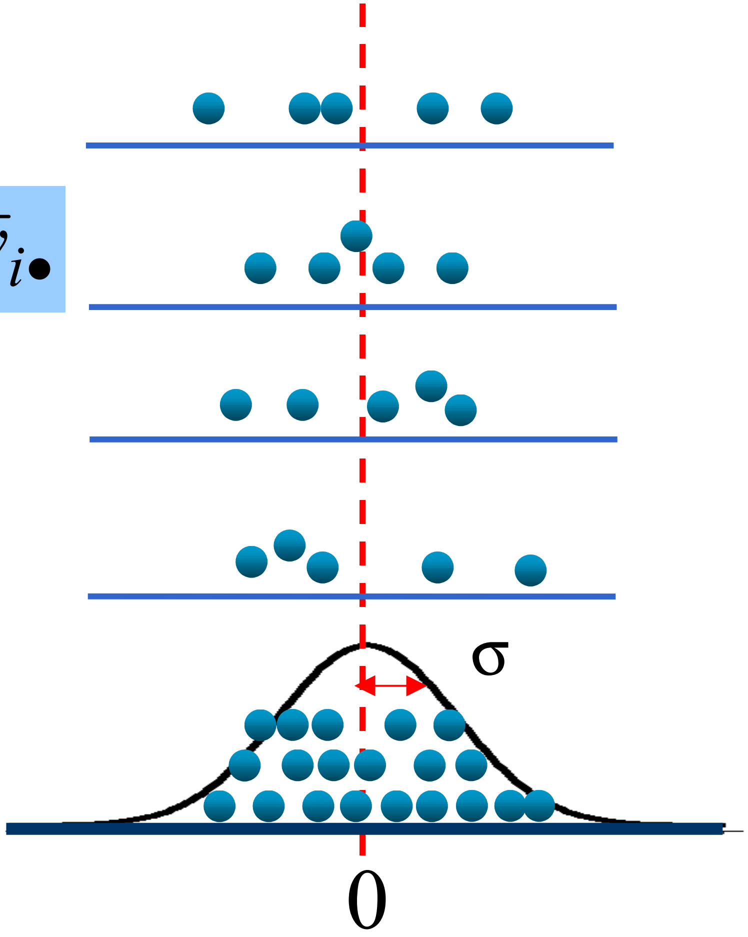
$$|t_0| \leq t_{\alpha/2} \Rightarrow \text{No se rechaza } H_0$$

$$|t_0| > t_{\alpha/2} \Rightarrow \text{Se rechaza } H_0$$

Diagnosis del modelo

$$\left.\begin{aligned} y_{ij} &= \mu_i + u_{ij} \\ u_{ij} &= y_{ij} - \mu_i \\ u_{ij} &\rightarrow N(0,\sigma^2) \end{aligned}\right\} \quad \boxed{e_{ij} = y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet}}$$

Residuos			
A	**B**	**C**	**D**
-13,8	14,8	-3,0	24,5
10,8	14,4	9,0	2,7
-1,6	0,6	3,4	-15,9
11,8	-18,7	-2,3	4,8
-5,7	5,7	-6,5	-15,9
-1,6	-16,7	-0,4	-0,1
0,0	0,0	0,0	0,0



Comprobación de la normalidad

Los residuos deben de tener distribución normal. Las observaciones originales también, pero cada grupo con media diferente, por ello es preciso estimar el modelo para descontar a cada observación su media y obtener valores con la misma distribución.

Herramientas de comprobación:

- Histograma de residuos
- Gráfico de probabilidad normal (Q-Q plot)
- Contrastes formales (Kolmogorov-Smirnov)

Gráfico probabilista normal

- Es un gráfico X-Y de los **residuos** frente a los **percentiles** de la distribución normal.

- La idea básica es que cuando los residuos tienen distribución normal, los puntos deben formar aproximadamente una línea recta

Pasos:

- Ordenar los residuos de menor a mayor.

$$e_{(1)} \leq e_{(2)} \leq \cdots \leq e_{(n)}$$

- Calcular los percentiles de la distribución normal

$$Y_i = \Phi^{-1}\left(\frac{i-0.5}{n}\right) \times \hat{s}_R, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

- Representar

$$e_{(i)}, Y_i$$

Gráfico prob. Normal (ejemplo)

Orden	Resid.	Probab.	Percen.	Percen.
i	eij	(i-0.5)/n	N(0,1)	N(0,σ)
1	-18,7	0,021	-2,04	-24,30
2	-16,7	0,063	-1,53	-18,30
3	-15,9	0,104	-1,26	-15,01
4	-15,9	0,146	-1,05	-12,58
5	-13,8	0,188	-0,89	-10,58
6	-6,5	0,229	-0,74	-8,85
7	-5,7	0,271	-0,61	-7,28
8	-3,0	0,313	-0,49	-5,83
9	-2,3	0,354	-0,37	-4,46
10	-1,6	0,396	-0,26	-3,15
11	-1,6	0,438	-0,16	-1,88
12	-0,4	0,479	-0,05	-0,62
13	-0,1	0,521	0,05	0,62
14	0,6	0,563	0,16	1,88
15	2,7	0,604	0,26	3,15
16	3,4	0,646	0,37	4,46
17	4,8	0,688	0,49	5,83
18	5,7	0,729	0,61	7,28
19	9,0	0,771	0,74	8,85
20	10,8	0,813	0,89	10,58
21	11,8	0,854	1,05	12,58
22	14,4	0,896	1,26	15,01
23	14,8	0,938	1,53	18,30
24	24,5	0,979	2,04	24,30

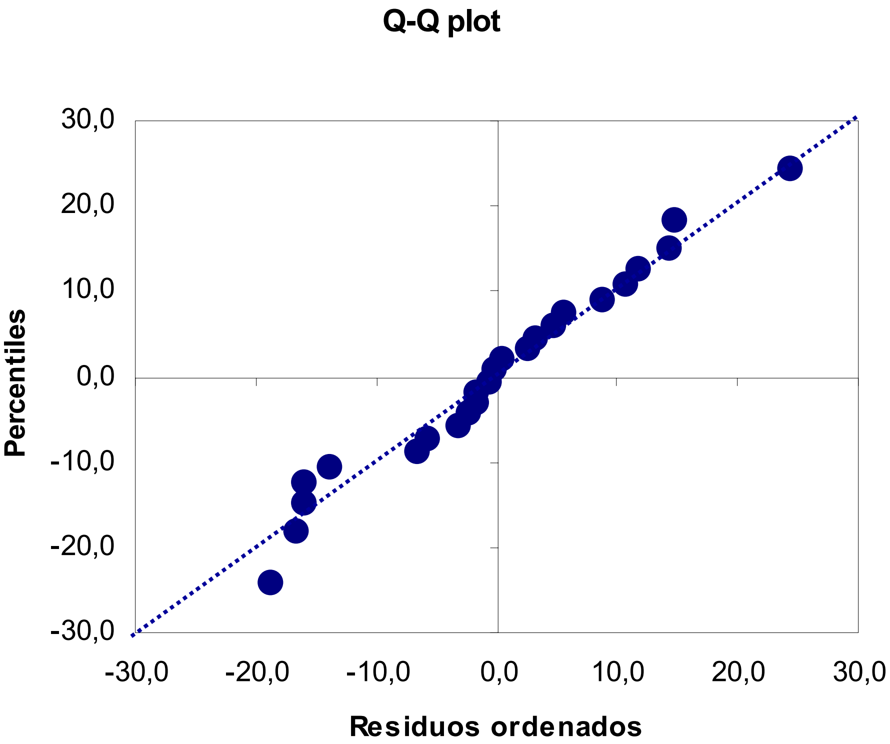
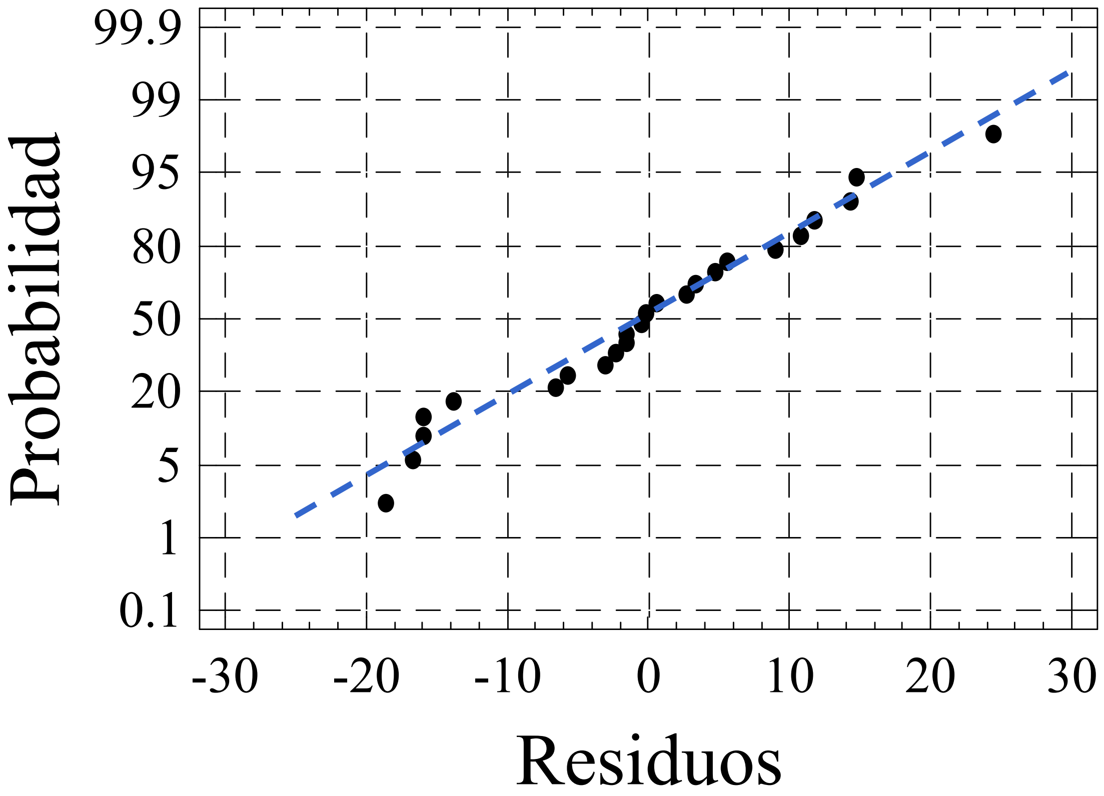
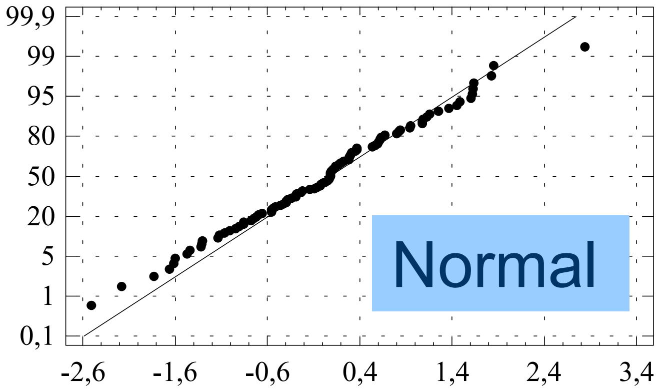


