



EXÁMENES RESUELTOS

INGENIERÍA DE SISTEMAS

INFORMÁTICA SISTEMAS

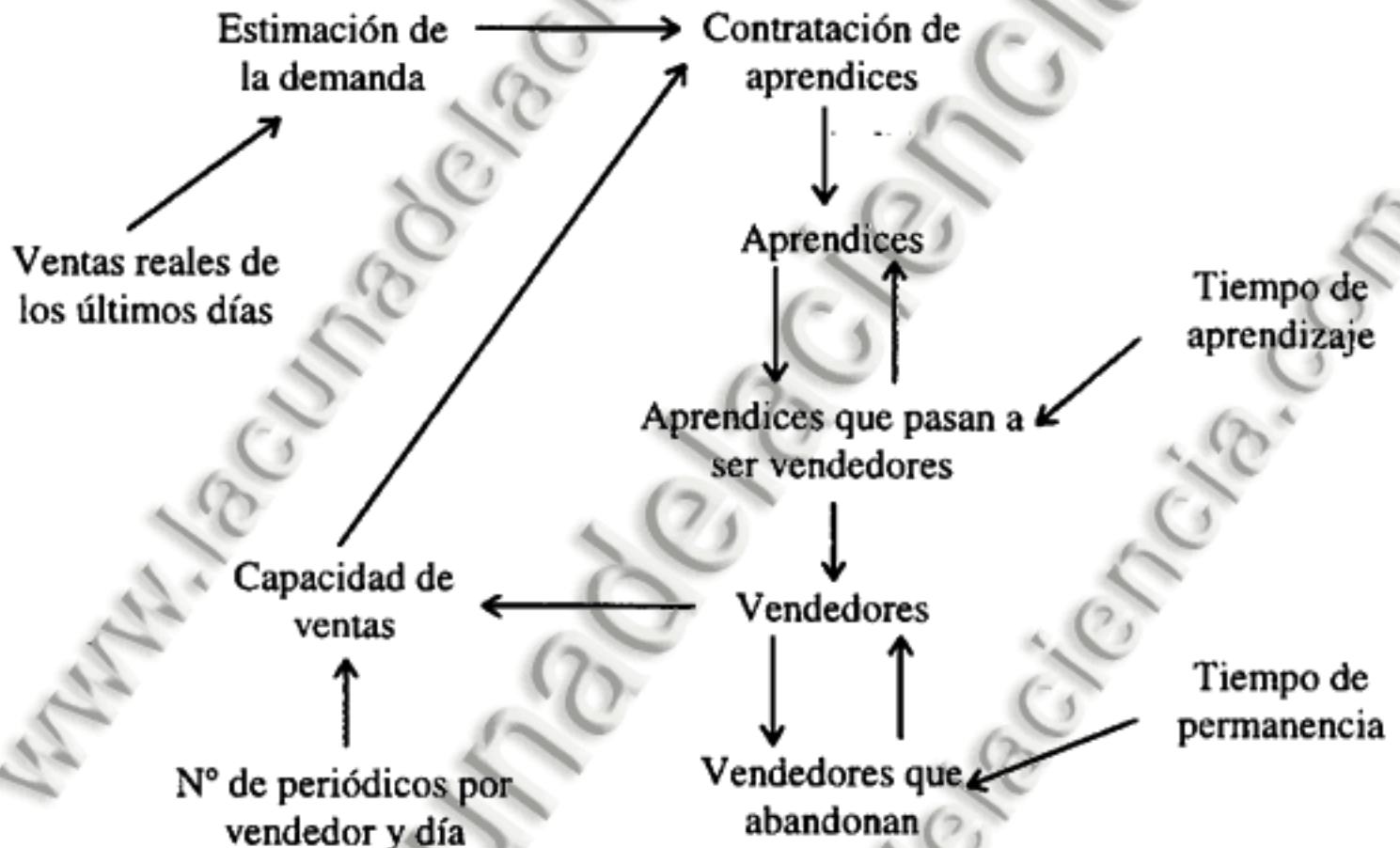
EJERCICIOS INGENIERÍA DE SISTEMAS

1. El editor de un periódico tiene un problema logístico, desea mantener un número de vendedores que le garanticen las ventas y unos beneficios razonables. Para analizar el problema de contratación ha construido el siguiente diagrama causal en el que ha olvidado incluir los signos de todas las relaciones. Se pide:

a) Completar el diagrama causal, justificando de forma cualitativa cada una de las relaciones y de sus signos. Para ello se dispone además de la siguiente información, la misma que tenía el editor cuando construyó el diagrama causal:

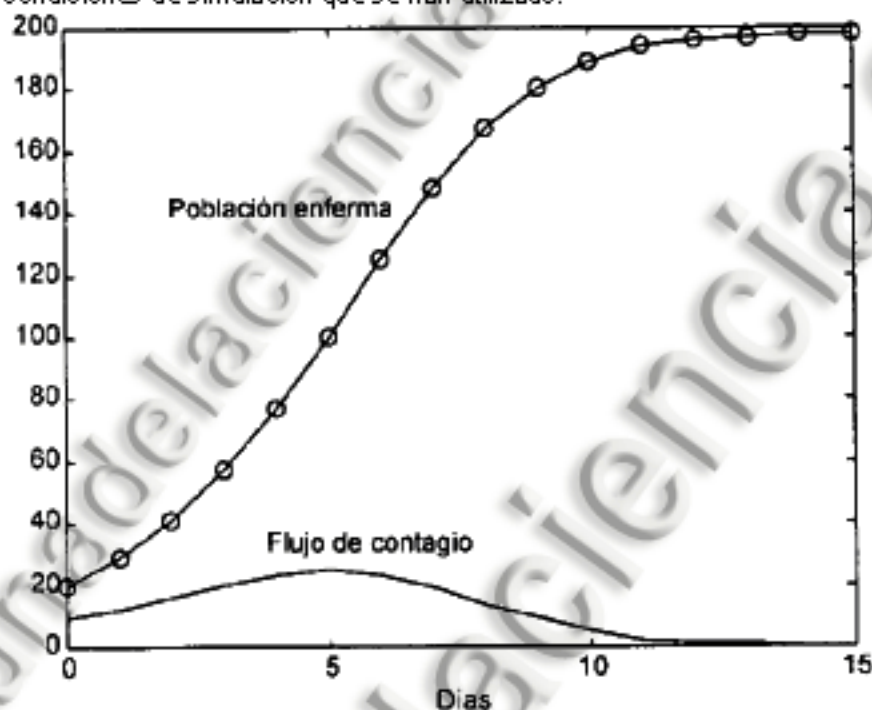
- Cuando una persona ingresa en la empresa tarda unos días en aprender.
- La mayoría de los vendedores abandonan la empresa por su propia voluntad. Las causas de este abandono son diversas.
- Cuando una persona pasa a la categoría de vendedor, la empresa tiene garantizada la venta de un número fijo de periódicos por día.
- La contratación de futuros vendedores se hará si la demanda lo requiere, en caso contrario no se tomará ninguna medida (por ejemplo de despidos) pues los márgenes de beneficios lo permiten.

b) Dibujar el diagrama de Forrester correspondiente. Acompañarlo de aquella información que considere oportuna, por ejemplo de una propuesta para estimación de la demanda y para la contratación de aprendices.



2. En la figura se muestra el comportamiento temporal de las dos variables fundamentales (la población enferma y el flujo de contagio) en el modelo de difusión de una epidemia en una población finita. Estos resultados también están recogidos en forma de tabla. Se pide:

- Establecer el conjunto de ecuaciones que pueden representar a este modelo Especificando el significado y las unidades de cada variable.
- Utilizar la información gráfica de la figura y la información numérica de la tabla para determinar los parámetros que definen este modelo y las condiciones de simulación que se han utilizado.



Día	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Población enferma	20	29	41	57	77	100	125	148	167	180	189	194	196	197	198	198
Flujo de contagio	9	12	16	20	23	25	23	19	13	9	5	2	1	1	0	0

3. Modelo "Población de Ballenas".

El modelo que se presenta en este ejercicio fue propuesto en 1978 por Jeffers para analizar hasta qué punto se podía explotar una población de ballenas sin que la especie desapareciera. Pero se puede utilizar para modelar cualquier explotación ganadera o piscifactoría con el ajuste oportuno de parámetros. En el modelo se hacen las siguientes hipótesis:

- Para simplificar la simulación, se considera únicamente la población de ballenas hembras y dentro de ésta tres grupos (jóvenes, adultas y viejas), basado en el supuesto de que la proporción machos/hembras es constante a lo largo de los años y es la misma en todos los grupos y por tanto en la población total de ballenas.

- Las ballenas jóvenes alcanzan la madurez aproximadamente a los 5 o 6 años de edad, y la expectativa de vida natural es de aproximadamente 50 años. De manera que los tres grupos en los que se clasifican las ballenas corresponden a: ballenas jóvenes = ballenas con edad comprendida entre 0 y 4 años, ballenas adultas = ballenas con edad comprendida entre 5 y 12 años, y ballenas viejas = ballenas con edad comprendida entre 13 y 50 años.

- En ausencia de explotación, la tasa de supervivencia anual para la población es de aproximadamente el 89% en los 12 primeros años y el 82% en los siguientes.

- Las ballenas jóvenes no tienen capacidad para procrear, pero sí las adultas y las viejas con unas tasas de fecundidad anual del 20.5% y del 22.5% respectivamente sobre la población que forma su grupo.

- Cada año madura el 25% de la población de ballenas jóvenes.

- Cada año envejece el 12.5% de la población de ballenas adultas.

- Los tres grupos de población están expuestos a la misma explotación (sacrificio) y ésta se realiza con un factor de proporcionalidad F .

- La unidad de tiempo que conviene a la simulación es el año.

a) Justificar que con las hipótesis anteriores, se pueden establecer las siguientes ecuaciones para las variaciones de población en los tres grupos de ballenas

$$\text{jóvenes}(t + \Delta t) = \text{jóvenes}(t) + \Delta t[0.205 \text{ adultas}(t) + 0.225 \text{ viejas}(t) - (0.25 + 0.11 + F)\text{jóvenes}(t)]$$

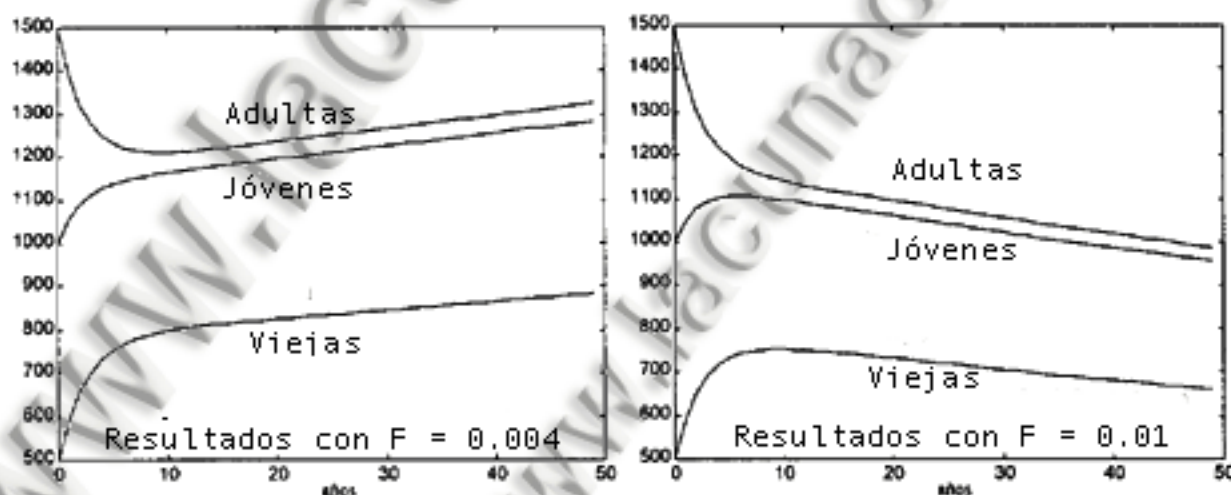
$$\text{adultas}(t + \Delta t) = \text{adultas}(t) + \Delta t[0.25 \text{ jóvenes}(t) - (0.125 + 0.11 + F) \text{ adultas}(t)]$$

$$\text{viejas}(t + \Delta t) = \text{viejas}(t) + \Delta t[0.125 \text{ adultas}(t) - (0.18 + F)\text{vieja}(t)]$$

b) Expresar mediante el correspondiente diagrama de Forrester o diagrama causal (según desee) las tres ecuaciones que definen el modelo. Indicar de forma clara la nomenclatura utilizada para las variables.

c) Comprobar, simulando al menos los diez primeros años, a partir de una población inicial de 1000 ballenas jóvenes, 1500 adultas y 500 viejas, que si el factor de explotación $F=0.004$ todos los grupos presentan un crecimiento mantenido de población (véase resultados de la figura 1), mientras que si $F=0.01$ todos los grupos presentan un decrecimiento mantenido de población y por tanto desaparecerán con los años (véase resultados de la figura 2). Observación: en todos los grupos de población se ha redondeado al menor número entero durante la simulación.

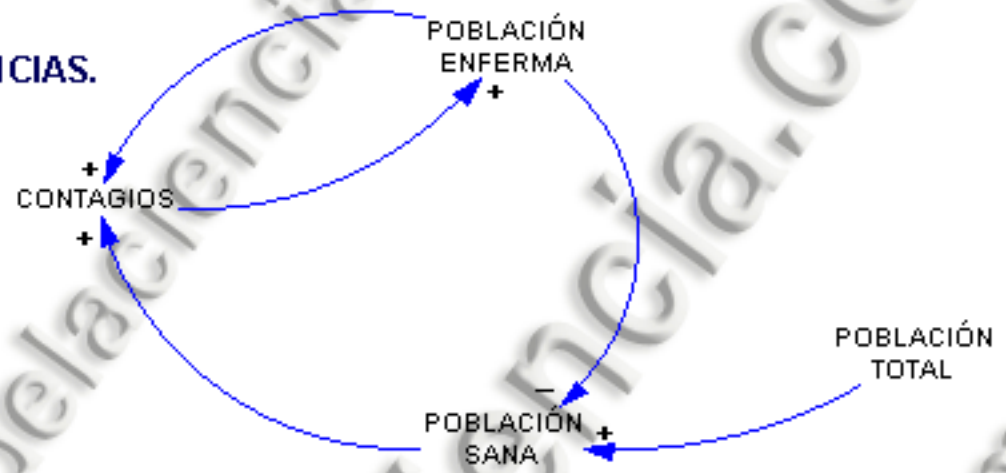
d) En función de los resultados de las figuras 1 y 2 es lógico esperar que existe un factor de explotación F para el que, independientemente de las poblaciones iniciales, se alcanza un equilibrio (estado estacionario) en los tres grupos de población. ¿Sabría usted indicar un procedimiento analítico para encontrar este valor de F ?



a) DEFINICIÓN DE VARIABLES.