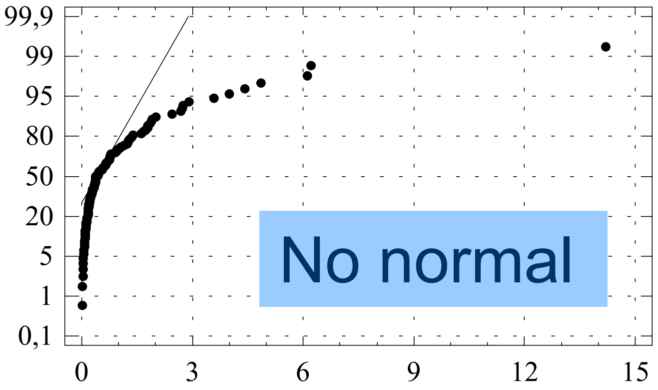
Gráfico probabilista normal



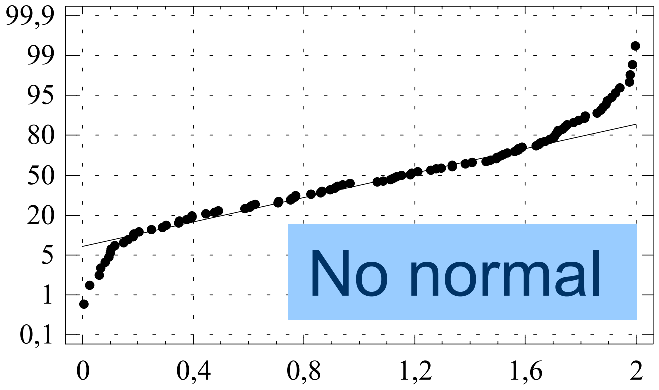
Ejemplos



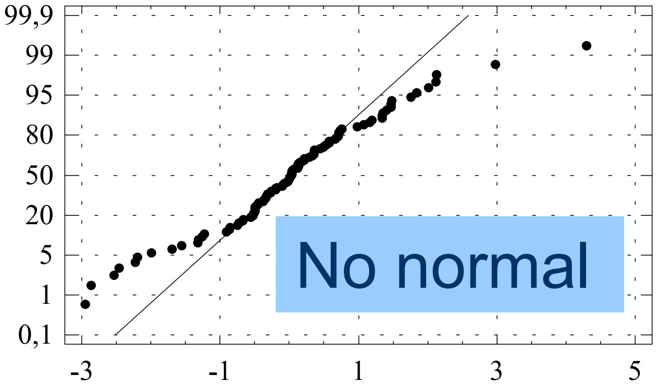
99,9
99
95
80
50
20
5
1
0,1
-2,6
-1,6
-0,6
0,4
1,4
2,4
3,4
Normal



99,9
99
95
80
50
20
5
1
0,1
0
3
6
9
12
15
No normal



99,9
99
95
80
50
20
5
1
0,1
0
0,4
0,8
1,2
1,6
2
No normal



99,9
99
95
80
50
20
5
1
0,1
-3
-1
1
3
5
No normal

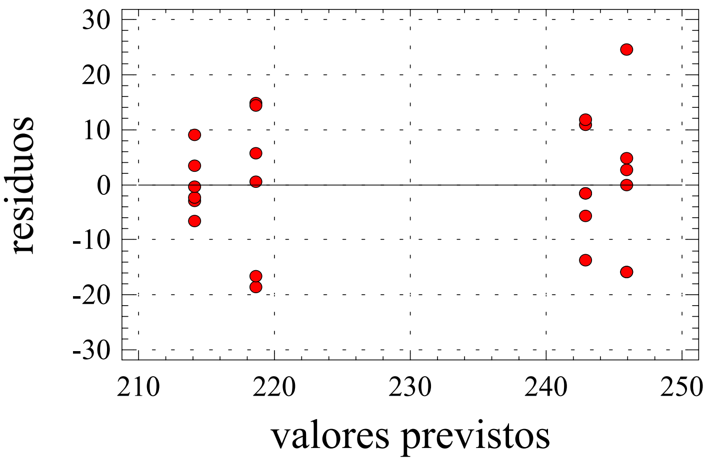
Comprobación de la homocedasticidad

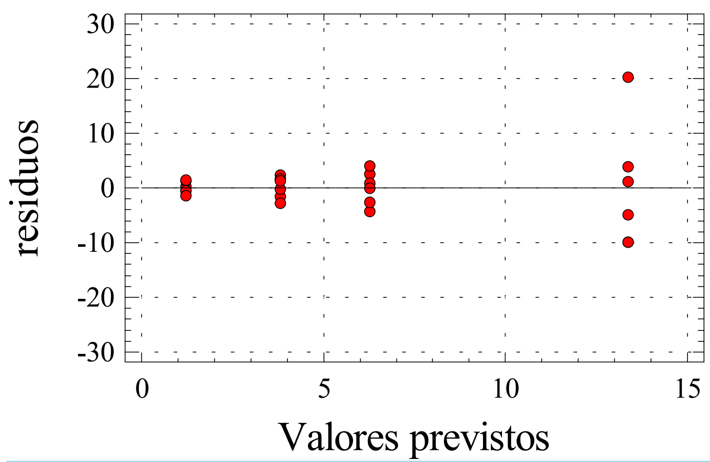
En el proceso de estimación se ha supuesto que los distintos tratamientos tienen **la misma varianza**

Herramientas

- Gráficos de residuos:
  - Frente a valores previstos
  - Frente a tratamientos (o factor,etc.)
- Contrastes formales:
  - **Bartlett**, Cochran, Hartley, Levene

Residuos - Valores previstos

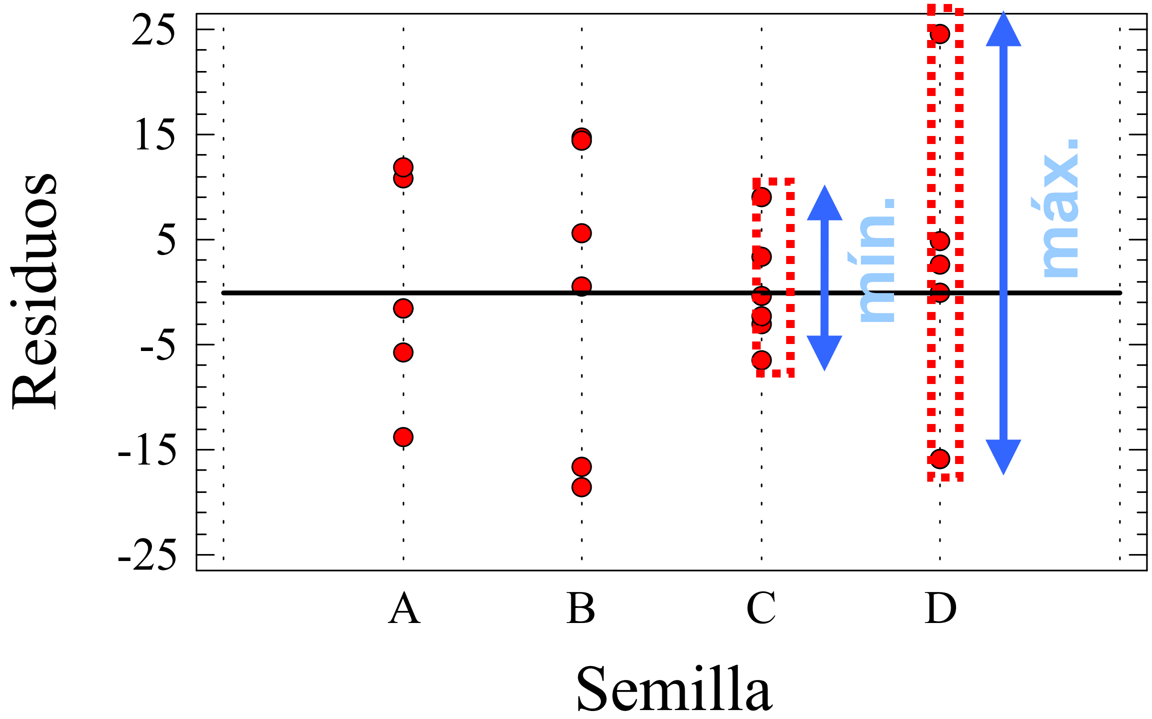




En este modelo los valores previstos corresponden a la media del tratamiento

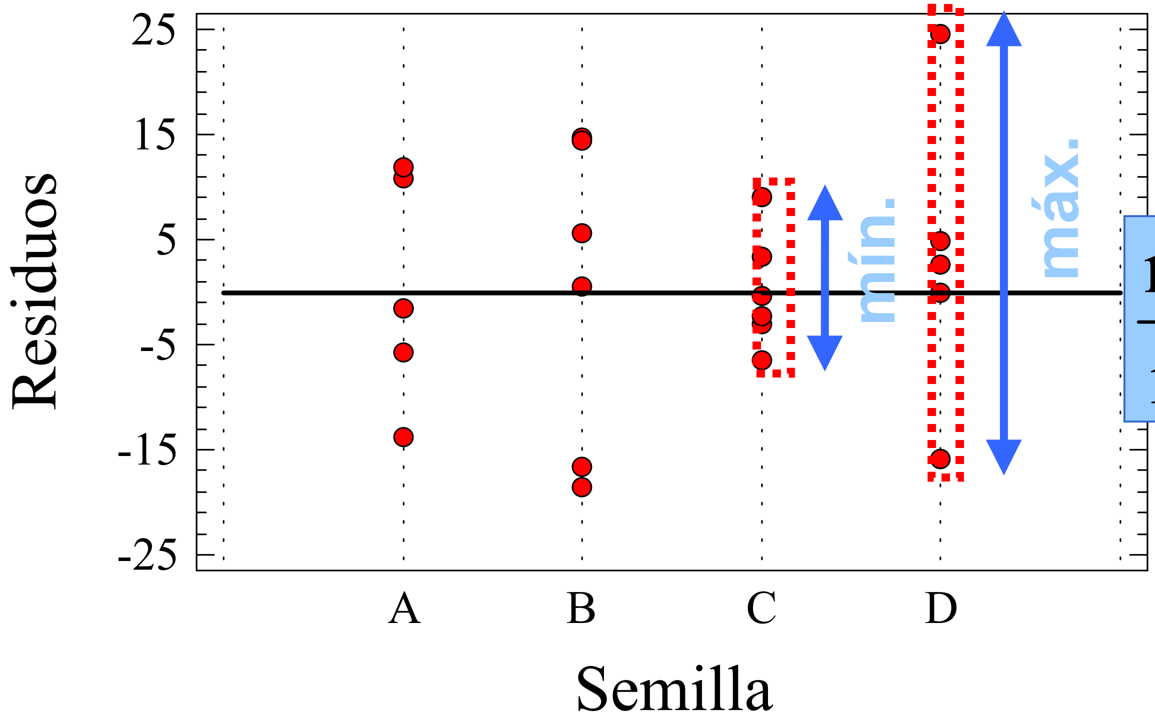
- Los puntos deben aparecer dispuestos al azar en una banda horizontal alrededor del eje horizontal.
- **Heterocedasticidad**: a veces la dispersión aumenta conforme la media crece.

Residuos por tratamientos



En cada grupo los residuos aparecen esparcidos con dispersión similar y media cero.

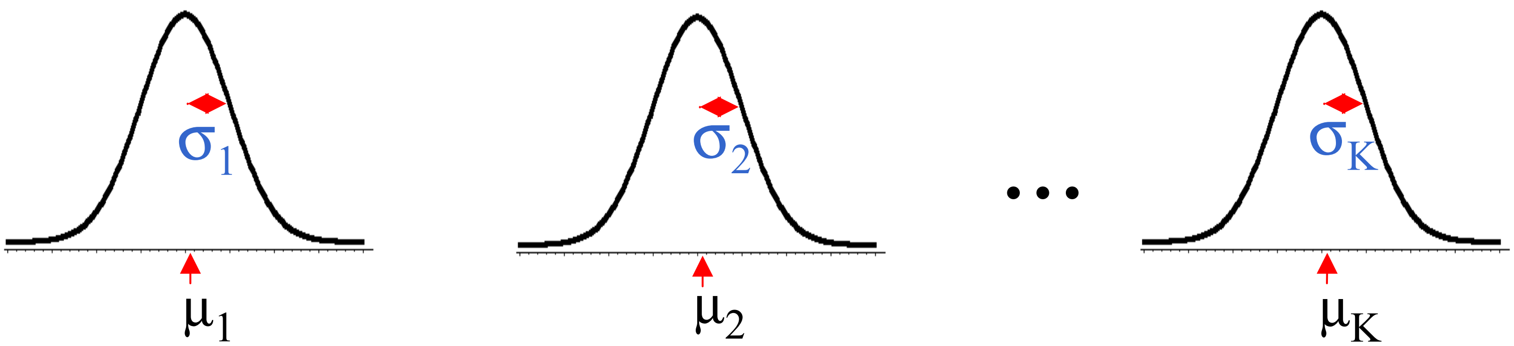
Residuos por tratamientos



$$\frac{\text{máx}}{\text{mín}} < 3$$

En cada grupo los residuos aparecen esparcidos con dispersión similar y media cero.

Contrastes formales

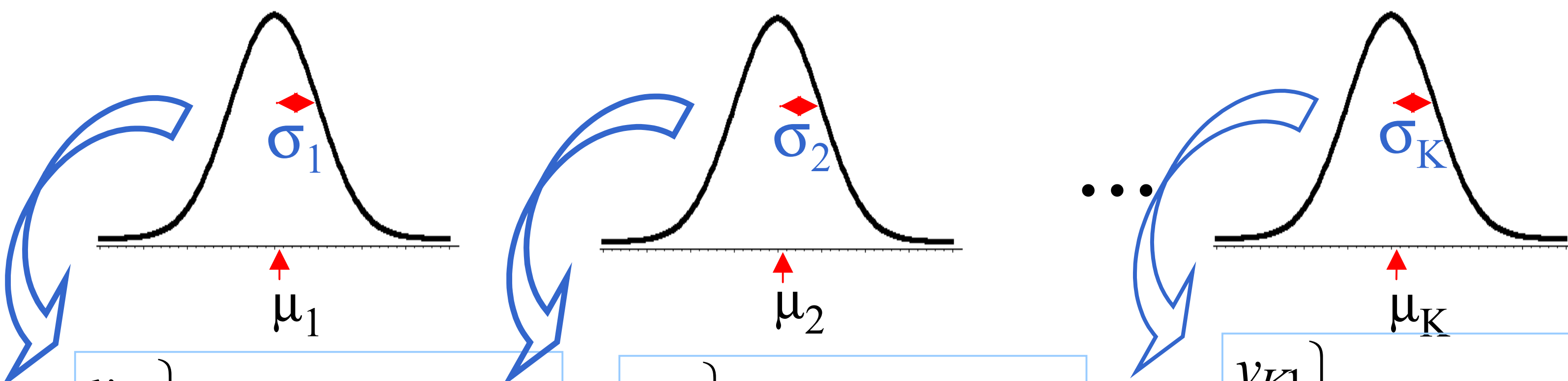


$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_K^2$$

$$H_1 : \text{Alguna es distinta}$$

Contraste de Bartlett

$n_1 = n_2 = \cdots = n_K = m$



$$\left.\begin{matrix} y_{11} \\ y_{12} \\ \vdots \\ y_{1m} \end{matrix}\right\} \hat{s}_1^2 = \frac{\Sigma(y_{1j} - \bar{y}_{1\bullet})^2}{m-1} \qquad \left.\begin{matrix} y_{21} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{2n_2} \end{matrix}\right\} \hat{s}_2^2 = \frac{\Sigma(y_{2j} - \bar{y}_{2\bullet})^2}{m-1} \quad \cdots \quad \left.\begin{matrix} y_{K1} \\ y_{K2} \\ \vdots \\ y_{Km} \end{matrix}\right\} \hat{s}_K^2 = \frac{\Sigma(y_{Kj} - \bar{y}_{K\bullet})^2}{m-1}$$

$$\left.\begin{matrix} \hat{s}_R^2 = \dfrac{\hat{s}_1^2 + \hat{s}_2^2 + \cdots + \hat{s}_K^2}{K} \\ \hat{s}_G^2 = \sqrt[K]{\hat{s}_1^2 \times \hat{s}_2^2 \times \cdots \times \hat{s}_K^2} \end{matrix}\right\}$$

Si Ho cierto

$$\frac{n-K}{1+c} \log\left(\frac{\hat{s}_R^2}{\hat{s}_G^2}\right) \to \chi^2_{K-1}$$

$$c = \frac{K+1}{3(n-K)}$$

Contraste de Bartlett (general)

$$\hat{s}_R^2 = \frac{(n_1 - 1)\hat{s}_1^2 + (n_2 - 1)\hat{s}_2^2 + \cdots + (n_K - 1)\hat{s}_K^2}{n - K}$$

$$\hat{s}_G^2 = \sqrt[n-K]{\left(\hat{s}_1^2\right)^{n_1 - 1} \times \left(\hat{s}_2^2\right)^{n_2 - 1} \times \cdots \times \left(\hat{s}_K^2\right)^{n_K - 1}}$$

$$c = \frac{1}{3(K-1)}\left(\sum_{i=1}^{K} \frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{n - K}\right)$$

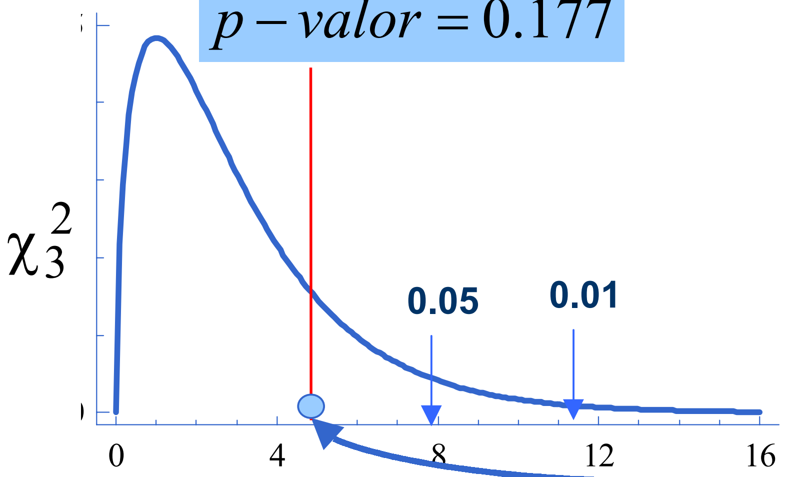
Si Ho cierto

$$\boxed{\frac{n - K}{1 + c}\log\left(\frac{\hat{s}_R^2}{\hat{s}_G^2}\right) \rightarrow \chi_{K-1}^2}$$