PS: población sana
PT: población total
PE: población enferma
FC: flujo de contagio
TC: tasa de contagio

DIAGRAMA DE INFLUENCIAS.



CLASIFICACIÓN DE LAS VARIABLES Y UNIDADES

- Variables de estado:
PE: personas
- Variables de flujo:
FC: personas / día
- Constantes:
PT: personas
TC: personas / día
- Variables auxiliares:
PS: personas

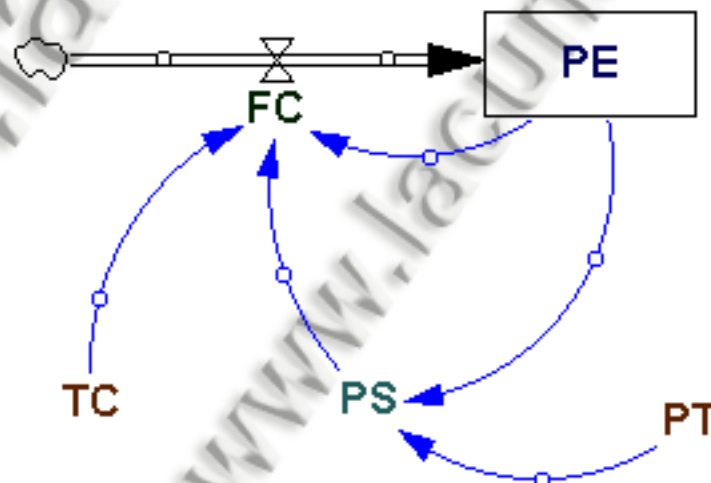
ECUACIONES

$$PS(t) = PT - PE(t)$$

$$FC(t) = TC \cdot PE(t) \cdot PS(t)$$

$$\frac{dPE(t)}{dt} = FC(t)$$

DIAGRAMA DE FORRESTER:



b) Se entiende por epidemia aquella enfermedad que conduce al contagio total de la población. Por ello $PT = 200$ (valor máximo que alcanza la PE en la gráfica).
Si $PE(0) = 20$, entonces $PS(0) = 180$
Utilizando: $FC(t) = TC \cdot PE(t) \cdot PS(t)$ obtenemos TC

FC	PE	PS	TC
9	20	180	0,0025
12	29	171	0,00241984
16	41	159	0,00245436
20	57	143	0,00245369
23	77	123	0,00242847
25	100	100	0,0025
23	125	75	0,00245333
19	148	52	0,00246881
13	167	33	0,00235892
9	180	20	0,0025
5	189	11	0,002405
2	194	6	0,00171821
1	196	4	0,00127551
1	197	3	0,00169205
0	198	2	0
0	198	2	0

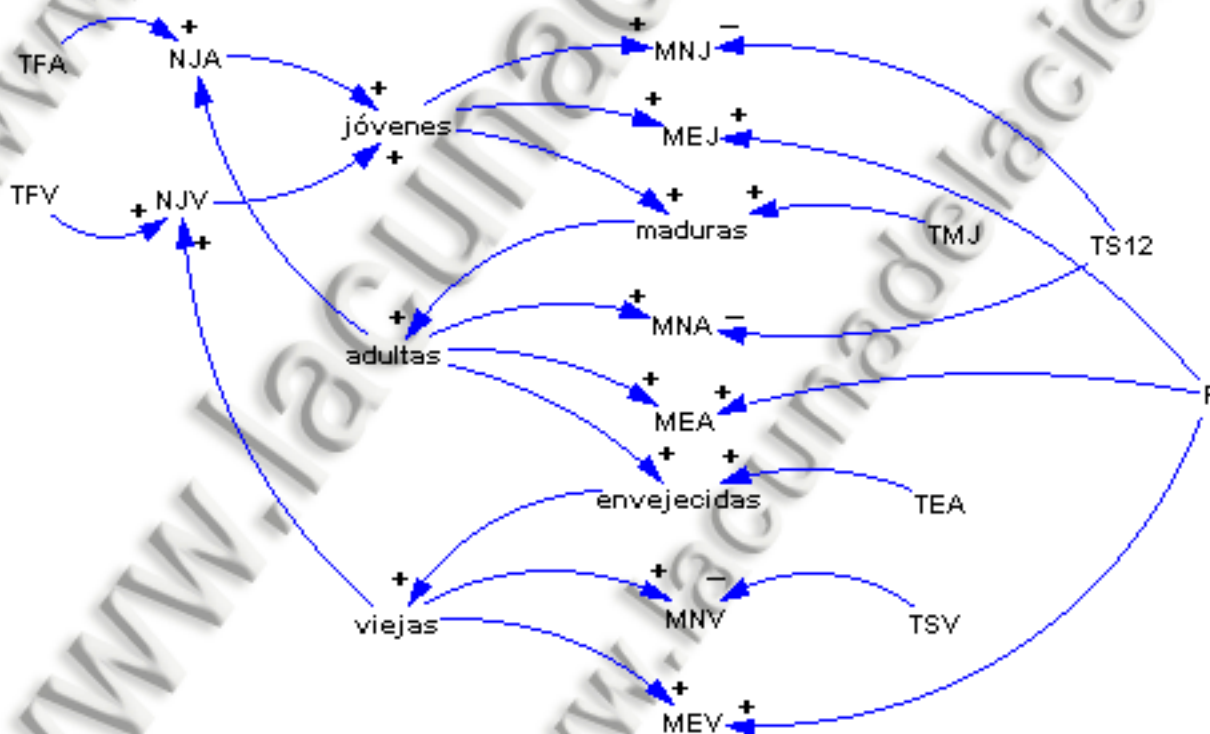
Puesto que TC es una constante, podemos suponer que las pequeñas diferencias que se dan son debidas al redondeo y $TC = 0.0025$

Modelo población de ballenas.

DEFINICIÓN DE VARIABLES:

adultas: número de ballenas adultas.
jóvenes: número de ballenas jóvenes.
viejas: número de ballenas viejas.
NJV: nacimiento de ballenas jóvenes a partir de ballenas viejas.
NJA: nacimiento de ballenas jóvenes a partir de ballenas adultas.
TFV: tasa de fecundidad de las ballenas viejas.
TFA: tasa de fecundidad de las ballenas adultas.
MNJ: muertes naturales de ballenas jóvenes.
MNA: muertes naturales de ballenas adultas.
MNV: muertes naturales de ballenas viejas.
MEJ: muertes por explotación de ballenas jóvenes.
MEA: muerte por explotación de ballenas adultas.
MEV: muerte por explotación de ballenas viejas.
TS12: tasa de supervivencia en los 12 primeros años.
F: factor de explotación
maduras: ballenas jóvenes que maduran anualmente.
TMJ: tasa de maduración de las ballenas jóvenes
envejecidas: ballenas adultas que envejecen anualmente.
TEA: tasa de envejecimiento de ballenas adultas.
TSV: tasa de supervivencia a partir de los 12 primeros años.

DIAGRAMA DE INFLUENCIAS



CLASIFICACIÓN DE LAS VARIABLES Y UNIDADES:

- Variables de estado:

jóvenes: ballenas

adultas: ballenas

viejas: ballenas

- Variables de flujo:

NJV: ballenas / año

NJA: ballenas / año

MNJ: ballenas / año

MEJ: ballenas / año

MNA: ballenas / año

MEA: ballenas / año

MNV: ballenas / año

MEV: ballenas / año

maduras: ballenas / año

envejecidas: ballenas / año

- Constantes:

TFV: año⁻¹

TFA: año⁻¹

TMJ: año⁻¹

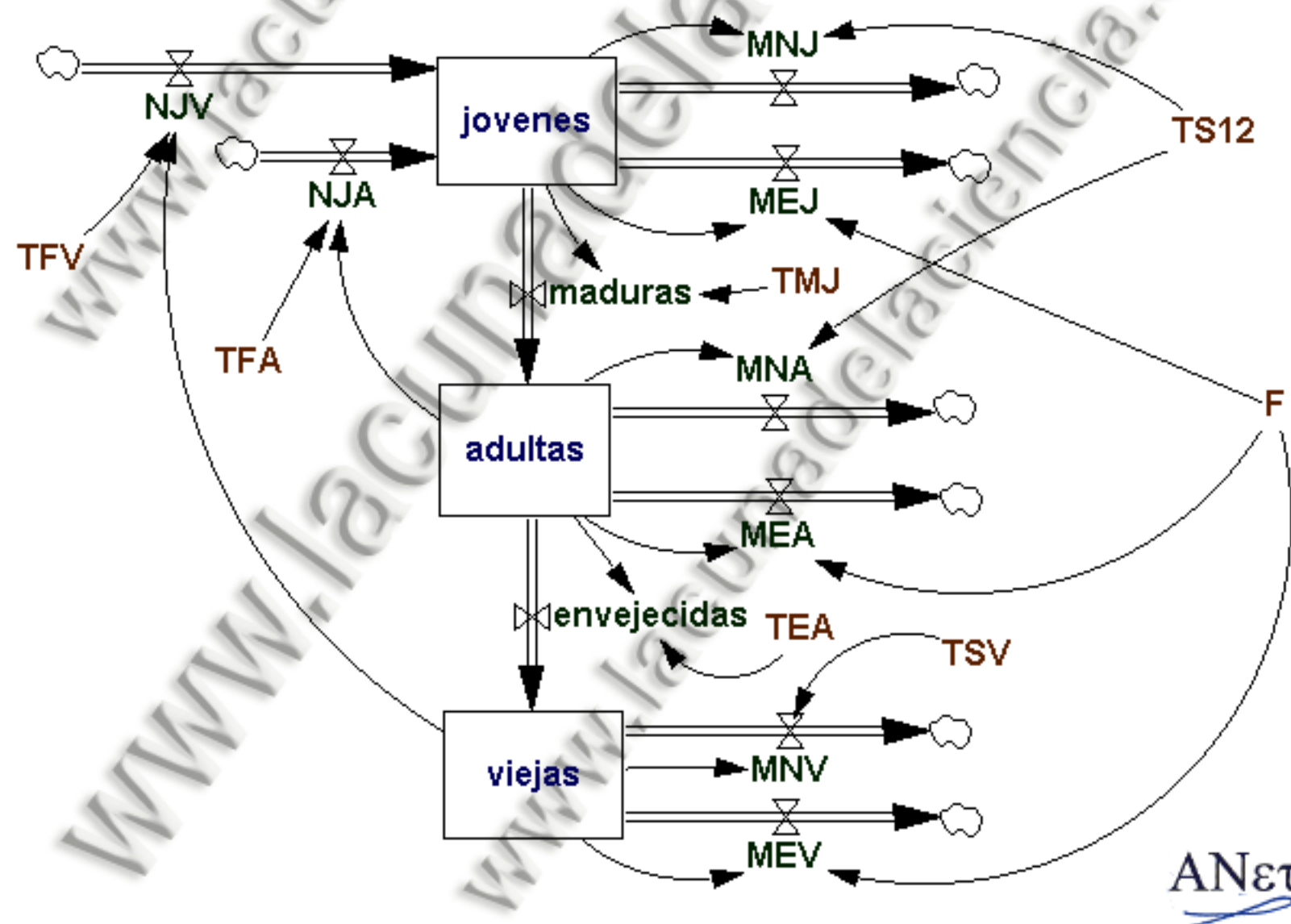
TEA: año⁻¹

TSV: año⁻¹

TS12: año⁻¹

F: año⁻¹

b) DIAGRAMA DE FORRESTER:



ECUACIONES PARA LA SIMULACIÓN

$$\text{jóvenes}(t + \Delta t) = \text{jóvenes}(t) + \Delta t[0.205 \text{ adultas}(t) + 0.225 \text{ viejas}(t) - (0.25 + 0.11 + F)\text{jóvenes}(t)]$$

$$\text{adultas}(t + \Delta t) = \text{adultas}(t) + \Delta t[0.25 \text{ jóvenes}(t) - (0.125 + 0.11 + F) \text{ adultas}(t)]$$

$$\text{viejas}(t + \Delta t) = \text{viejas}(t) + \Delta t[0.125 \text{ adultas}(t) - (0.18 + F)\text{vieja}(t)]$$

c) Simulación

$$\text{TS12} = 89 \quad \text{TSV} = 82 \quad \text{TFA} = 20.5 \quad \text{TFV} = 22.5 \quad \text{TMJ} = 25 \quad \text{TEA} = 12.5$$

$$\text{jóvenes}(0) = 1000 \quad \text{adultas}(0) = 1500 \quad \text{viejas}(0) = 500$$

$$\Delta t = 1 \text{ año}$$

Tabla para $F = 0.004$.

t	viejas	adultas	jóvenes
0	500	1500	1000
1	595.5	1391.5	1056
2	659.865	1322.93	1090.86
3	703.817	1279.47	1113.46
4	734.248	1252.04	1128.81
5	755.651	1235	1139.8
6	770.987	1224.79	1148.11
7	782.223	1219.09	1154.75
8	790.68	1216.41	1160.33
9	797.247	1215.77	1165.24
10	802.525	1216.51	1169.71

Tabla para $F = 0.01$

t	viejas	adultas	jóvenes
0	500	1500	1000
1	592.5	1382.5	1050
2	652.737	1306.29	1078.22
3	692.003	1255.8	1093.94
4	717.498	1221.62	1102.32
5	733.875	1197.9	1106.33
6	744.177	1181	1107.68
7	750.408	1168.57	1107.38
8	753.902	1159.12	1106.05
9	755.55	1151.65	1104.06
10	755.951	1145.51	1101.64

Se observa que para $f = 0.01$ las ballenas adultas disminuyen. Esto provocará a largo plazo una disminución del resto de las ballenas y conducirá a la desaparición de los ejemplares.

d) Suponemos que el estado de equilibrio supone que: jóvenes + adultas + viejas = cte

Como inicialmente tenemos:

$$\text{jóvenes}(0) = 1000 \quad \text{adultas}(0) = 1500 \quad \text{viejas}(0) = 500$$

Entonces:

$$\text{jóvenes} + \text{adultas} + \text{viejas} = 3000$$

Además, tal y como vemos en las gráficas, al principio las ballenas jóvenes y viejas aumentan y las adultas disminuyen, hasta que llegue un momento en el que las res se estabilicen. En ese instante, para las tres variables el factor que multiplica a Δt será nulo:

$$0.205 \text{ adultas} + 0.225 \text{ viejas} - (0.25 + 0.11 + F) \text{ jóvenes} = 0$$

$$0.25 \text{ jóvenes} - (0.125 + 0.11 + F) \text{ adultas} = 0$$

$$0.125 \text{ adultas} - (0.18 + F) \text{ viejas} = 0$$

De donde podemos obtener un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas.