Contraste de Bartlett: ejemplo

	Datos			
	A	B	C	D
	229,1	233,4	211,1	270,4
	253,7	233,0	223,1	248,6
	241,3	219,2	217,5	230,0
	254,7	200,0	211,8	250,7
	237,2	224,3	207,6	230,0
	241,3	202,0	213,7	245,8
Medias	242,9	218,7	214,1	245,9
Varianzas	**96,8**	**216,2**	**29,9**	**227,2**

$$p - valor = 0.177$$



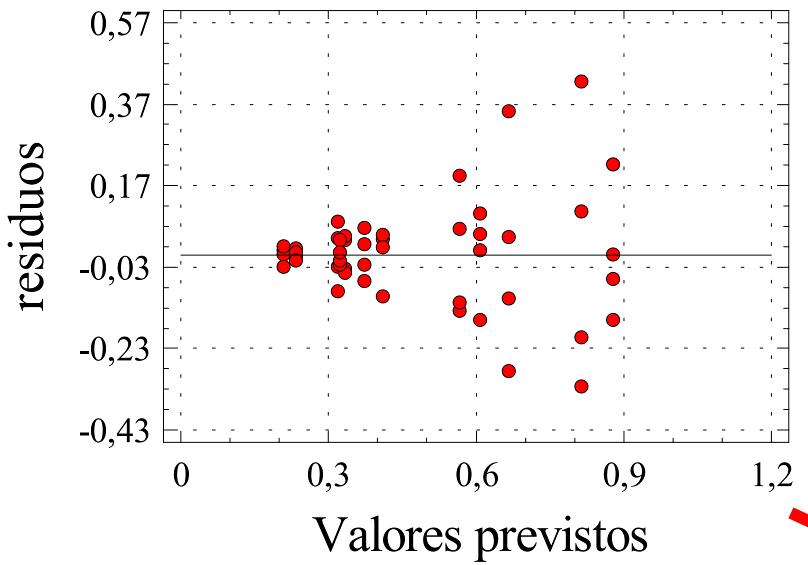
$$\hat{s}_R^2 = \frac{96.8 + 216.2 + 29.9 + 227.2}{4} = 142.4$$

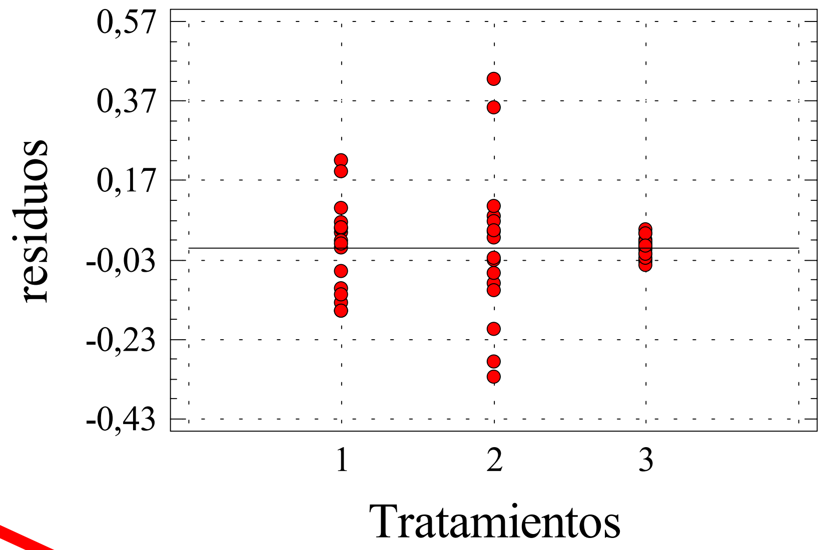
$$\hat{s}_G^2 = \sqrt[4]{96.8 \times 216.2 \times 29.9 \times 227.2} = 109.1$$

$$\chi_0^2 = \frac{n-K}{1+c} \log \frac{\hat{s}_R^2}{\hat{s}_G^2}$$

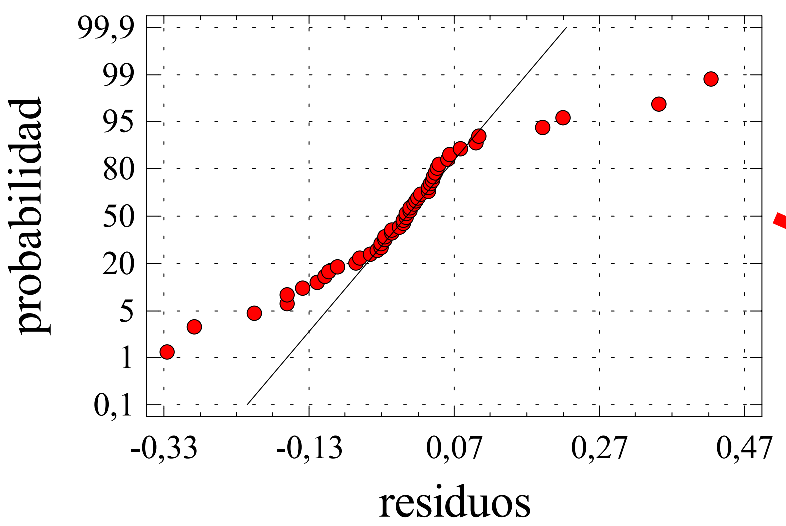
$$= \frac{20}{1+(5/60)} \log \frac{142.4}{109.1} = 4.91$$

Diagnosis: Tres gráficos básicos



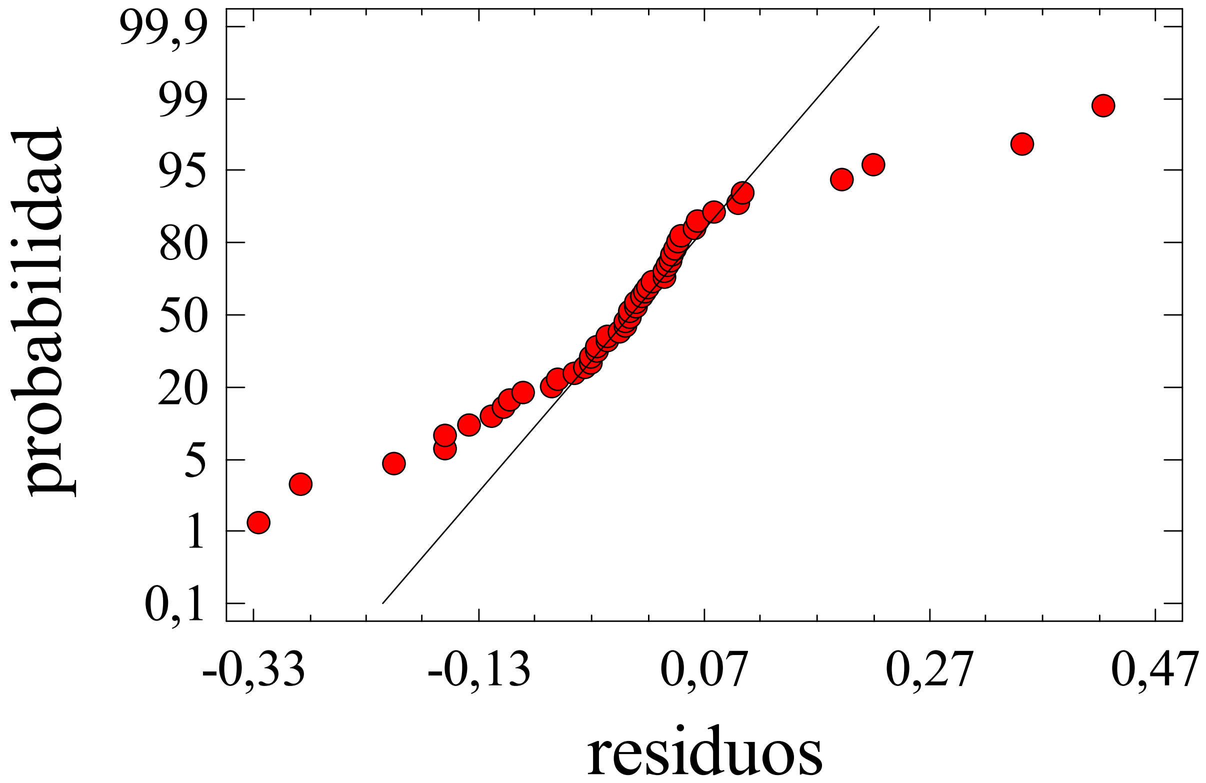


Homocedasticidad



Normalidad

Gráfico probabilista normal



Transformaciones para estabilizar la varianza $z = h(y)$

Desarrollo de Taylor para $z = h(y)$ en $\mu = \mathrm{E}[\mathrm{y}]$

$$z \approx h(\mu) + h'(\mu)(y - \mu) + \frac{1}{2} h''(\mu)(y - \mu)^2$$

La media y varianzas de z son aprox.

$$E[z] \approx h(\text{ì}) + \frac{1}{2} h''(\text{ì})\mathrm{Var}(y)$$

$$\mathrm{Var}[z] \approx \left[h'(\mu)\right]^2 \mathrm{Var}[y]$$

Ejemplo $z = a + by$

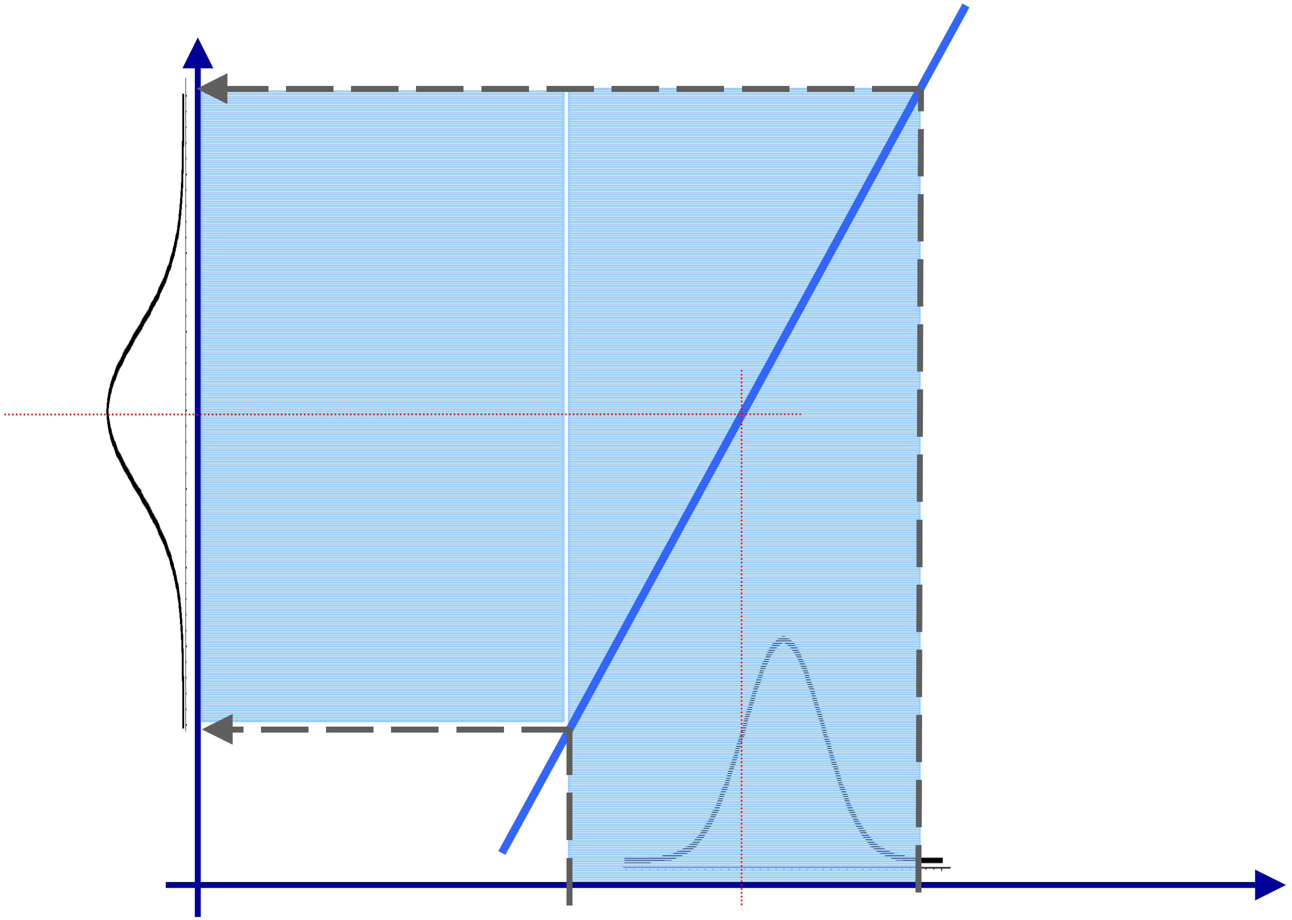
La media y varianzas de z son

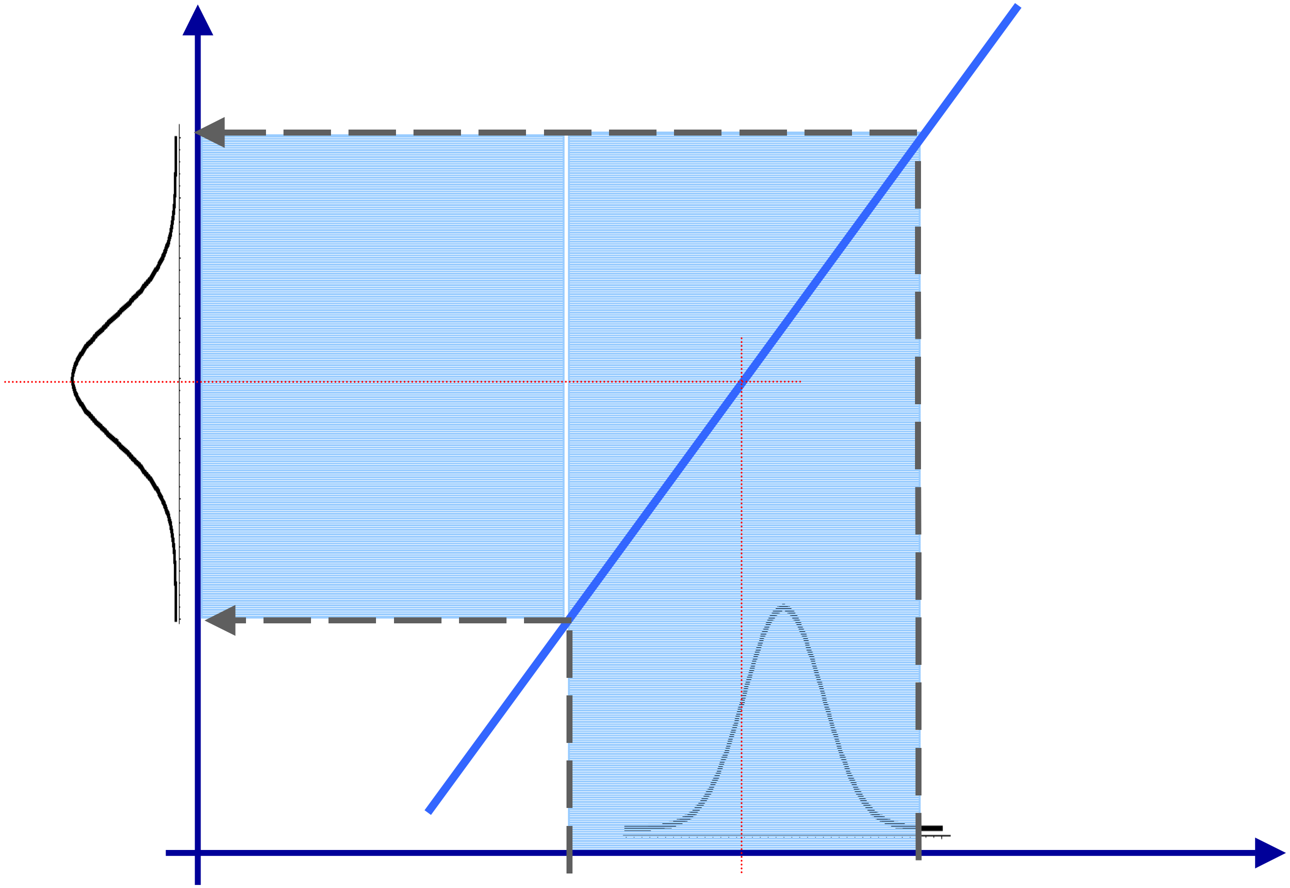
$$E[z] = a + b\mu$$

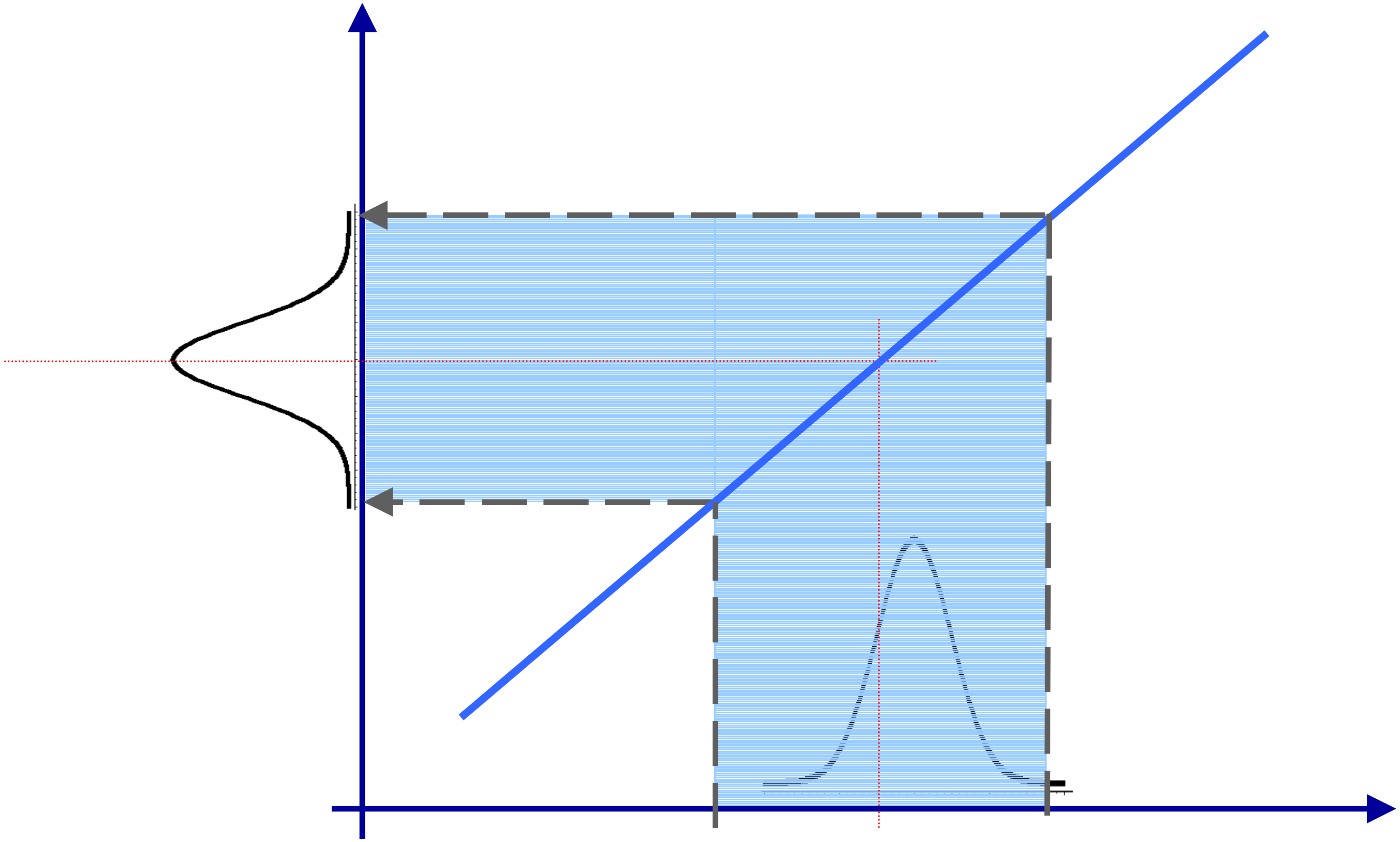
$$\mathrm{Var}[z] = b^2 \mathrm{Var}[y]$$