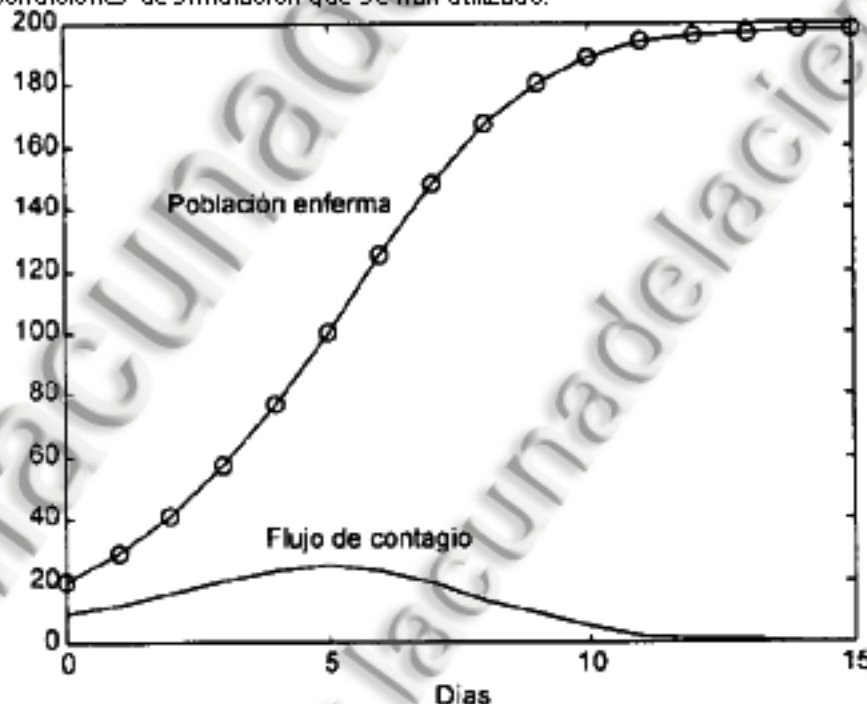
1. La figura muestra el diagrama causal simplificado de un modelo de almacén para estudiar el tiempo de respuesta (TR) de éste, medido como el tiempo (en días) transcurrido desde que una determinada pieza es solicitada por el cliente hasta que la petición es satisfecha. En este diagrama faltan por incluir los signos de todas las relaciones. Se pide:

- Completar el diagrama causal, justificando de forma cualitativa cada uno de las relaciones y de sus signos.
- Dibujar el diagrama de Forrester correspondiente, en el que se incluyan dos funciones no lineales que no están explícitas en el diagrama causal. Una función que relacione el tiempo de respuesta con las peticiones acumuladas y otra que relacione el porcentaje de satisfacción de los clientes con el tiempo de respuesta. Indicar las unidades de cada variable.



2. En la figura se muestra el comportamiento temporal de las dos variables fundamentales (la población enferma y el flujo de contagio) en el modelo de difusión de una epidemia en una población finita. Estos resultados también están recogidos en forma de tabla. Se pide:

- Establecer el conjunto de ecuaciones que pueden representar a este modelo. Especificando el significado y las unidades de cada variable.
- Utilizar la información gráfica de la figura y la información numérica de la tabla para determinar los parámetros que definen este modelo y las condiciones de simulación que se han utilizado.



Día	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Población enferma	20	29	41	57	77	100	125	148	167	180	189	194	196	197	198	198
Flujo de contagio	9	12	16	20	23	25	23	19	13	9	5	2	1	1	0	0

3. Modelo "Población de Ballenas".

El modelo que se presenta en este ejercicio fue propuesto en 1978 por Jeffers para analizar hasta qué punto se podía explotar una población de ballenas sin que la especie desapareciera. Pero se puede utilizar para modelar cualquier explotación ganadera o piscifactoría con el ajuste oportuno de parámetros. En el modelo se hacen las siguientes hipótesis:

- Para simplificar la simulación, se considera únicamente la población de ballenas hembras y dentro de ésta tres grupos (jóvenes, adultas y viejas), basado en el supuesto de que la proporción machos/hembras es constante a lo largo de los años y es la misma en todos los grupos y por tanto en la población total de ballenas.

- Las ballenas jóvenes alcanzan la madurez aproximadamente a los 5 o 6 años de edad, y la expectativa de vida natural es de aproximadamente 50 años. De manera que los tres grupos en los que se clasifican las ballenas corresponden a: ballenas jóvenes = ballenas con edad comprendida entre 0 y 4 años, ballenas adultas = ballenas con edad comprendida entre 5 y 12 años, y ballenas viejas = ballenas con edad comprendida entre 13 y 50 años.

- En ausencia de explotación, la tasa de supervivencia anual para la población es de aproximadamente el 89% en los 12 primeros años y el 82% en los siguientes.

- Las ballenas jóvenes no tienen capacidad para procrear, pero sí las adultas y las viejas con unas tasas de fecundidad anual del 20.5% y del 22.5% respectivamente sobre la población que forma su grupo.

- Cada año madura el 25% de la población de ballenas jóvenes.

- Cada año envejece el 12.5% de la población de ballenas adultas.

- Los tres grupos de población están expuestos a la misma explotación (sacrificio) y ésta se realiza con un factor de proporcionalidad F .

- La unidad de tiempo que conviene a la simulación es el año.

a) Justificar que con las hipótesis anteriores, se pueden establecer las siguientes ecuaciones para las variaciones de población en los tres grupos de ballenas

$$\text{jóvenes}(t + \Delta t) = \text{jóvenes}(t) + \Delta t[0.205 \text{ adultas}(t) + 0.225 \text{ viejas}(t) - (0.25 + 0.11 + F)\text{jóvenes}(t)]$$

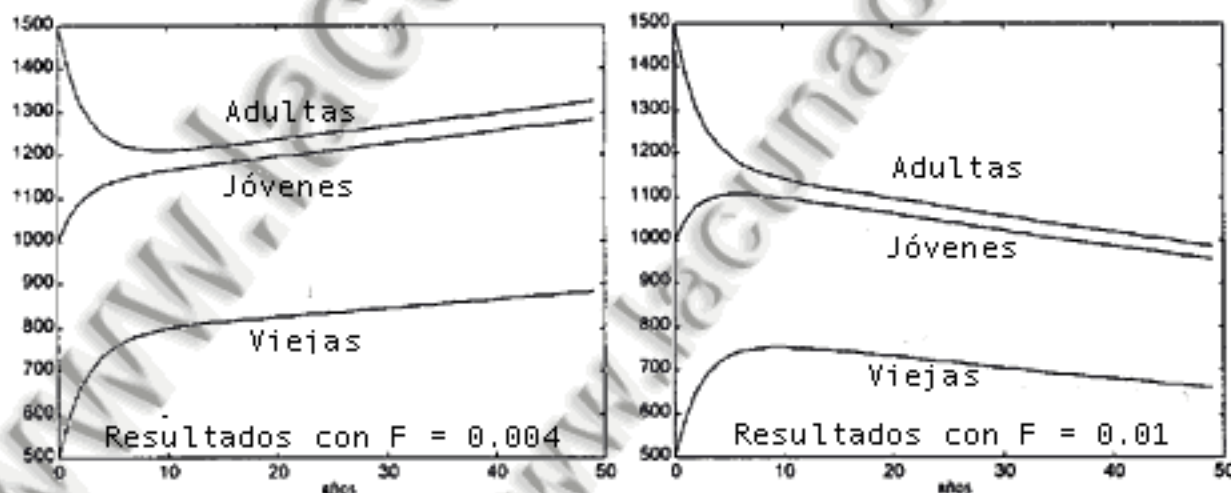
$$\text{adultas}(t + \Delta t) = \text{adultas}(t) + \Delta t[0.25 \text{ jóvenes}(t) - (0.125 + 0.11 + F) \text{ adultas}(t)]$$

$$\text{viejas}(t + \Delta t) = \text{viejas}(t) + \Delta t[0.125 \text{ adultas}(t) - (0.18 + F)\text{vieja}(t)]$$

b) Expresar mediante el correspondiente diagrama de Forrester o diagrama causal (según desee) las tres ecuaciones que definen el modelo. Indicar de forma clara la nomenclatura utilizada para las variables.

c) Comprobar, simulando al menos los diez primeros años, a partir de una población inicial de 1000 ballenas jóvenes, 1500 adultas y 500 viejas, que si el factor de explotación $F=0.004$ todos los grupos presentan un crecimiento mantenido de población (véase resultados de la figura 1), mientras que si $F=0.01$ todos los grupos presentan un decrecimiento mantenido de población y por tanto desaparecerán con los años (véase resultados de la figura 2). Observación: en todos los grupos de población se ha redondeado al menor número entero durante la simulación.

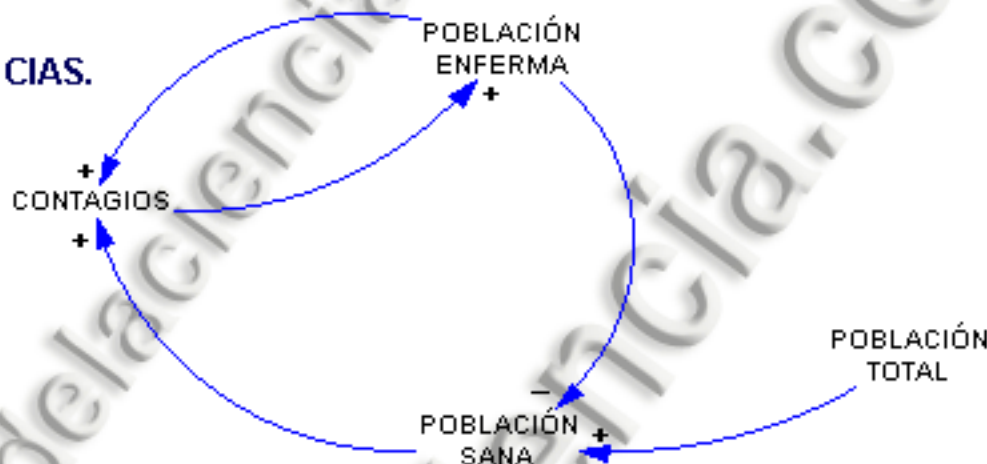
d) En función de los resultados de las figuras 1 y 2 es lógico esperar que existe un factor de explotación F para el que, independientemente de las poblaciones iniciales, se alcanza un equilibrio (estado estacionario) en los tres grupos de población. ¿Sabría usted indicar un procedimiento analítico para encontrar este valor de F ?



a) DEFINICIÓN DE VARIABLES.

PS: población sana
PT: población total
PE: población enferma
FC: flujo de contagio
TC: tasa de contagio

DIAGRAMA DE INFLUENCIAS.



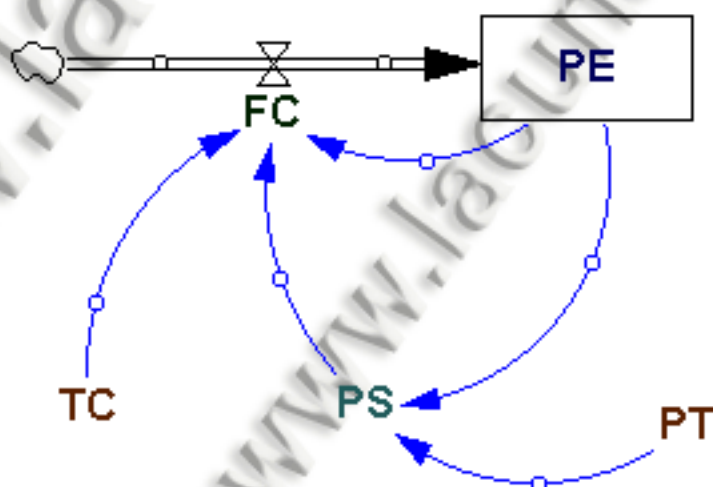
CLASIFICACIÓN DE LAS VARIABLES Y UNIDADES

- Variables de estado:
PE: personas
- Variables de flujo:
FC: personas / día
- Constantes:
PT: personas
TC: personas / día
- Variables auxiliares:
PS: personas

ECUACIONES

$$PS(t) = PT - PE(t)$$
$$FC(t) = TC \cdot PE(t) \cdot PS(t)$$
$$\frac{dPE(t)}{dt} = FC(t)$$

DIAGRAMA DE FORRESTER:



b) Se entiende por epidemia aquella enfermedad que conduce al contagio total de la población. Por ello $PT = 200$ (valor máximo que alcanza la PE en la gráfica).
Si $PE(0) = 20$, entonces $PS(0) = 180$
Utilizando: $FC(t) = TC \cdot PE(t) \cdot PS(t)$ obtenemos TC

FC	PE	PS	TC
9	20	180	0,0025
12	29	171	0,00241984
16	41	159	0,00245436
20	57	143	0,00245369
23	77	123	0,00242847
25	100	100	0,0025
23	125	75	0,00245333
19	148	52	0,00246881
13	167	33	0,00235892
9	180	20	0,0025
5	189	11	0,002405
2	194	6	0,00171821
1	196	4	0,00127551
1	197	3	0,00169205
0	198	2	0
0	198	2	0

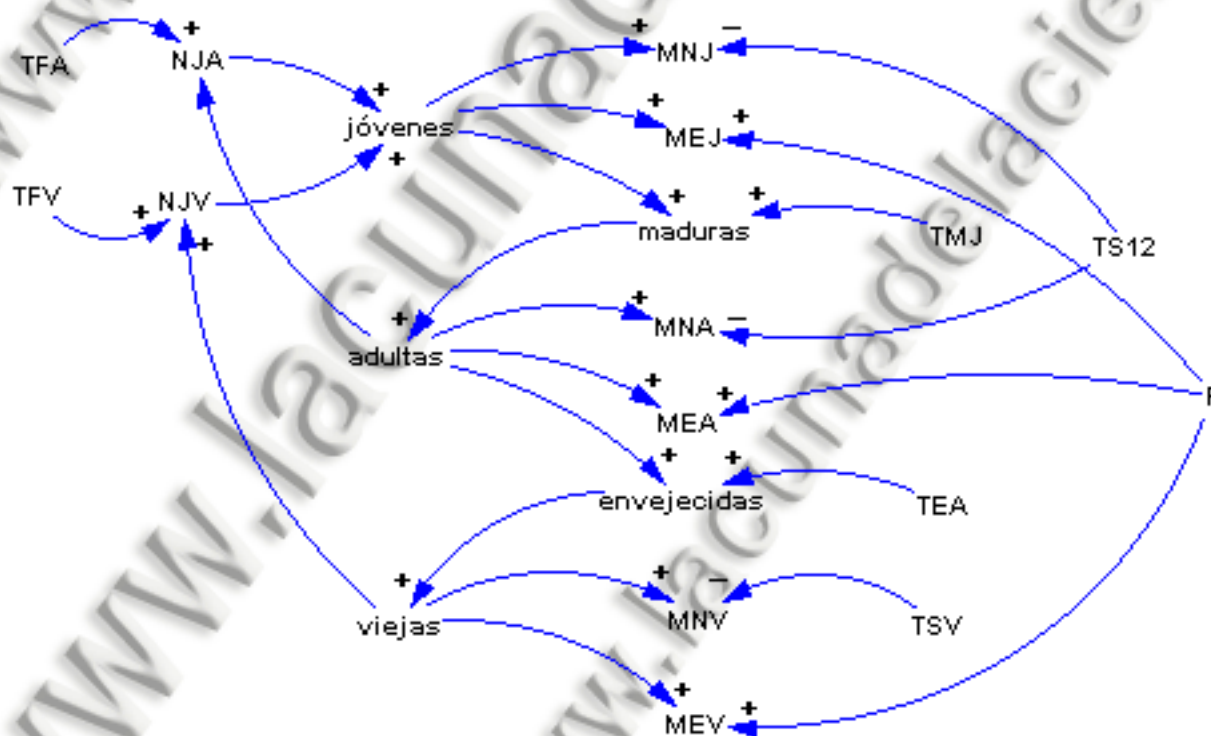
Puesto que TC es una constante, podemos suponer que las pequeñas diferencias que se dan son debidas al redondeo y $TC = 0.0025$

Modelo población de ballenas.