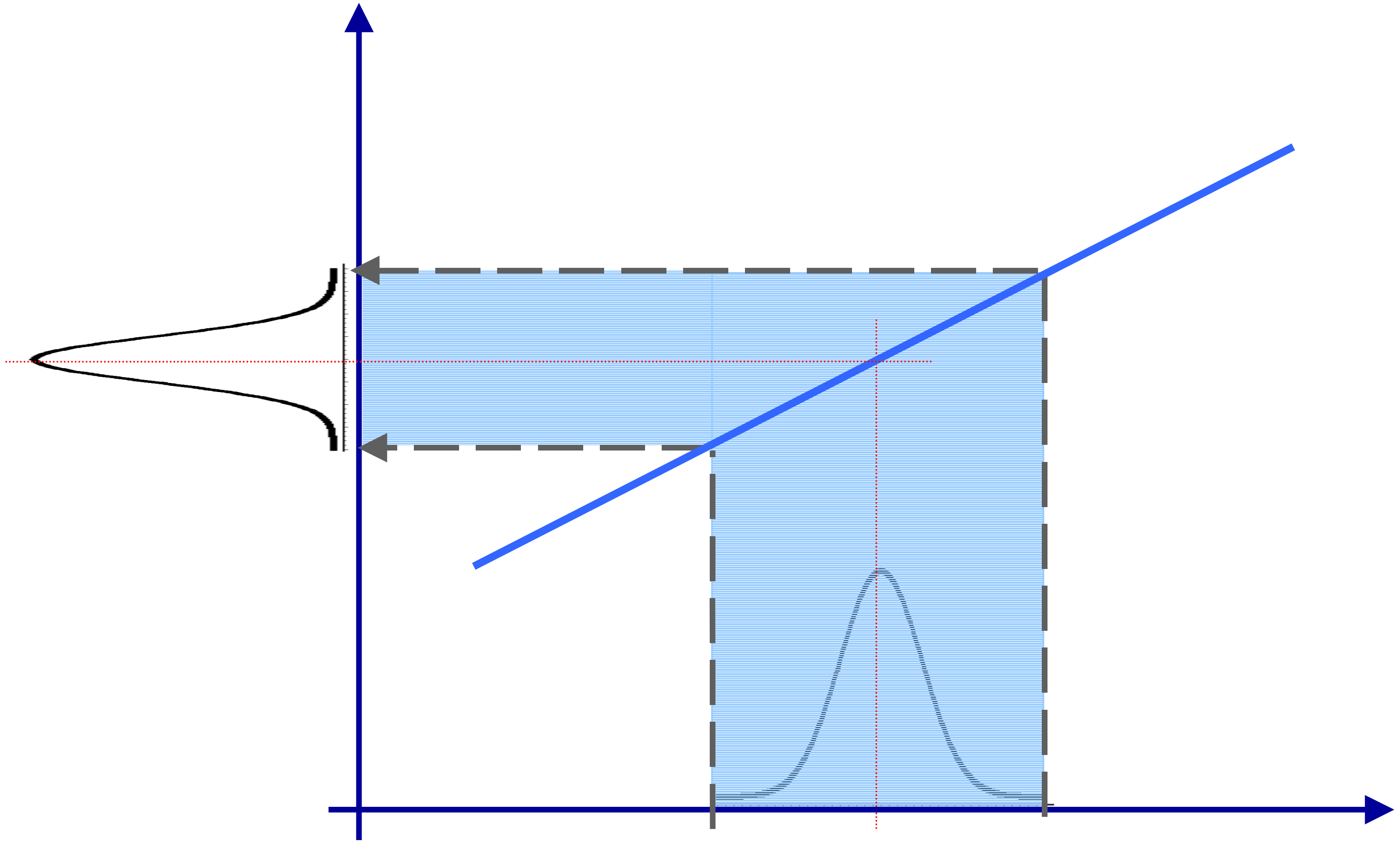
La $\mathrm{Var}[z]$ depende de b

Observación: Esta transformación no altera las características de ***y:*** si ***y*** no tiene varianza constante, ***z*** tampoco.









Ejemplo $z = \log(y)$

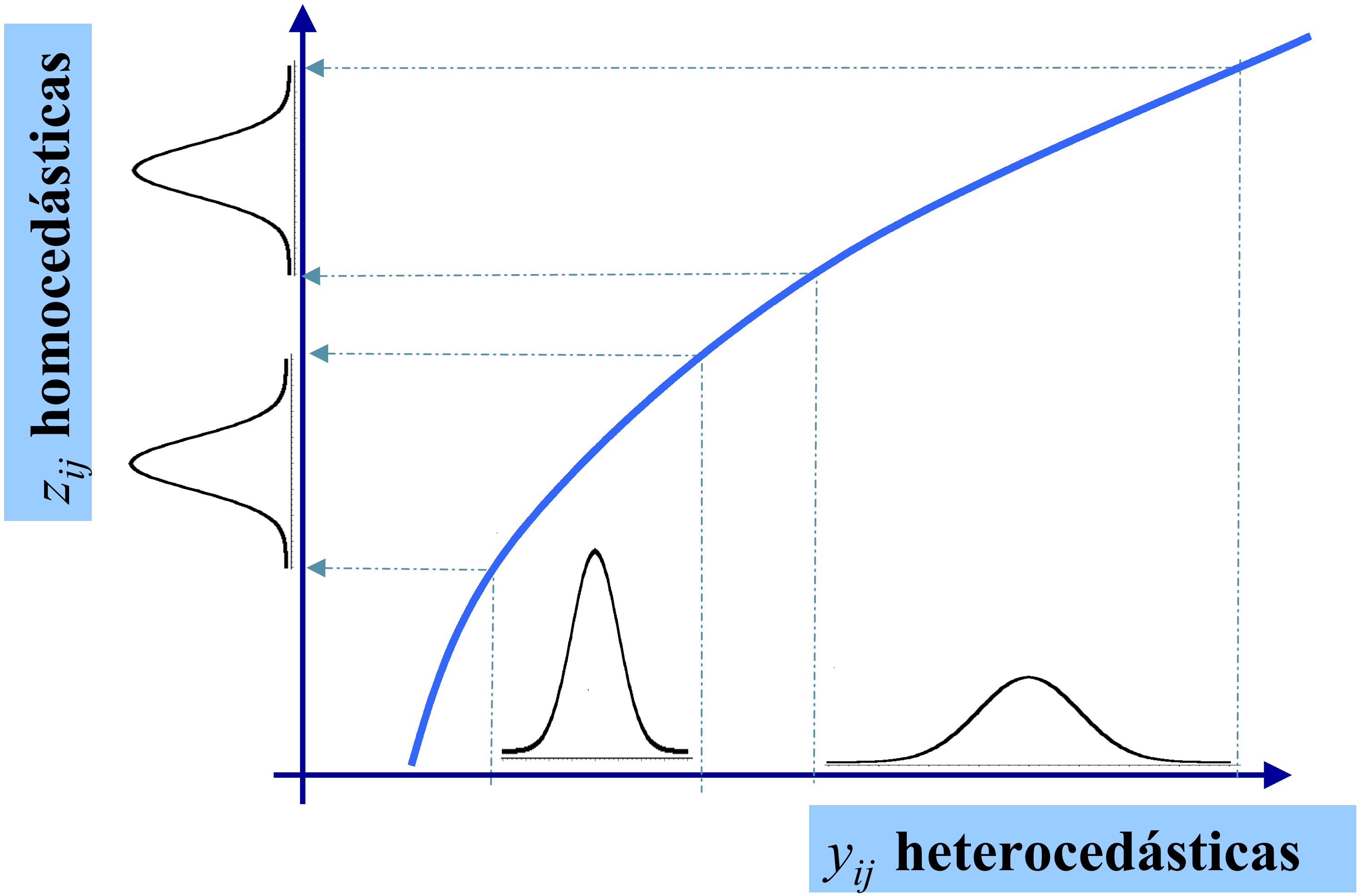
La media y varianzas de z son aprox.

$$E[z] \approx \log(\text{ì}) - \frac{1}{2\mu^2}\mathrm{Var}(y)$$

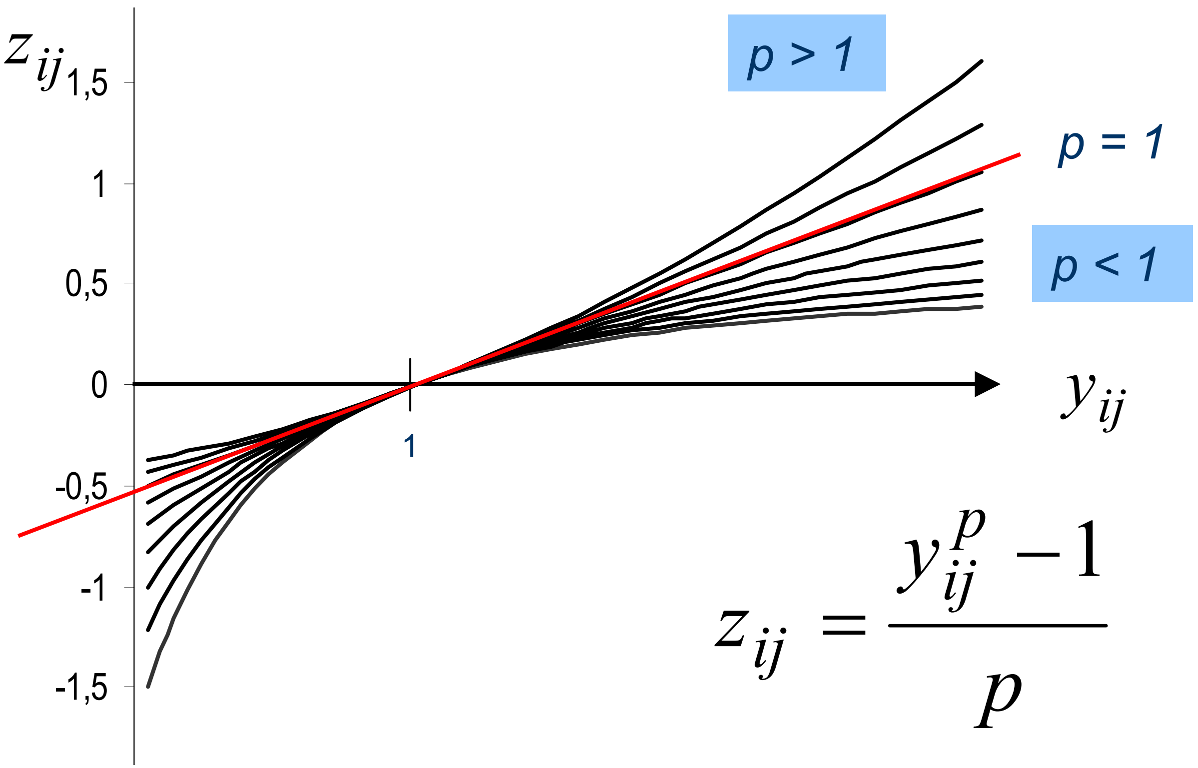
$$\mathrm{Var}[z] \approx \frac{1}{\mu^2}\mathrm{Var}[y]$$

$$\text{Si } \mathrm{Var}[y] \approx k\text{ì}^2 \Rightarrow \mathrm{Var}[z] \approx k$$

$$z_{ij} = h(y_{ij})$$



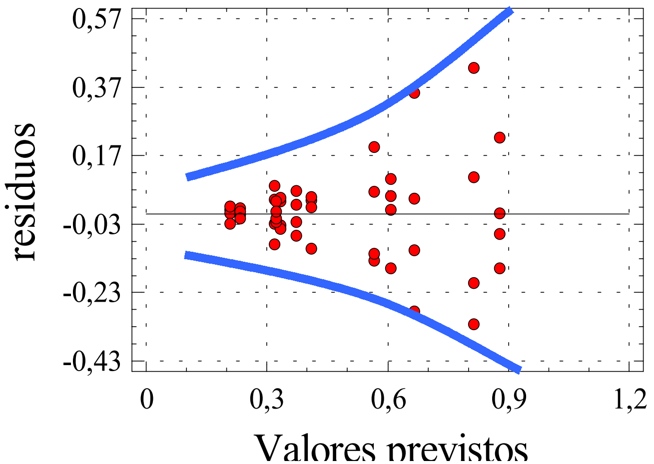
Transformaciones Box-Cox



$$z_{ij} = \frac{y_{ij}^{p} - 1}{p}$$

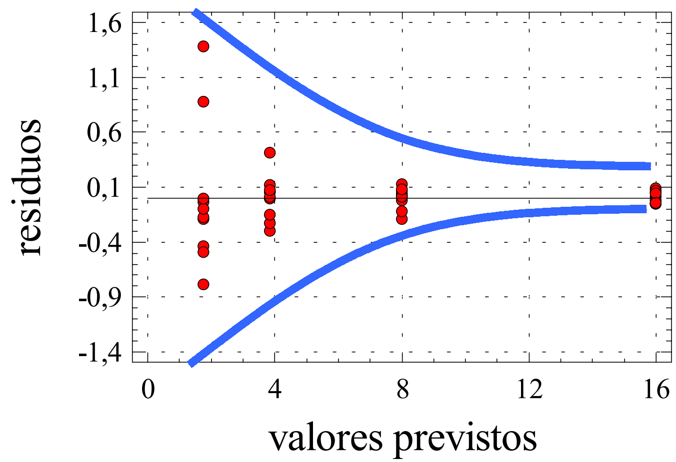
$$z_{ij} = \log y_{ij} \quad si \quad p = 0$$

Búsqueda de la transformación adecuada



- La dispersión aumenta al aumentar la media

$p < 1$



- La dispersión disminuye al aumentar la media

$p > 1$

Elección de la transformación $\quad z_{ij} = y_{ij}^{p}$

- Empezar con p=1 (datos sin transformar) y decidir a partir de los gráficos si p>1 o p<1.

$$
p < 1 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} p = 1/2 & \Rightarrow & z_{ij} = \sqrt{y_{ij}} \\ p = 0 & \Rightarrow & z_{ij} = \log y_{ij} \\ p = -1/2 & \Rightarrow & z_{ij} = \dfrac{1}{\sqrt{y_{ij}}} \\ p = -1 & \Rightarrow & z_{ij} = \dfrac{1}{y_{ij}^{2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{cases}
$$

- Parar cuando los gráficos estén ok

Independencia

- Es la hipótesis fundamental y con diferencia la más importante de las tres, además es la más difícil de comprobar.
- La falta de independencia suele ir ligada a factores no controlados por el experimentador y que influyen en los resultados introduciendo errores sistemáticos.
- La forma más recomendable de evitar errores sistemáticos consiste en aleatorizar.

Aleatorización

- *La aleatorización evita que se produzcan errores que sistemáticamente aumenten o disminuyan un conjunto de medidas por causas no reconocibles: al aleatorizar se reparten estos errores por igual entre los diferentes tratamientos y se convierten en errores aleatorios, previstos en el modelo.*

¿Cómo aleatorizar?

- Asignar las unidades experimentales al azar a los distintos tratamientos.
- Aleatorizar el orden de ejecución de los experimentos.
- Aleatorizar respecto a cualquier otra variable que implique diferenciar a los tratamientos.

“La aleatorización es una precaución contra distorsiones que pueden ocurrir o no ocurrir, y que puedieran ser serias o no si llegaran a ocurrir”

Tabla F

$$F_{\nu_1,\nu_2,\alpha} \quad \Rightarrow \quad P(F_{\nu_1,\nu_2} \geq F_{\nu_1,\nu_2,\alpha}) = \alpha$$

α=0.05

Grados de libertad del numerador: ν_1

Grados de libertad del denominador: ν_2

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**100**	**120**	**Inf.**	
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9	243,9	245,9	248,0	249,1	250,1	251,1	252,2	253,0	253,3	254,3	**1**
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,41	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49	19,49	19,50	**2**
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,55	8,53	**3**
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,66	5,63	**4**
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,41	4,40	4,37	**5**
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,71	3,70	3,67	**6**
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,27	3,23	**7**
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,97	2,93	**8**
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,76	2,75	2,71	**9**
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,59	2,58	2,54	**10**
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,46	2,45	2,40	**11**
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,35	2,34	2,30	**12**
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,26	2,25	2,21	**13**
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,19	2,18	2,13	**14**
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,12	2,11	2,07	**15**
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,07	2,06	2,01	**16**
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,02	2,01	1,96	**17**
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,98	1,97	1,92	**18**
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,94	1,93	1,88	**19**
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,91	1,90	1,84	**20**
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,88	1,87	1,81	**21**
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,85	1,84	1,78	**22**
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,82	1,81	1,76	**23**
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,80	1,79	1,73	**24**
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,78	1,77	1,71	**25**
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,76	1,75	1,69	**26**
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,13	2,06	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,74	1,73	1,67	**27**
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,73	1,71	1,65	**28**
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,10	2,03	1,94	1,90	1,85	1,81	1,75	1,71	1,70	1,64	**29**
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,70	1,68	1,62	**30**
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,59	1,58	1,51	**40**
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,03	1,95	1,87	1,78	1,74	1,69	1,63	1,58	1,52	1,51	1,44	**50**
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,48	1,47	1,39	**60**
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,14	2,07	2,02	1,97	1,89	1,81	1,72	1,67	1,62	1,57	1,50	1,45	1,44	1,35	**70**
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,13	2,06	2,00	1,95	1,88	1,79	1,70	1,65	1,60	1,54	1,48	1,43	1,41	1,32	**80**
90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,11	2,04	1,99	1,94	1,86	1,78	1,69	1,64	1,59	1,53	1,46	1,41	1,39	1,30	**90**
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,97	1,93	1,85	1,77	1,68	1,63	1,57	1,52	1,45	1,39	1,38	1,28	**100**
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,18	2,09	2,02	1,96	1,91	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,37	1,35	1,25	**120**
Inf	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,24	1,22	1,00	**Inf**
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**100**	**120**	**Inf.**	

Ejemplo: $P(F_{7,8} \geq 3.50) = 0.05$

Tabla F

α=0.025

$$F_{\nu_1,\nu_2,\alpha} \quad \Rightarrow \quad P(F_{\nu_1,\nu_2} \geq F_{\nu_1,\nu_2,\alpha}) = \alpha$$