DEFINICIÓN DE VARIABLES:

adultas: número de ballenas adultas.
jóvenes: número de ballenas jóvenes.
viejas: número de ballenas viejas.
NJV: nacimiento de ballenas jóvenes a partir de ballenas viejas.
NJA: nacimiento de ballenas jóvenes a partir de ballenas adultas.
TFV: tasa de fecundidad de las ballenas viejas.
TFA: tasa de fecundidad de las ballenas adultas.
MNJ: muertes naturales de ballenas jóvenes.
MNA: muertes naturales de ballenas adultas.
MNV: muertes naturales de ballenas viejas.
MEJ: muertes por explotación de ballenas jóvenes.
MEA: muerte por explotación de ballenas adultas.
MEV: muerte por explotación de ballenas viejas.
TS12: tasa de supervivencia en los 12 primeros años.
F: factor de explotación
maduras: ballenas jóvenes que maduran anualmente.
TMJ: tasa de maduración de las ballenas jóvenes
envejecidas: ballenas adultas que envejecen anualmente.
TEA: tasa de envejecimiento de ballenas adultas.
TSV: tasa de supervivencia a partir de los 12 primeros años.

DIAGRAMA DE INFLUENCIAS



CLASIFICACIÓN DE LAS VARIABLES Y UNIDADES:

• Variables de estado:

jóvenes: ballenas

adultas: ballenas

viejas: ballenas

• Variables de flujo:

NJV: ballenas / año

NJA: ballenas / año

MNJ: ballenas / año

MEJ: ballenas / año

MNA: ballenas / año

MEA: ballenas / año

MNV: ballenas / año

MEV: ballenas / año

maduras: ballenas / año

envejecidas: ballenas / año

• Constantes:

TFV: año⁻¹

TFA: año⁻¹

TMJ: año⁻¹

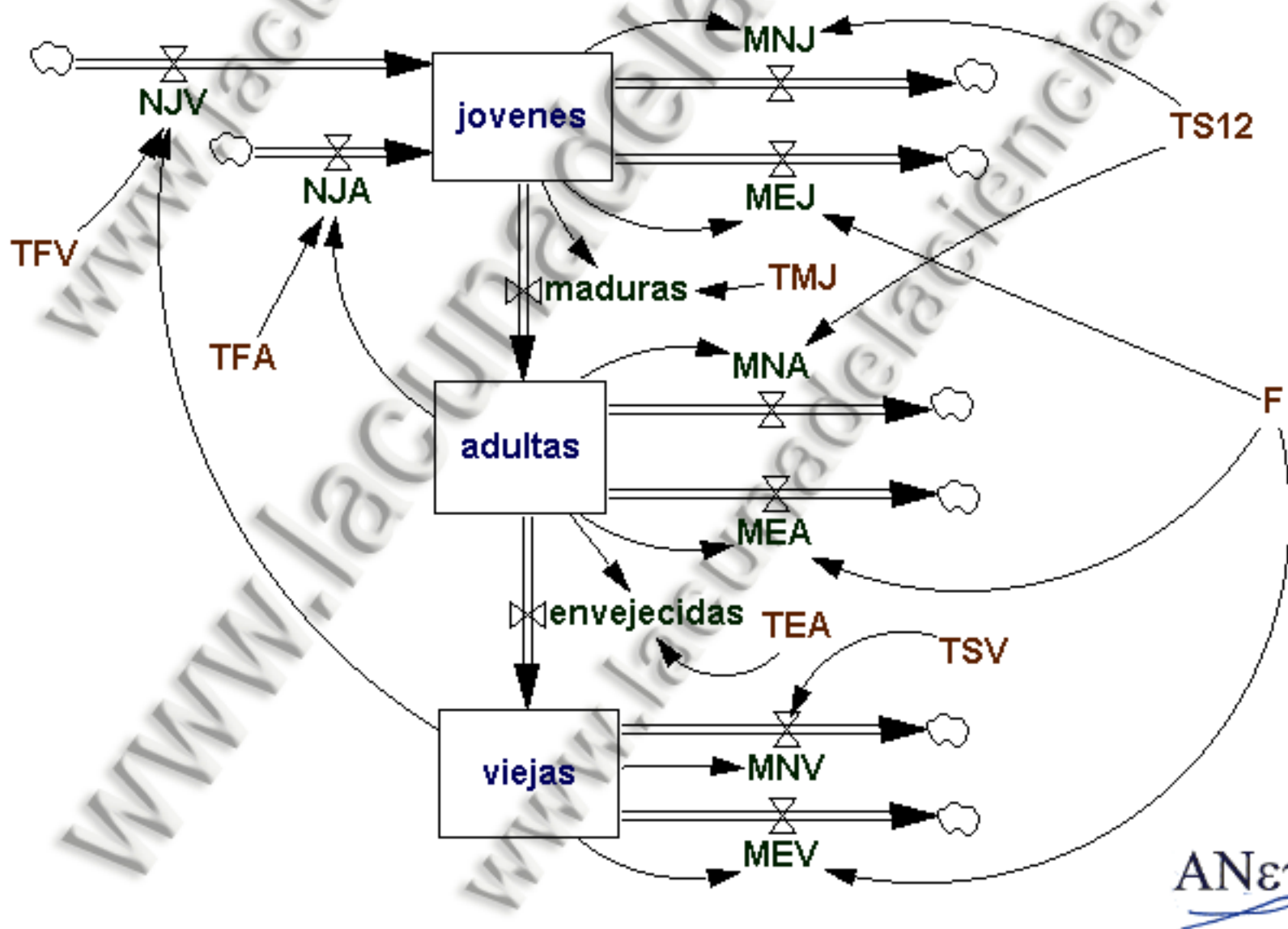
TEA: año⁻¹

TSV: año⁻¹

TS12: año⁻¹

F: año⁻¹

b) DIAGRAMA DE FORRESTER:



ECUACIONES PARA LA SIMULACIÓN

$$\text{jóvenes}(t + \Delta t) = \text{jóvenes}(t) + \Delta t[0.205 \text{ adultas}(t) + 0.225 \text{ viejas}(t) - (0.25 + 0.11 + F)\text{jóvenes}(t)]$$

$$\text{adultas}(t + \Delta t) = \text{adultas}(t) + \Delta t[0.25 \text{ jóvenes}(t) - (0.125 + 0.11 + F) \text{ adultas}(t)]$$

$$\text{viejas}(t + \Delta t) = \text{viejas}(t) + \Delta t[0.125 \text{ adultas}(t) - (0.18 + F)\text{vieja}(t)]$$

c) Simulación

$$\text{TS12} = 89 \quad \text{TSV} = 82 \quad \text{TFA} = 20.5 \quad \text{TFV} = 22.5 \quad \text{TMJ} = 25 \quad \text{TEA} = 12.5$$

$$\text{jóvenes}(0) = 1000 \quad \text{adultas}(0) = 1500 \quad \text{viejas}(0) = 500$$

$$\Delta t = 1 \text{ año}$$

Tabla para $F = 0.004$.

t	viejas	adultas	jóvenes
0	500	1500	1000
1	595.5	1391.5	1056
2	659.865	1322.93	1090.86
3	703.817	1279.47	1113.46
4	734.248	1252.04	1128.81
5	755.651	1235	1139.8
6	770.987	1224.79	1148.11
7	782.223	1219.09	1154.75
8	790.68	1216.41	1160.33
9	797.247	1215.77	1165.24
10	802.525	1216.51	1169.71

Tabla para $F = 0.01$

t	viejas	adultas	jóvenes
0	500	1500	1000
1	592.5	1382.5	1050
2	652.737	1306.29	1078.22
3	692.003	1255.8	1093.94
4	717.498	1221.62	1102.32
5	733.875	1197.9	1106.33
6	744.177	1181	1107.68
7	750.408	1168.57	1107.38
8	753.902	1159.12	1106.05
9	755.55	1151.65	1104.06
10	755.951	1145.51	1101.64

Se observa que para $f = 0.01$ las ballenas adultas disminuyen. Esto provocará a largo plazo una disminución del resto de las ballenas y conducirá a la desaparición de los ejemplares.

d) Suponemos que el estado de equilibrio supone que: jóvenes + adultas + viejas = cte

Como inicialmente tenemos:

$$\text{jóvenes}(0) = 1000 \quad \text{adultas}(0) = 1500 \quad \text{viejas}(0) = 500$$

Entonces:

$$\text{jóvenes} + \text{adultas} + \text{viejas} = 3000$$

Además, tal y como vemos en las gráficas, al principio las ballenas jóvenes y viejas aumentan y las adultas disminuyen, hasta que llegue un momento en el que las res se estabilicen. En ese instante, para las tres variables el factor que multiplica a Δt será nulo:

$$0.205 \text{ adultas} + 0.225 \text{ viejas} - (0.25 + 0.11 + F) \text{ jóvenes} = 0$$

$$0.25 \text{ jóvenes} - (0.125 + 0.11 + F) \text{ adultas} = 0$$

$$0.125 \text{ adultas} - (0.18 + F) \text{ viejas} = 0$$

De donde podemos obtener un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas.

1. Para analizar la demanda de productos de una empresa, así como el plazo de entrega de los mismos a sus clientes, se ha construido el siguiente diagrama de influencias en el que se ha olvidado incluir los signos de todas las relaciones. Se pide:



a) Completar el diagrama, justificando de forma cualitativa cada una de las relaciones y sus signos. Para ello dispone de la siguiente información:

- El modelo contempla dos departamentos bien diferenciados de la empresa, el de ventas y el de servicio. El departamento de ventas tiene como principal objetivo conseguir una gran demanda de productos, a través de una política de marketing creciente con la demanda. Mientras que el departamento de servicio tiene como principal objetivo atender el mayor número de peticiones, pero se encuentra con una limitación física, la capacidad de producción, que sólo se puede combatir con una adecuada política de inversiones.
- El modelo incorpora también el descontento que produce en los clientes el aumento en el plazo de entrega de los productos, con la consecuente disminución de la demanda.
- La política de inversiones de la empresa toma como único indicativo el plazo de entrega de los productos, pero la actuación no es inmediata sino que se produce con un cierto retraso.

b) ¿Qué arquetipo de los que ha estudiado contempla el tipo de situación que se da en este modelo? Justifique su respuesta. OJO: Si usted es alumno repetido, indíquelo, no es necesario que conteste a este apartado.

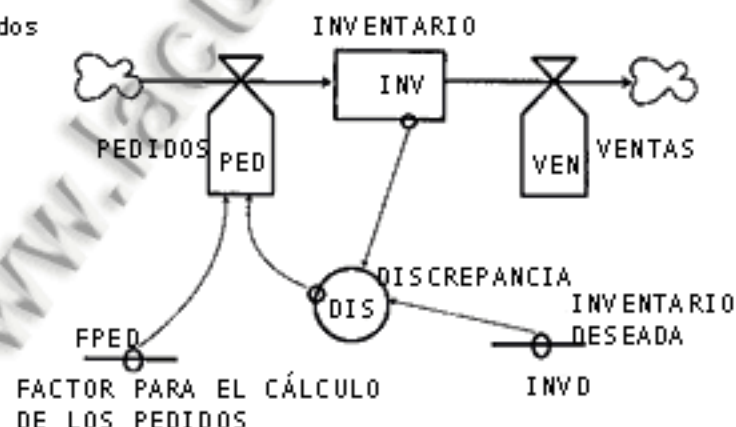
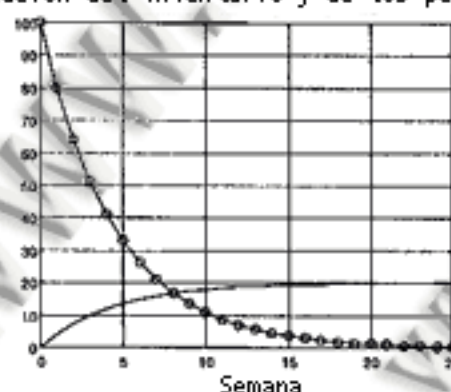
2. La figura de la izquierda muestra el resultado de la simulación del sistema de control de un inventario, cuyo diagrama de Forrester se muestra a la derecha. Sabiendo que la simulación se ha hecho en las siguientes condiciones:

- Utilizando la semana como unidad de tiempo.
- El sistema inicialmente está en equilibrio, con el inventario (INV) igual al inventario deseado (INVD) de 100 unidades.
- Las ventas (VEN) varían, de repente, de 0 a 20 unidades por semana en la semana cero de la simulación y se mantiene a este valor durante el resto de la simulación.
- El flujo de pedidos (PED) es proporcional a la discrepancia (DIS) entre el inventario actual y el deseado.

a) Determinar el valor de la constante de proporcionalidad (FPED), responsable de la nueva citación de equilibrio que muestra la gráfica.