Grados de libertad del numerador: ν_1

Grados de libertad del denominador: ν_2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	100	120	Inf.	
1	647,8	799,5	864,2	899,6	921,8	937,1	948,2	956,6	963,3	968,6	976,7	984,9	993,1	997,3	1001,4	1005,6	1009,8	1013,2	1014,0	1018,3	**1**
2	38,51	39,00	39,17	39,25	39,30	39,33	39,36	39,37	39,39	39,40	39,41	39,43	39,45	39,46	39,46	39,47	39,48	39,49	39,49	39,50	**2**
3	17,44	16,04	15,44	15,10	14,88	14,73	14,62	14,54	14,47	14,42	14,34	14,25	14,17	14,12	14,08	14,04	13,99	13,96	13,95	13,90	**3**
4	12,22	10,65	9,98	9,60	9,36	9,20	9,07	8,98	8,90	8,84	8,75	8,66	8,56	8,51	8,46	8,41	8,36	8,32	8,31	8,26	**4**
5	10,01	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,85	6,76	6,68	6,62	6,52	6,43	6,33	6,28	6,23	6,18	6,12	6,08	6,07	6,02	**5**
6	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,70	5,60	5,52	5,46	5,37	5,27	5,17	5,12	5,07	5,01	4,96	4,92	4,90	4,85	**6**
7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,99	4,90	4,82	4,76	4,67	4,57	4,47	4,41	4,36	4,31	4,25	4,21	4,20	4,14	**7**
8	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,53	4,43	4,36	4,30	4,20	4,10	4,00	3,95	3,89	3,84	3,78	3,74	3,73	3,67	**8**
9	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,20	4,10	4,03	3,96	3,87	3,77	3,67	3,61	3,56	3,51	3,45	3,40	3,39	3,33	**9**
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,95	3,85	3,78	3,72	3,62	3,52	3,42	3,37	3,31	3,26	3,20	3,15	3,14	3,08	**10**
11	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,76	3,66	3,59	3,53	3,43	3,33	3,23	3,17	3,12	3,06	3,00	2,96	2,94	2,88	**11**
12	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,61	3,51	3,44	3,37	3,28	3,18	3,07	3,02	2,96	2,91	2,85	2,80	2,79	2,72	**12**
13	6,41	4,97	4,35	4,00	3,77	3,60	3,48	3,39	3,31	3,25	3,15	3,05	2,95	2,89	2,84	2,78	2,72	2,67	2,66	2,60	**13**
14	6,30	4,86	4,24	3,89	3,66	3,50	3,38	3,29	3,21	3,15	3,05	2,95	2,84	2,79	2,73	2,67	2,61	2,56	2,55	2,49	**14**
15	6,20	4,77	4,15	3,80	3,58	3,41	3,29	3,20	3,12	3,06	2,96	2,86	2,76	2,70	2,64	2,59	2,52	2,47	2,46	2,40	**15**
16	6,12	4,69	4,08	3,73	3,50	3,34	3,22	3,12	3,05	2,99	2,89	2,79	2,68	2,63	2,57	2,51	2,45	2,40	2,38	2,32	**16**
17	6,04	4,62	4,01	3,66	3,44	3,28	3,16	3,06	2,98	2,92	2,82	2,72	2,62	2,56	2,50	2,44	2,38	2,33	2,32	2,25	**17**
18	5,98	4,56	3,95	3,61	3,38	3,22	3,10	3,01	2,93	2,87	2,77	2,67	2,56	2,50	2,44	2,38	2,32	2,27	2,26	2,19	**18**
19	5,92	4,51	3,90	3,56	3,33	3,17	3,05	2,96	2,88	2,82	2,72	2,62	2,51	2,45	2,39	2,33	2,27	2,22	2,20	2,13	**19**
20	5,87	4,46	3,86	3,51	3,29	3,13	3,01	2,91	2,84	2,77	2,68	2,57	2,46	2,41	2,35	2,29	2,22	2,17	2,16	2,09	**20**
21	5,83	4,42	3,82	3,48	3,25	3,09	2,97	2,87	2,80	2,73	2,64	2,53	2,42	2,37	2,31	2,25	2,18	2,13	2,11	2,04	**21**
22	5,79	4,38	3,78	3,44	3,22	3,05	2,93	2,84	2,76	2,70	2,60	2,50	2,39	2,33	2,27	2,21	2,14	2,09	2,08	2,00	**22**
23	5,75	4,35	3,75	3,41	3,18	3,02	2,90	2,81	2,73	2,67	2,57	2,47	2,36	2,30	2,24	2,18	2,11	2,06	2,04	1,97	**23**
24	5,72	4,32	3,72	3,38	3,15	2,99	2,87	2,78	2,70	2,64	2,54	2,44	2,33	2,27	2,21	2,15	2,08	2,02	2,01	1,94	**24**
25	5,69	4,29	3,69	3,35	3,13	2,97	2,85	2,75	2,68	2,61	2,51	2,41	2,30	2,24	2,18	2,12	2,05	2,00	1,98	1,91	**25**
26	5,66	4,27	3,67	3,33	3,10	2,94	2,82	2,73	2,65	2,59	2,49	2,39	2,28	2,22	2,16	2,09	2,03	1,97	1,95	1,88	**26**
27	5,63	4,24	3,65	3,31	3,08	2,92	2,80	2,71	2,63	2,57	2,47	2,36	2,25	2,19	2,13	2,07	2,00	1,94	1,93	1,85	**27**
28	5,61	4,22	3,63	3,29	3,06	2,90	2,78	2,69	2,61	2,55	2,45	2,34	2,23	2,17	2,11	2,05	1,98	1,92	1,91	1,83	**28**
29	5,59	4,20	3,61	3,27	3,04	2,88	2,76	2,67	2,59	2,53	2,43	2,32	2,21	2,15	2,09	2,03	1,96	1,90	1,89	1,81	**29**
30	5,57	4,18	3,59	3,25	3,03	2,87	2,75	2,65	2,57	2,51	2,41	2,31	2,20	2,14	2,07	2,01	1,94	1,88	1,87	1,79	**30**
40	5,42	4,05	3,46	3,13	2,90	2,74	2,62	2,53	2,45	2,39	2,29	2,18	2,07	2,01	1,94	1,88	1,80	1,74	1,72	1,64	**40**
50	5,34	3,97	3,39	3,05	2,83	2,67	2,55	2,46	2,38	2,32	2,22	2,11	1,99	1,93	1,87	1,80	1,72	1,66	1,64	1,55	**50**
60	5,29	3,93	3,34	3,01	2,79	2,63	2,51	2,41	2,33	2,27	2,17	2,06	1,94	1,88	1,82	1,74	1,67	1,60	1,58	1,48	**60**
70	5,25	3,89	3,31	2,97	2,75	2,59	2,47	2,38	2,30	2,24	2,14	2,03	1,91	1,85	1,78	1,71	1,63	1,56	1,54	1,44	**70**
80	5,22	3,86	3,28	2,95	2,73	2,57	2,45	2,35	2,28	2,21	2,11	2,00	1,88	1,82	1,75	1,68	1,60	1,53	1,51	1,40	**80**
90	5,20	3,84	3,26	2,93	2,71	2,55	2,43	2,34	2,26	2,19	2,09	1,98	1,86	1,80	1,73	1,66	1,58	1,50	1,48	1,37	**90**
100	5,18	3,83	3,25	2,92	2,70	2,54	2,42	2,32	2,24	2,18	2,08	1,97	1,85	1,78	1,71	1,64	1,56	1,48	1,46	1,35	**100**
120	5,15	3,80	3,23	2,89	2,67	2,52	2,39	2,30	2,22	2,16	2,05	1,94	1,82	1,76	1,69	1,61	1,53	1,45	1,43	1,31	**120**
Inf	5,02	3,69	3,12	2,79	2,57	2,41	2,29	2,19	2,11	2,05	1,94	1,83	1,71	1,64	1,57	1,48	1,39	1,30	1,27	1,00	**Inf**
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**100**	**120**	**Inf.**	

Ejemplo: $P(F_{7,8} \geq 4.53) = 0.025$

Tabla F

$\alpha=0.01$

$$F_{\nu_1,\nu_2,\alpha} \quad \Rightarrow \quad P(F_{\nu_1,\nu_2} \geq F_{\nu_1,\nu_2,\alpha}) = \alpha$$

Grados de libertad del numerador: ν_1

Grados de libertad del denominador: ν_2

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**100**	**120**	**Inf.**	
1	4052,2	4999,3	5403,5	5624,3	5764,0	5859,0	5928,3	5981,0	6022,4	6055,9	6106,7	6157,0	6208,7	6234,3	6260,4	6286,4	6313,0	6333,9	6339,5	6365,6	**1**
2	98,50	99,00	99,16	99,25	99,30	99,33	99,36	99,38	99,39	99,40	99,42	99,43	99,45	99,46	99,47	99,48	99,48	99,49	99,49	99,50	**2**
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,05	26,87	26,69	26,60	26,50	26,41	26,32	26,24	26,22	26,13	**3**
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55	14,37	14,20	14,02	13,93	13,84	13,75	13,65	13,58	13,56	13,46	**4**
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05	9,89	9,72	9,55	9,47	9,38	9,29	9,20	9,13	9,11	9,02	**5**
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,72	7,56	7,40	7,31	7,23	7,14	7,06	6,99	6,97	6,88	**6**
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,47	6,31	6,16	6,07	5,99	5,91	5,82	5,75	5,74	5,65	**7**
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,67	5,52	5,36	5,28	5,20	5,12	5,03	4,96	4,95	4,86	**8**
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,11	4,96	4,81	4,73	4,65	4,57	4,48	4,41	4,40	4,31	**9**
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,71	4,56	4,41	4,33	4,25	4,17	4,08	4,01	4,00	3,91	**10**
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,40	4,25	4,10	4,02	3,94	3,86	3,78	3,71	3,69	3,60	**11**
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,16	4,01	3,86	3,78	3,70	3,62	3,54	3,47	3,45	3,36	**12**
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	3,96	3,82	3,66	3,59	3,51	3,43	3,34	3,27	3,25	3,17	**13**
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,80	3,66	3,51	3,43	3,35	3,27	3,18	3,11	3,09	3,00	**14**
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,67	3,52	3,37	3,29	3,21	3,13	3,05	2,98	2,96	2,87	**15**
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,55	3,41	3,26	3,18	3,10	3,02	2,93	2,86	2,84	2,75	**16**
17	8,40	6,11	5,19	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,46	3,31	3,16	3,08	3,00	2,92	2,83	2,76	2,75	2,65	**17**
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,37	3,23	3,08	3,00	2,92	2,84	2,75	2,68	2,66	2,57	**18**
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,30	3,15	3,00	2,92	2,84	2,76	2,67	2,60	2,58	2,49	**19**
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,23	3,09	2,94	2,86	2,78	2,69	2,61	2,54	2,52	2,42	**20**
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31	3,17	3,03	2,88	2,80	2,72	2,64	2,55	2,48	2,46	2,36	**21**
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	3,12	2,98	2,83	2,75	2,67	2,58	2,50	2,42	2,40	2,31	**22**
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21	3,07	2,93	2,78	2,70	2,62	2,54	2,45	2,37	2,35	2,26	**23**
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17	3,03	2,89	2,74	2,66	2,58	2,49	2,40	2,33	2,31	2,21	**24**
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13	2,99	2,85	2,70	2,62	2,54	2,45	2,36	2,29	2,27	2,17	**25**
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09	2,96	2,81	2,66	2,58	2,50	2,42	2,33	2,25	2,23	2,13	**26**
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15	3,06	2,93	2,78	2,63	2,55	2,47	2,38	2,29	2,22	2,20	2,10	**27**
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03	2,90	2,75	2,60	2,52	2,44	2,35	2,26	2,19	2,17	2,06	**28**
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09	3,00	2,87	2,73	2,57	2,49	2,41	2,33	2,23	2,16	2,14	2,03	**29**
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,84	2,70	2,55	2,47	2,39	2,30	2,21	2,13	2,11	2,01	**30**
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,66	2,52	2,37	2,29	2,20	2,11	2,02	1,94	1,92	1,80	**40**
50	7,17	5,06	4,20	3,72	3,41	3,19	3,02	2,89	2,78	2,70	2,56	2,42	2,27	2,18	2,10	2,01	1,91	1,82	1,80	1,68	**50**
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,50	2,35	2,20	2,12	2,03	1,94	1,84	1,75	1,73	1,60	**60**
70	7,01	4,92	4,07	3,60	3,29	3,07	2,91	2,78	2,67	2,59	2,45	2,31	2,15	2,07	1,98	1,89	1,78	1,70	1,67	1,54	**70**
80	6,96	4,88	4,04	3,56	3,26	3,04	2,87	2,74	2,64	2,55	2,42	2,27	2,12	2,03	1,94	1,85	1,75	1,65	1,63	1,49	**80**
90	6,93	4,85	4,01	3,53	3,23	3,01	2,84	2,72	2,61	2,52	2,39	2,24	2,09	2,00	1,92	1,82	1,72	1,62	1,60	1,46	**90**
100	6,90	4,82	3,98	3,51	3,21	2,99	2,82	2,69	2,59	2,50	2,37	2,22	2,07	1,98	1,89	1,80	1,69	1,60	1,57	1,43	**100**
120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56	2,47	2,34	2,19	2,03	1,95	1,86	1,76	1,66	1,56	1,53	1,38	**120**
Inf	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32	2,18	2,04	1,88	1,79	1,70	1,59	1,47	1,36	1,32	1,00	**Inf**
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**100**	**120**	**Inf.**	

$$Ejemplo: \quad P(F_{7,8} \geq 6.18) = 0.01$$