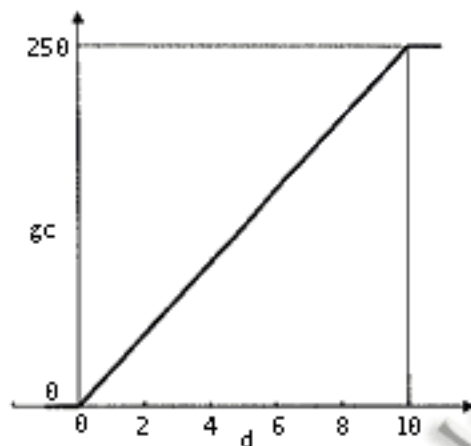
b) Utilizar la evolución del inventario para determinar un valor aproximado de la constante de tiempo del sistema, expresada en semanas. ¿Qué relación guarda esta constante de tiempo con la variable FPED?

Evolución del inventario y de los pedidos



3. Modelo "Regulación de temperatura".

En este ejercicio se presenta un modelo simple del sistema de regulación de temperatura para una vivienda por medio de un termostato, que acciona o detiene el funcionamiento de una fuente de calor. El modelo está descrito por las siguientes ecuaciones:



$$(1) \quad tm(t) = ta(t) + 0.05 \, c(t)$$

$$(2) \quad d(t) = td(t) - tm(t)$$

$$(3) \quad cg(t) = f(f(t))$$

$$(4) \quad pc(t) = \frac{pp \, c(t)}{100}$$

$$(5) \quad \frac{d \, c(t)}{dt} = cg(t) - pc(t)$$

Siendo:

c , el calor acumulado en la vivienda (calorías).

cg , el calor generado por la fuente de calor (calorías/min)

pc , las pérdidas de calor debidas a que la vivienda no está térmicamente aislada (calorías/min)

pp , el porcentaje de pérdidas de calor (adimensional)

tm , la temperatura medida en el interior de la vivienda ($^{\circ}\text{C}$)

td , la temperatura deseada para el interior de la vivienda ($^{\circ}\text{C}$)

ta , la temperatura ambiente en el exterior de la vivienda ($^{\circ}\text{C}$)

d , la diferencia entre la temperatura deseada y la temperatura medida ($^{\circ}\text{C}$)

f , una función no lineal de una variable representada en la gráfica adjunta

a) Razonar sobre la congruencia de estas ecuaciones y expresar, mediante el diagrama de Forrester, las relaciones entre las distintas variables que definen el modelo.

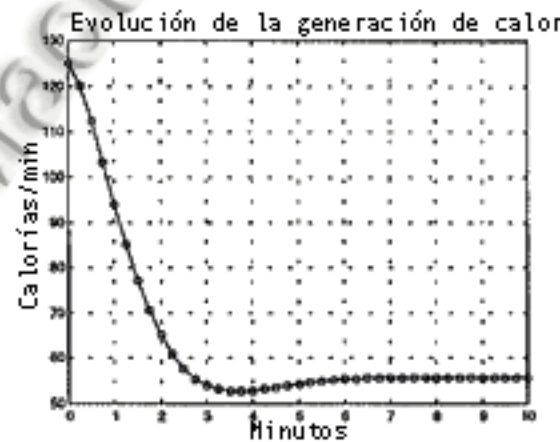
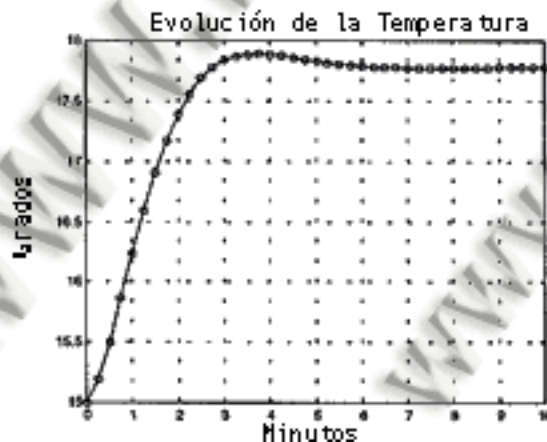
b) Comprobar mediante simulación que ocurre en el sistema durante los primeros 2.5 minutos si:

- La temperatura ambiente es constante e igual a 15°C .
- Inicialmente no existe calor acumulado.
- El porcentaje de pérdidas en la vivienda es del 1%
- La temperatura deseada es constante e igual a 20°C .

Para ello se recomienda utilizar la aproximación de Euler con $\Delta t = 15 \text{ seg} = 0.25 \text{ min}$.

c) ¿cómo modificaría usted las ecuaciones (1) y (2) de cara a la simulación si no se dispone de una medida instantánea de la temperatura sino con un cierto retraso?

d) A continuación se muestran los resultados obtenidos con este modelo en las condiciones del apartado (b) cuando el retraso en la medida de la temperatura es de 2 minutos. ¿Qué comentarios puede hacer de ellos si los compara con los obtenidos por usted en el apartado (b)?



a) Modificaciones realizadas en las relaciones:

Órdenes pendientes \rightarrow + Plazo medio de entregas

Órdenes pendientes \rightarrow - Entregas

Plazo medio de entregas \rightarrow - \parallel \rightarrow + Inversiones

Demanda de videoconsolas \rightarrow - Disipación de la demanda

Disipación de la demanda \rightarrow - Demanda de videoconsolas

Por un lado disponemos de dos bucles de realimentación positiva que influyen en la demanda de videoconsolas:

A un aumento/disminución de marketing mayor/menor demanda de videoconsolas y a un aumento/disminución de demanda de videoconsolas mayor/menor marketing. A este bucle de realimentación positiva le denominaremos BUCLE DE PROMOCIÓN.

A un aumento/disminución de la disipación de la demanda menor/mayor demanda de videoconsolas y a un aumento/disminución de demanda de videoconsolas menor/mayor disipación de la demanda.

Por otro lado un aumento/disminución en la demanda de videoconsolas más/menos nuevas órdenes (influencia positiva), las nuevas órdenes a su vez influyen positivamente en las órdenes pendientes y éstas negativamente en las entregas que a su vez influyen negativamente en el plazo medio de entregas, ejerciendo éstas una influencia positiva en el descontento de los clientes que afectan positivamente en la disipación de la demanda y ésta última negativamente en la demanda de videoconsolas, cerrándose así un bucle de realimentación negativa (4 + y 3 -) a este bucle le denominaremos BUCLE DE RETRASO SUMINISTRO.

Las Órdenes pendientes también influyen positivamente en el plazo medio de las entregas.

En tercer lugar las entregas influyen negativamente en el plazo medio de las entregas que con un cierto retraso incluyen positivamente en las inversiones, éstas positivamente en la capacidad de producción y ésta última nuevamente positivamente sobre las entregas cerrando un bucle de realimentación negativa (3 + 1 -) que denominaremos BUCLE DE CAPACIDAD DE PRODUCCIÓN.

b) Características:

La empresa dispone de política de marketing para incentivar la venta de videoconsolas.

Un aumento de las entregas de órdenes pendientes provoca retrasos en el plazo medio de entregas y un aumento en el descontento de los clientes lo que hace disminuir la demanda (aumento de la disipación de las demandas).

Dispone también de una política de aumento de capacidad de producción cuando se detecta que ésta es la que limita las entregas. Si la toma de decisión de este aumento se retrasa y tarda en decidirse sobre su actuación, pueden haberse producido retrasos excesivos en el plazo medio de entregas y haber afectado negativamente al volumen de ventas.

c) El tipo de situación contemplado en el presente modelo corresponde al ARQUETIPO DEL CRECIMIENTO CON INVERSIÓN INSUFICIENTE.

Por un lado disponemos de la combinación de un bucle de realimentación positiva (BUCLE DE PROMOCIÓN) con otro de realimentación negativa (BUCLE DE RETRASO DE SUMINISTRO) lo que da lugar a un crecimiento sigmoïdal. Al incrementarse las órdenes pendientes, con relación a la capacidad de producción, el plazo medio de las entregas aumenta, se produce así un descontento de los clientes, por lo que aumenta la disipación de la demanda. Ante un aumento de la disipación de la demanda (menos clientes) la empresa podría actuar aumentando su política de marketing para incentivar nuevas ventas, pero ésta no sería una buena actuación, pues las nuevas ventas provocarían un nuevo aumento en el plazo medio de entregas debido a que no se dispone de la suficiente capacidad de producción. La actuación sobre esta estructura debe hacerse sobre el bucle positivo CAPACIDAD DE PRODUCCIÓN incrementando así la capacidad de producción. Una vez detectado el problema de que el retraso del plazo medio de entregas es debido a la insuficiente capacidad de producción, se actúa sobre ésta muy cautelarmente. Podemos interpretar la combinación de los bucles retraso suministro y capacidad de producción como arquetipo de adicción.

a) A la vista del diagrama de Forrester y las indicaciones que se nos dan podemos poner las siguientes ecuaciones:

$$\frac{dINV(t)}{dt} = PED(t) - VEN(t)$$

$$PED(t) = FPED \cdot DIS(t)$$

$$DIS(t) = INVD(t) - INV(t)$$

Agrupando todas en una tenemos:

$$\frac{dINV(t)}{dt} = FPED \cdot (INVD(t) - INV(t)) - VEN(t)$$

Que se puede poner:

$$\frac{dINV(t)}{dt} = FPED \cdot INVD(t) - VEN(t) - FPED \cdot INV(t)$$

Que comparándola con la ecuación general:

$$dx = k(x_d - x)$$

$$\text{Observamos que } k \cdot x_d = FPED \cdot INVD(t) - VEN(t)$$

x_d es el valor inicial del inventario, que podemos obtenerlo de la gráfica como $x_d = 0$

$$0 = FPED \cdot INVD(t) - VEN(t)$$

$$0 = FPED \cdot 100 - 20$$

$$20 = 100 \cdot FPED$$

$$FPED = 0.2$$

b) La constante de tiempo se determina como: $T = 1/k$.

Comparando otra vez las ecuaciones, observamos que $k = FPED$ (pendiente de la recta)

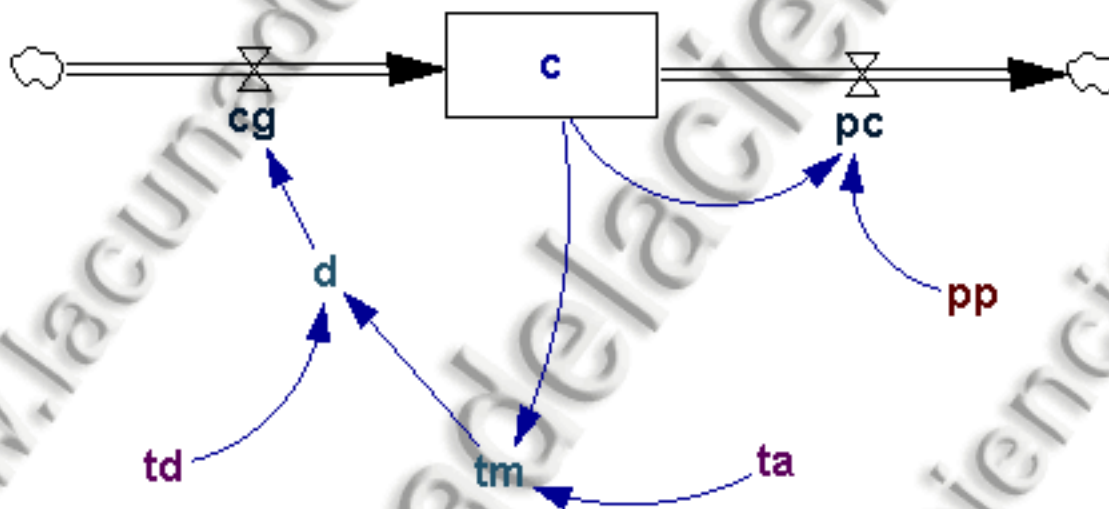
$$T = 1/0.2 = 5$$

Modelo regulación de temperatura.

a) Justificación.

- (1) La temperatura medida en el interior de la vivienda es la suma de la temperatura ambiente exterior y el calor acumulado en la vivienda multiplicado por un coeficiente de conversión de calorías a grados centígrados.
- (2) d es la diferencia entre la temperatura deseada y la temperatura medida.
- (3) En la fuente de calor se genera calor en función de la discrepancia.
- (4) Las pérdidas de calor en la vivienda son función de un porcentaje de pérdidas y del calor acumulado en la vivienda.
- (5) El calor acumulado en la vivienda aumenta con el calor generado con la fuente de calor y disminuye con las pérdidas por no estar aislada térmicamente.

DIAGRAMA DE FORRESTER:



ECUACIONES PARA LA SIMULACIÓN

- (1) $tm(t) = ta(t) + 0.05 \cdot c(t)$
- (2) $d(t) = td(t) - tm(t)$
- (3) $cg(t) = f(d(t))$
- (4) $pc(t) = pp \cdot c(t) / 100$
- (5) $c(t + \Delta t) = c(t) + \Delta t \cdot [cg(t) - pc(t)]$

b) Simulación

$$\begin{aligned}
 ta(t) &= 15 & pp &= 1 & td(t) &= 20 \\
 c(0) &= 0 \\
 \Delta t &= 0.25 \text{ min}
 \end{aligned}$$

Tabla de valores sin aproximar.

t	c	cg	pc	tm	d
0	0,00	125,00	0,00	15,00	5,00
0,25	125,00	-31,25	1,25	21,25	-1,25
0,5	92,50	9,38	0,93	19,63	0,38
0,75	100,95	-1,19	1,01	20,05	-0,05
1	98,75	1,56	0,99	19,94	0,06
1,25	99,32	0,84	0,99	19,97	0,03
1,5	99,18	1,03	0,99	19,96	0,04
1,75	99,21	0,98	0,99	19,96	0,04
2	99,20	0,99	0,99	19,96	0,04
2,25	99,21	0,99	0,99	19,96	0,04
2,5	99,21	0,99	0,99	19,96	0,04

La temperatura en el interior de la vivienda se estabiliza a casi 20 grados a partir de $t = 1$.

c) El retraso influiría directamente en la ecuación (1) que quedaría:

$$(1) \text{tm}(t) = \text{delay}(\text{ta}(t) + 0.05 \text{c}(t), \text{retraso})$$

En la ecuación 2 influiría indirectamente por medio de la variable tm .

d) En la gráfica de la derecha, observamos que la temperatura no se estabiliza hasta $t = 3$, es decir con un retraso de 2 min respecto a los datos obtenidos en la simulación. Lo mismo sucede con el calor generado. Deja de generarse calor cuando la temperatura se estabiliza en ambos casos, con lo que también sufre el retraso de 2 min.

1. Se pretende modelar el proceso de edificación de viviendas en un área urbana, de superficie total fija. Tal que:

- El número de viviendas en el área venga influenciado por la construcción de viviendas y por la demolición de las mismas.
- El ritmo de construcción de viviendas venga influenciado por el factor de ocupación del terreno.
- Tenga en consideración otros aspectos tales como la tasa normal de construcción de viviendas, la superficie por vivienda y la vida media de las viviendas.

a) Hacer una clasificación razonada de todas y cada una de la variables que debería tener el modelo.

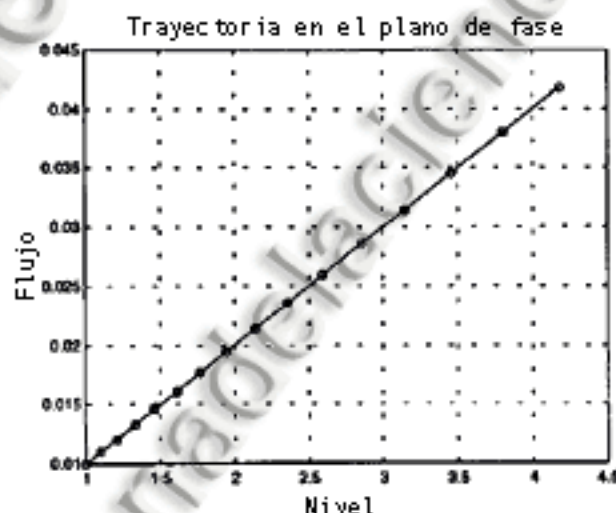
b) Proponer un conjunto mínimo, pero razonable, de ecuaciones APRA es modelo y dibujar el correspondiente diagrama de Forrester.

2. Las figuras muestran la evolución del estado y la trayectoria en el plano de fase de un bucle elemental de realimentación positiva. En ambas gráficas están indicados, mediante círculos, los valores de las variables en cada unidad de tiempo y se incluye con trazo continuo la unión de todos ellos.

a) Determinar sobre ambas gráficas o sobre la gráfica más adecuada:

- El valor de la tasa de crecimiento k .
- El tiempo de duplicación, expresado en unidades de tiempo.

b) Si lo que se quiere representar con este modelo es la evolución de la población mundial, ¿qué representa cada una de las variables en este caso particular?. ¿cómo interpreta usted los resultados de la figura de la izquierda?



3. Se pretende estudiar, con un modelo y en simulación, el tiempo de búsqueda de un computador central, que almacena información sobre todos los libros de una biblioteca, y al que están conectados otros computadores que hacen de puntos de consulta. La dirección de la biblioteca utiliza el tiempo de búsqueda para decidir el número de puestos de consultas bibliográficas que va a haber en cada momento, entre un mínimo de 2 y un máximo de 6 puestos. Pero el computador central también está dotado de un sistema de decisión automática para que cuando el tiempo de búsqueda aumente trate de contrarrestarlo poniendo más recursos propios a disposición de las consultas, y por tanto atienda más consultas por minuto. El modelo está descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} (1) \quad TB(t) &= 0.25 + \frac{(CBA(t))^2}{2000} \\ (2) \quad CAM(t) &= f(TB(t)) \\ (3) \quad NPC(t) &= g(TB(t)) \\ (4) \quad NCM(t) &= TCP \cdot NPC(t) \\ (5) \quad \frac{dCBA(t)}{dt} &= NCM(t) - CAM(t) \end{aligned}$$

Siendo:

TB Tiempo de búsqueda en minutos, medido como el tiempo transcurrido desde que un puesto de consulta solicita información de un libro y ésta le es satisfecha

CAM consultas bibliográficas atendidas por minuto

NPC Número de puestos de consulta

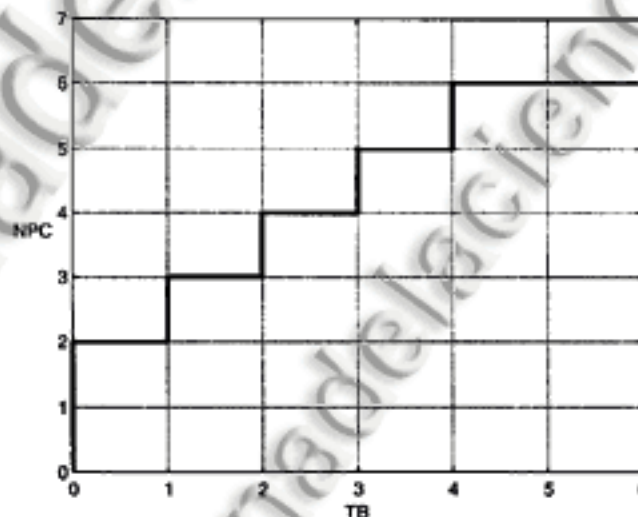
TCP Tasa de consultas por puesto.

NCM Numero de consultas bibliográficas por minuto

f y g son dos funciones no lineales (a tramos rectos) descritas respectivamente en la tabla y en la gráfica siguientes.

TB	CAM
0	10
0.5	10
2	40

Presentación tabulada de la función no lineal $CAM=f(TB)$



Representación gráfica de la función no lineal $NPC=g(TB)$

a) Dibujar el diagrama de influencias, razonando todas y cada una de las relaciones. Se recomienda ayudarse de las ecuaciones del modelo y de las formas de la tabla y de la gráfica, en lugar de hacerlo de forma intuitiva.

b) Iterar las veces que sean necesarias para medir el tiempo que tarda en estabilizarse el tiempo de búsqueda del computador central y el valor que alcanzan las consultas bibliográficas acumuladas en ese instante. Condiciones de la simulación:

- Inicialmente no hay consultas bibliográficas acumuladas, $CBA(0) = 0$.
- La tasa de consultas por puesto vale 10.
- El intervalo de simulación Δt es de 0.75 minutos.

Modelo edificación de viviendas.

DEFINICIÓN DE VARIABLES:

V, el número de viviendas

CV, la construcción de viviendas

DV, la demolición de viviendas

FO, el factor de ocupación del terreno

TNCV, la tasa normal de construcción de viviendas

S, la superficie edificable

SPV, el factor de repercusión de una vivienda sobre la superficie edificable

VMV, la vida media de las viviendas

MVS, el multiplicador de viviendas

CLASIFICACIÓN DE LAS VARIABLES Y UNIDADES:

- Variables de estado:

V: viviendas

- Variables de flujo:

CV: viviendas/año

DV: viviendas/año

- Constantes:

VMV: años

TNCV: viviendas/año

SPV: $\frac{1}{\text{vivienda}}$

S: m^2

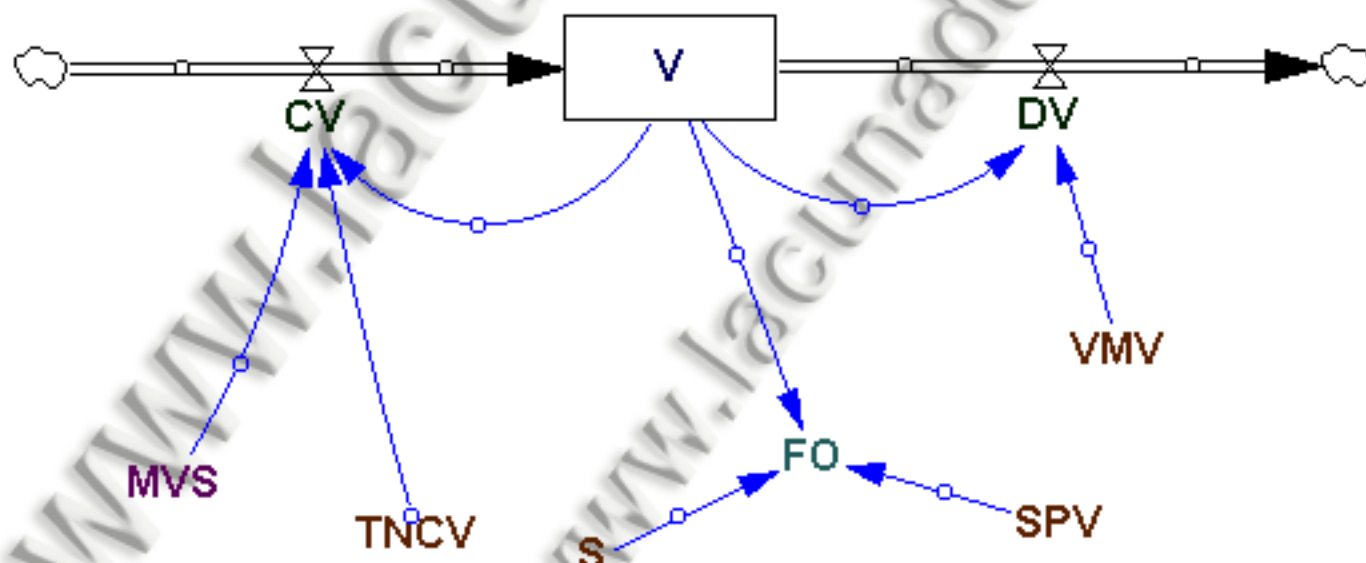
- Variables auxiliares:

FO: viviendas / m^2

- Variables exógenas:

MVS: viviendas

DIAGRAMA DE FORRESTER:



ECUACIONES

$$(1) DV(t) = \frac{V(t)}{VMV}$$

$$(2) CV(t) = V(t) MVS(t) TNCV$$

$$(3) \frac{dV(t)}{dt} = CV(t) - DV(t)$$

$$(4) FO(t) = \frac{V(t) SPV}{S}$$

a) La gráfica de la izquierda se ve como evoluciona el sistema, el estado parte de un valor $x(0)=1$ y crece exponencialmente con el tiempo, con un comportamiento autorreforzado, corresponde a bucle de realimentación positiva (bucle reforzador) y que actúa acelerando o bien el crecimiento o el declive.

En la gráfica de la derecha, que liga el flujo (F) con el nivel x, puede observarse que el flujo es una función lineal creciente del estado x, por tanto se puede utilizar para determinar el valor de fracción por unidad de tiempo k (tasa de crecimiento), como la pendiente de dicha recta.

$$k = \frac{0,042 - 0,01}{4,2 - 1} = 0,01$$

El tiempo de duplicación (t_d) corresponde al tiempo que tarda en duplicarse el valor inicial del nivel

$$x(t_d) = 2 x(0)$$

$$t_d = \frac{\ln 2}{k} = \frac{0,7}{0,01} = 70 \text{ unidades de tiempo (años)}$$

b) En la gráfica de la izquierda está representada la evolución de la población a lo largo del tiempo, con un crecimiento exponencial: el nivel de población mundial crece 0,01 x por unidad de tiempo (1% anual).

En cuanto al t_d (tiempo de duplicación), se refiere al momento en el que el nivel de población alcanza el valor 2, es decir, duplica su valor inicial $x(0)=1$, y que como hemos calculado ha tenido lugar al cabo de 70 unidades de tiempo ($1850 + 70 = 1912$), es decir en el año 1912 el valor de la población mundial (personas) se duplicó con respecto a su valor en el año 1850 (pasó de 1 a 2).

Modelo búsqueda en computador central.

DEFINICIÓN DE VARIABLES:

TB Tiempo de búsqueda en minutos, medido como el tiempo transcurrido desde que un puesto de consulta solicita información de un libro y ésta le es satisfecha

CAM consultas bibliográficas atendidas por minuto

CBA Consultas bibliográficas acumuladas

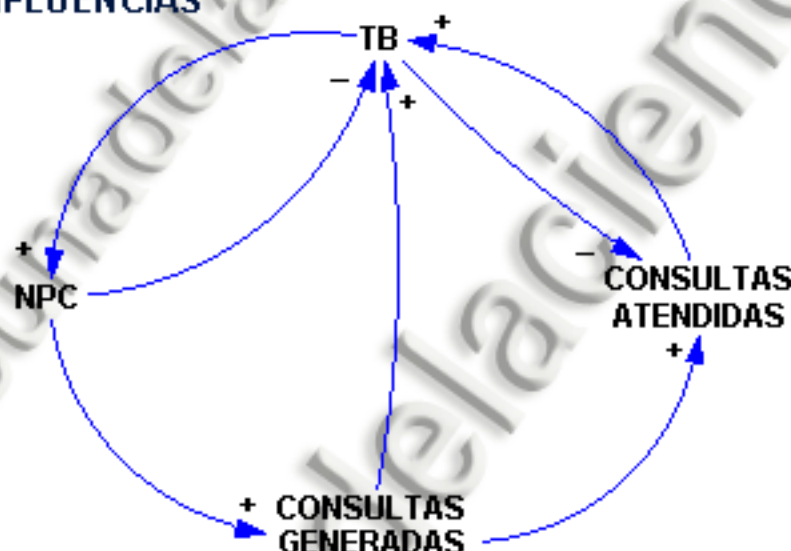
NPC Número de puestos de consulta

TCP Tasa de consultas por puesto.

NCM Numero de consultas bibliográficas por minuto

f y g son dos funciones no lineales (a tramos rectos) descritas respectivamente en la tabla y en la gráfica siguientes.

DIAGRAMA DE INFLUENCIAS



a) Justificación.

El tiempo de búsqueda determina el flujo de consultas. A mayor tiempo de respuesta en la búsqueda se aumenta el número de puestos de consultas que hace aumentar el número de consultas generadas repercutiendo de nuevo en un aumento en el tiempo de búsqueda. Se trata de un comportamiento típico de un bucle de realimentación positiva, crecimiento exponencial.

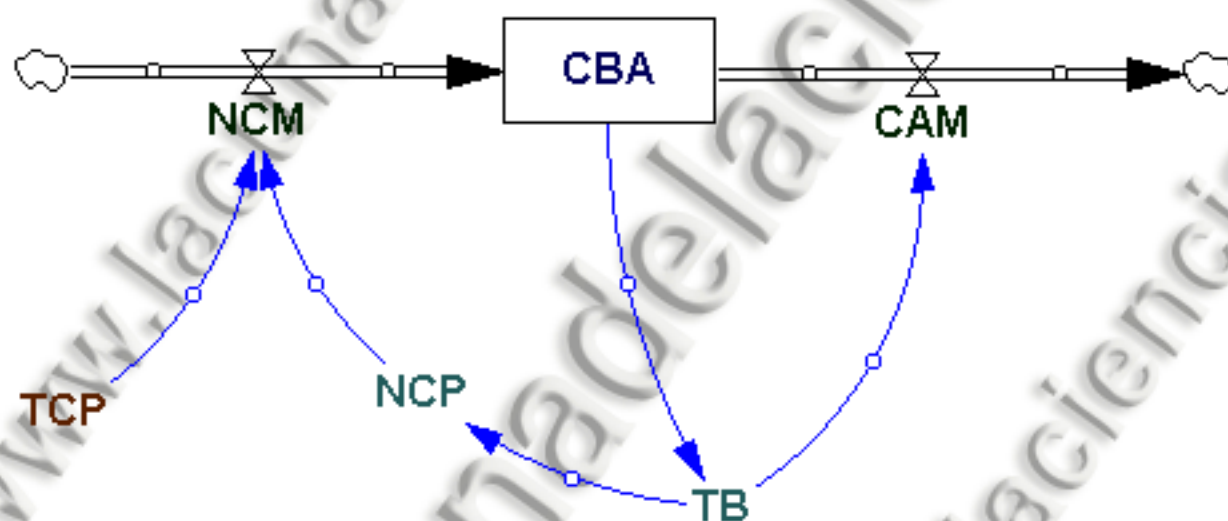
El sistema está regulado por dos bucles de realimentación negativa. Si el tiempo de búsqueda crece se aumentará el número de puestos de consulta, pero hasta un máximo de 6 que impide un crecimiento excesivo que daría lugar a un excesivo aumento en el tiempo de búsqueda.

Así mismo, el sistema dispone de un segundo bucle regulador: si el tiempo de búsqueda aumenta lo contrarresta poniendo más recursos a disposición de las consultas y por tanto atenderá más consultas por minuto.

CLASIFICACIÓN DE LAS VARIABLES Y UNIDADES:

- Variables de estado:
CBA: consultas
- Variables de flujo:
NCM: consultas / minuto
CAM: consultas / minuto
- Constantes:
TCP: consultas / minuto X puesto
- Variables auxiliares:
TB: minutos
NPC: puestos

DIAGRAMA DE FORRESTER:



ECUACIONES PARA LA SIMULACIÓN

- (1) $TB(t) = 0.25 + \frac{(CBA(t))^2}{2000}$
- (2) $CAM(t) = f(TB(t))$
- (3) $NPC(t) = g(TB(t))$
- (4) $NCM(t) = TCP \cdot NPC(t)$
- (5) $CBA(t + \Delta t) = CBA(t) + \Delta t \cdot (NCM(t) - CAM(t))$

b) Simulación

TCP = 10

CBA(0) = 0

$\Delta t = 0.75$ minutos

Tabla con valores sin aproximar.

t	CBA	NCM	CAM	TB	NPC
0	0	20	10	0.25	2
0.75	7.5	20	10	0.2781	2
1.5	15	20	10	0.3625	2
2.25	22.5	20	10.0625	0.5031	2
3	29.9531	20	13.972	0.6986	2
3.75	34.4741	20	16.884	0.8442	2
4.5	36.8111	20	18.55	0.9275	2
5.25	37.8986	20	19.362	0.9681	2
6	38.3771	20	19.728	0.9864	2
6.75	38.5811	20	19.886	0.9943	2
7.50	38.6951	20	19.9740	0.9987	2
8.25	38.7146	20	19.988	0.9994	2
9	38.7236	20	19.994	0.9997	2
9.75	38.7281	20	19.998	0.9999	2
10.5	38.7296	30	20	1	3
11.25	46.2296	30	26.372	1.3186	3
12	48.9506	30	28.962	1.4481	3
12.75	49.7291	30	29.73	1.4865	3
13.50	49.9316	30	29.932	1.4966	3
14.25	49.9826	30	29.982	1.4991	3
15	49.9961	30	29.996	1.4998	3
15.75	49.9991	30	29.998	1.4999	3
16.50	50.0006	30	30	1.5000	3
17.25	50.0006	30	30	1.5000	3

NOTA: Para las funciones no lineales:

- g es una función escalón. De 0 a 1 g vale 2, en 1 salta a 3, en 2 salta a 4...
- f es constante hasta 0.5, es decir que la función de 0 a 0.5 vale siempre 10. Como los tramos son rectos, de 0.5 a 2 debemos calcular la ecuación de la recta. Para ello usamos la ecuación de la recta que pasa por dos puntos:

$$\frac{TB - 0.5}{2 - 0.5} = \frac{CAM - 10}{40 - 10}$$

$$2TB - 1 = 0.1 CAM - 1$$

$$CAM = 2TB/0.1$$

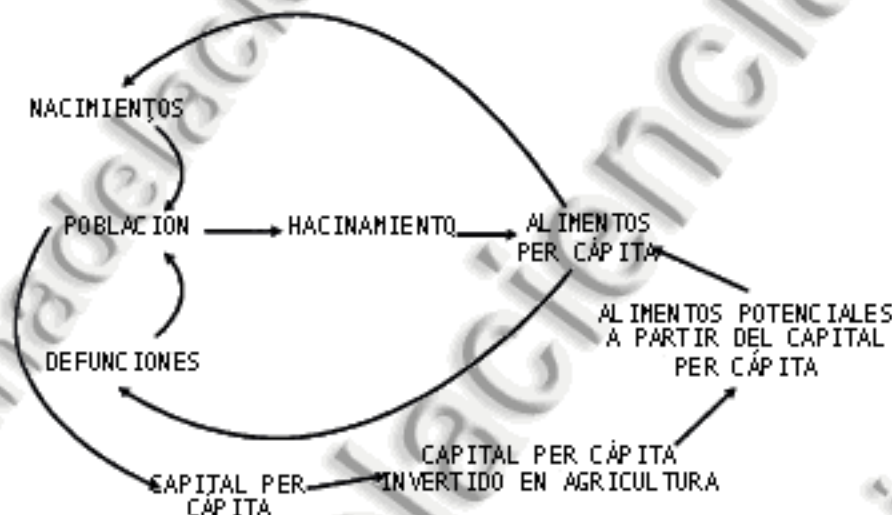
$$CAM = 20TB$$

Cuando $t = 16.50$ es cuando se alcanza la estabilidad.: las consultas a partir de aquí se mantienen a 50.

1. La figura muestra un diagrama de influencias simplificado del mecanismo que liga a la población con la alimentación. En este diagrama faltan por incluir los signos de todas las relaciones. Se pide:

a) Completar el diagrama, justificando de forma cualitativa cada uno de las relaciones y de sus signos.

b) Dibujar el diagrama de Forrester correspondiente, en el que se incluyan ciertos multiplicadores que no están explícitos en el diagrama causal. Acompañar dicho diagrama del correspondiente cuadro, diccionario de variables, especificando el significado y las unidades de cada variable.

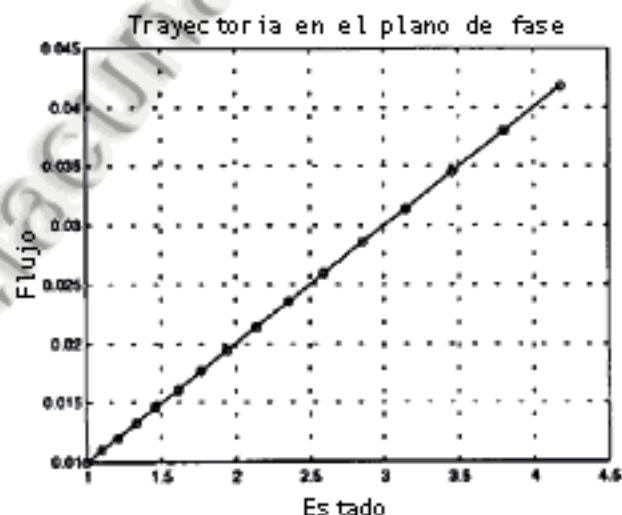
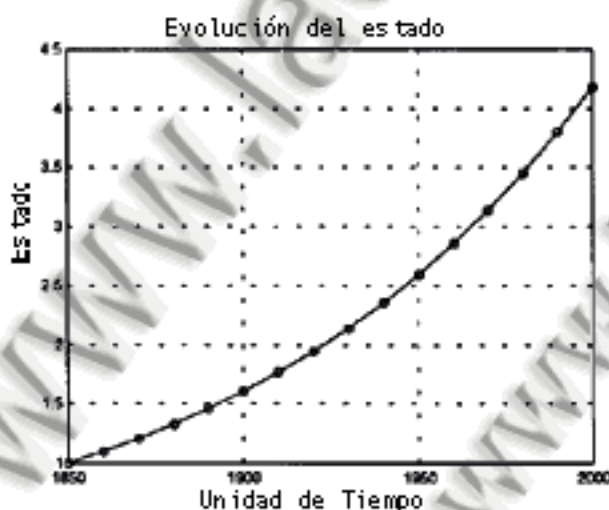


2. Las figuras muestran la evolución del estado y la trayectoria en el plano de fase de un bucle elemental de realimentación positiva. En ambas gráficas están indicados, mediante círculos, los valores de las variables en cada unidad de tiempo y se incluye con trazo continuo la unión de todos ellos.

a) Determinar sobre ambas gráficas o sobre la gráfica más adecuada:

- El valor de la tasa de crecimiento k .
- El tiempo de duplicación, expresado en unidades de tiempo.

b) Si lo que se quiere representar con este modelo es la evolución de la población mundial, ¿qué representa cada una de las variables en este caso particular? ¿cómo interpreta usted los resultados de la figura de la izquierda?



3. Se pretende estudiar, con un modelo y en simulación, el tiempo de búsqueda de un computador central, que almacena información sobre todos los libros de una biblioteca, y al que están conectados otros computadores que hacen de puntos de consulta. La dirección de la biblioteca utiliza el tiempo de búsqueda para decidir el número de puestos de consultas bibliográficas que va a haber en cada momento, entre un mínimo de 2 y un máximo de 6 puestos. Pero el computador central también está dotado de un sistema de decisión automática para que cuando el tiempo de búsqueda aumente trate de contrarrestarlo poniendo más recursos propios a disposición de las consultas, y por tanto atienda más consultas por minuto. El modelo está descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} (1) \quad TB(t) &= 0.25 + \frac{(CBA(t))^2}{2000} \\ (2) \quad CAM(t) &= f(TB(t)) \\ (3) \quad NPC(t) &= g(TB(t)) \\ (4) \quad NCM(t) &= TCP \cdot NPC(t) \\ (5) \quad \frac{dCBA(t)}{dt} &= NCM(t) - CAM(t) \end{aligned}$$

Siendo:

TB Tiempo de búsqueda en minutos, medido como el tiempo transcurrido desde que un puesto de consulta solicita información de un libro y ésta le es satisfecha

CAM consultas bibliográficas atendidas por minuto

NPC Número de puestos de consulta

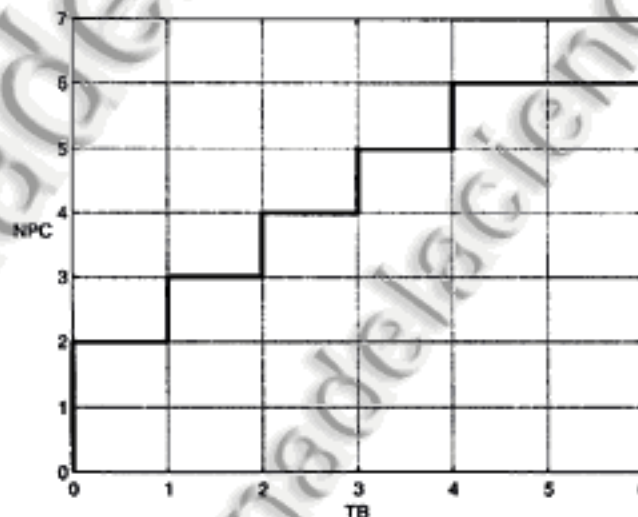
TCP Tasa de consultas por puesto.

NCM Numero de consultas bibliográficas por minuto

f y g son dos funciones no lineales (a tramos rectos) descritas respectivamente en la tabla y en la gráfica siguientes.

TB	CAM
0	10
0.5	10
2	40

Presentación tabulada de la función no lineal $CAM=f(TB)$

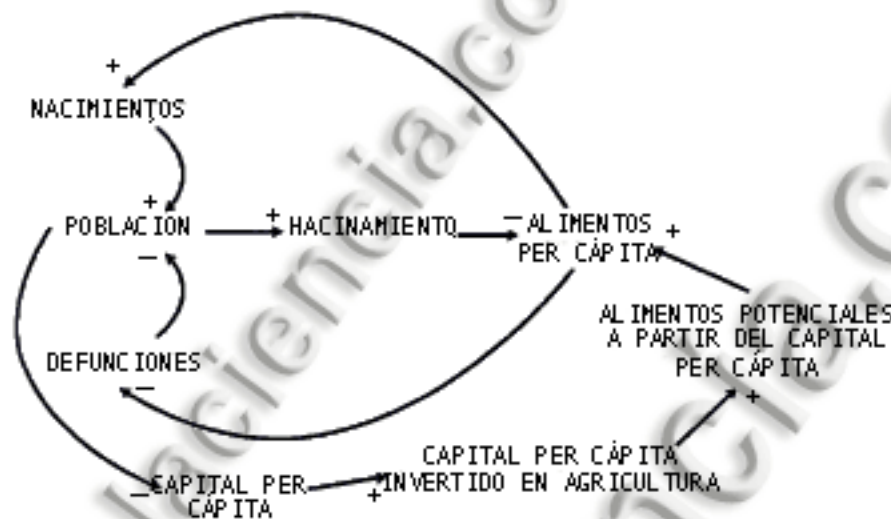


Representación gráfica de la función no lineal $NPC=g(TB)$

a) Dibujar el diagrama de influencias, razonando todas y cada una de las relaciones. Se recomienda ayudarse de las ecuaciones del modelo y de las formas de la tabla y de la gráfica, en lugar de hacerlo de forma intuitiva.

b) Iterar las veces que sean necesarias para medir el tiempo que tarda en estabilizarse el tiempo de búsqueda del computador central y el valor que alcanzan las consultas bibliográficas acumuladas en ese instante. Condiciones de la simulación:

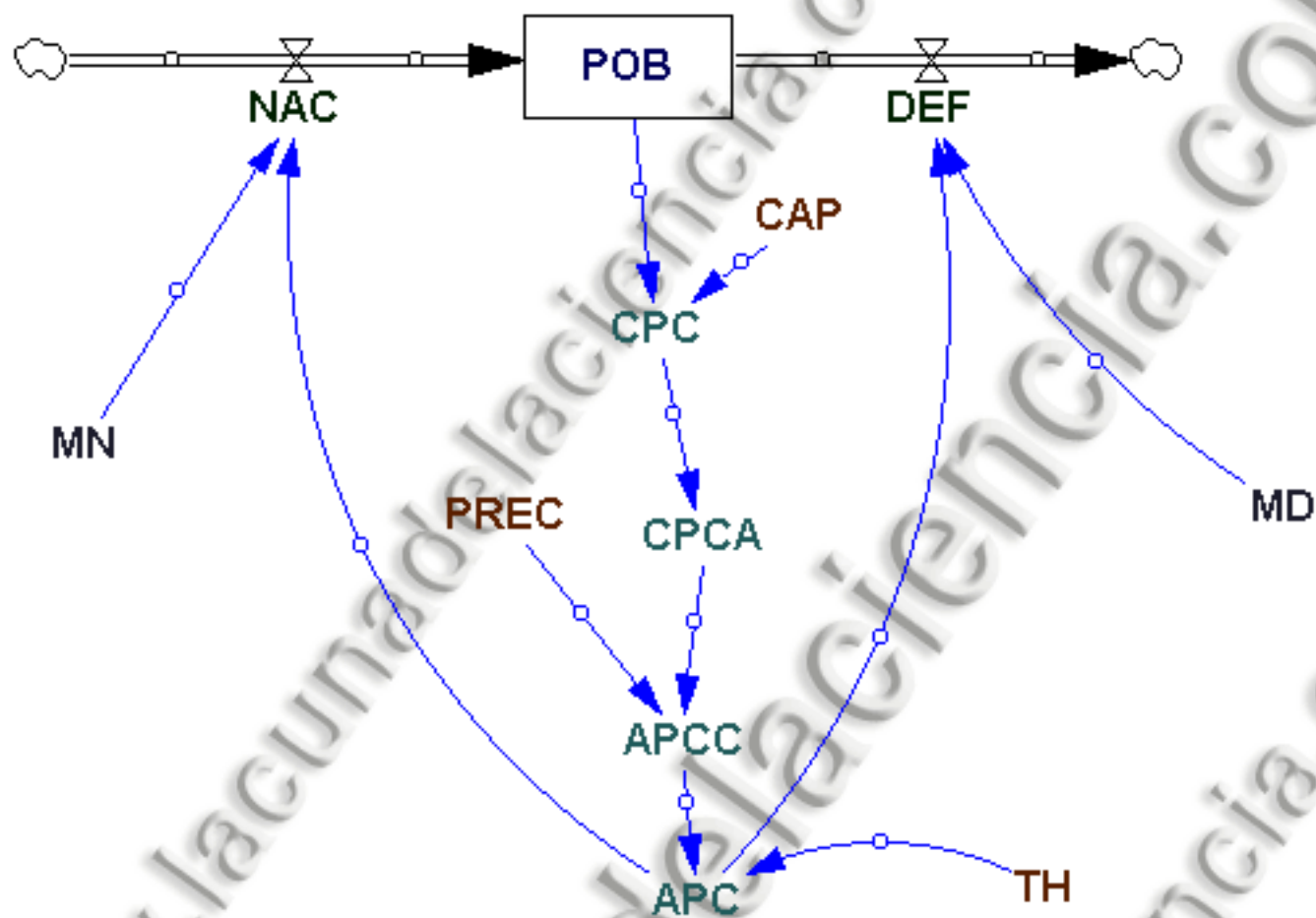
- Inicialmente no hay consultas bibliográficas acumuladas, $CBA(0) = 0$.
- La tasa de consultas por puesto vale 10.
- El intervalo de simulación Δt es de 0.75 minutos.



a) Bucle población/capital per cápita/alimentos per cápita/población (regulador).
Un aumento de población determina una disminución del capital per cápita (influencia negativa), con lo que disminuye el capital per cápita en la agricultura (influencia positiva a menor/mayor capital per cápita menor/mayor capital per cápita en la agricultura), decrecen los alimentos que se obtienen a partir del capital per cápita actuando sobre ellos con una influencia positiva (reduciéndolos). La disminución de los alimentos per cápita hace decrecer el nº de nacimientos (en realidad hace decrecer el multiplicador de nacimientos) y hace aumentar el nº de defunciones (multiplicador de defunciones). La disminución de nacimientos y aumento de las defunciones actúan sobre el nivel de población inicial.
Se puede hacer un razonamiento similar para una supuesta disminución de la población (aumento del capital per cápita aumento del capital per cápita en el agricultura, aumento de los alimentos, aumento en el nº de nacimientos y disminución del nº de defunciones).

El nivel de la población también actúa sobre los alimentos per cápita a través del hacinamiento. Un aumento de población determina un aumento en el hacinamiento (influencia positiva) lo que a su vez da lugar a una disminución de los alimentos per cápita (influencia negativa), actuando a través de esta influencia en los alimentos per cápita sobre el nivel de población.

DIAGRAMA DE FORRESTER



Población POB estado personas

Nacimientos NAC flujo personas/año

Defunciones DEF flujo personas/año

Multiplicador de nacimientos MN auxiliar función no lineal de Alimentos per

Cápita unidades personas² / alimentos

Multiplicador de defunciones MD auxiliar función no lineal de Alimentos per

Cápita unidades personas² / alimentos

Tasa de hacinamiento TH auxiliar adimensional

Capital CAP constante unidades de capital

Alimentos per Cápita APC auxiliar alimentos / persona año

Capital per cápita CPC auxiliar unidades de capital/persona

Capital per cápita invertido en la agricultura CPCA auxiliar unidades de

capital/persona

Alimentos potenciales a partir del capital per cápita APCC auxiliar unidades alimentos/persona-año

Precio de los alimentos PREC constante unidades de alimentos / capital año

a) La gráfica de la izquierda se ve como evoluciona el sistema, el estado parte de un valor $x(0)=1$ y crece exponencialmente con el tiempo, con un comportamiento autorreforzado, corresponde a bucle de realimentación positiva (bucle reforzador) y que actúa acelerando o bien el crecimiento o el declive.

En la gráfica de la derecha, que liga el flujo (F) con el nivel x , puede observarse que el flujo es una función lineal creciente del estado x , por tanto se puede utilizar para determinar el valor de fracción por unidad de tiempo k (tasa de crecimiento), como la pendiente de dicha recta.

$$k = \frac{0,042 - 0,01}{4,2 - 1} = 0,01$$

El tiempo de duplicación (t_d) corresponde al tiempo que tarda en duplicarse el valor inicial del nivel
 $x(t_d) = 2 x(0)$

$$t_d = \frac{\ln 2}{k} = \frac{0,7}{0,01} = 70 \text{ unidades de tiempo (años)}$$

b) En la gráfica de la izquierda está representada la evolución de la población a lo largo del tiempo, con un crecimiento exponencial: el nivel de población mundial crece $0,01 x$ por unidad de tiempo (1% anual).

En cuanto al t_d (tiempo de duplicación), se refiere al momento en el que el nivel de población alcanza el valor 2, es decir, duplica su valor inicial $x(0)=1$, y que como hemos calculado ha tenido lugar al cabo de 70 unidades de tiempo ($1850 + 70 = 1912$), es decir en el año 1912 el valor de la población mundial (personas) se duplicó con respecto a su valor en el año 1850 (pasó de 1 a 2).

Modelo búsqueda en computador central.

DEFINICIÓN DE VARIABLES:

TB Tiempo de búsqueda en minutos, medido como el tiempo transcurrido desde que un puesto de consulta solicita información de un libro y ésta le es satisfecha

CAM consultas bibliográficas atendidas por minuto

CBA Consultas bibliográficas acumuladas

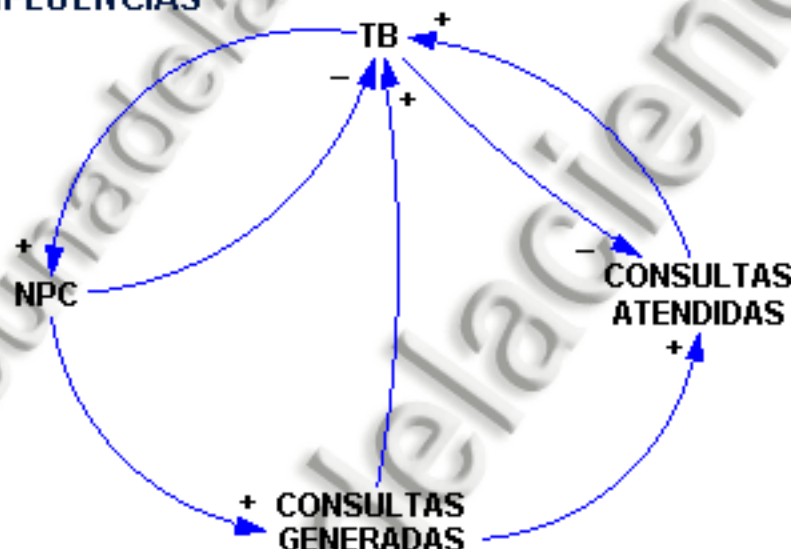
NPC Número de puestos de consulta

TCP Tasa de consultas por puesto.

NCM Numero de consultas bibliográficas por minuto

f y g son dos funciones no lineales (a tramos rectos) descritas respectivamente en la tabla y en la gráfica siguientes.

DIAGRAMA DE INFLUENCIAS



a) Justificación.

El tiempo de búsqueda determina el flujo de consultas. A mayor tiempo de respuesta en la búsqueda se aumenta el número de puestos de consultas que hace aumentar el número de consultas generadas repercutiendo de nuevo en un aumento en el tiempo de búsqueda. Se trata de un comportamiento típico de un bucle de realimentación positiva, crecimiento exponencial.

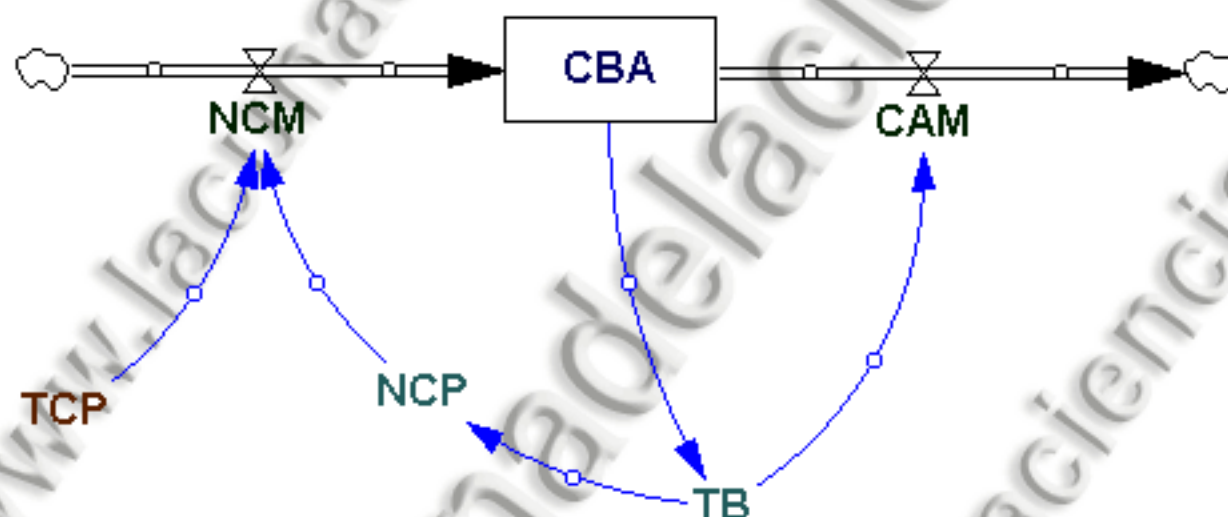
El sistema está regulado por dos bucles de realimentación negativa. Si el tiempo de búsqueda crece se aumentará el número de puestos de consulta, pero hasta un máximo de 6 que impide un crecimiento excesivo que daría lugar a un excesivo aumento en el tiempo de búsqueda.

Así mismo, el sistema dispone de un segundo bucle regulador: si el tiempo de búsqueda aumenta lo contrarresta poniendo más recursos a disposición de las consultas y por tanto atenderá más consultas por minuto.

CLASIFICACIÓN DE LAS VARIABLES Y UNIDADES:

- Variables de estado:
CBA: consultas
- Variables de flujo:
NCM: consultas / minuto
CAM: consultas / minuto
- Constantes:
TCP: consultas / minuto X puesto
- Variables auxiliares:
TB: minutos
NPC: puestos

DIAGRAMA DE FORRESTER:



ECUACIONES PARA LA SIMULACIÓN

- (1) $TB(t) = 0.25 + \frac{(CBA(t))^2}{2000}$
- (2) $CAM(t) = f(TB(t))$
- (3) $NPC(t) = g(TB(t))$
- (4) $NCM(t) = TCP \cdot NPC(t)$
- (5) $CBA(t + \Delta t) = CBA(t) + \Delta t \cdot (NCM(t) - CAM(t))$

b) Simulación

TCP = 10

CBA(0) = 0

 $\Delta t = 0.75$ minutos

Tabla con valores sin aproximar.

t	CBA	NCM	CAM	TB	NPC
0	0	20	10	0.25	2
0.75	7.5	20	10	0.2781	2
1.5	15	20	10	0.3625	2
2.25	22.5	20	10.0625	0.5031	2
3	29.9531	20	13.972	0.6986	2
3.75	34.4741	20	16.884	0.8442	2
4.5	36.8111	20	18.55	0.9275	2
5.25	37.8986	20	19.362	0.9681	2
6	38.3771	20	19.728	0.9864	2
6.75	38.5811	20	19.886	0.9943	2
7.50	38.6951	20	19.9740	0.9987	2
8.25	38.7146	20	19.988	0.9994	2
9	38.7236	20	19.994	0.9997	2
9.75	38.7281	20	19.998	0.9999	2
10.5	38.7296	30	20	1	3
11.25	46.2296	30	26.372	1.3186	3
12	48.9506	30	28.962	1.4481	3
12.75	49.7291	30	29.73	1.4865	3
13.50	49.9316	30	29.932	1.4966	3
14.25	49.9826	30	29.982	1.4991	3
15	49.9961	30	29.996	1.4998	3
15.75	49.9991	30	29.998	1.4999	3
16.50	50.0006	30	30	1.5000	3
17.25	50.0006	30	30	1.5000	3

NOTA: Para las funciones no lineales:

- g es una función escalón. De 0 a 1 g vale 2, en 1 salta a 3, en 2 salta a 4...
- f es constante hasta 0.5, es decir que la función de 0 a 0.5 vale siempre 10. Como los tramos son rectos, de 0.5 a 2 debemos calcular la ecuación de la recta. Para ello usamos la ecuación de la recta que pasa por dos puntos:

$$\frac{TB - 0.5}{2 - 0.5} = \frac{CAM - 10}{40 - 10}$$

$$2TB - 1 = 0.1 CAM - 1$$

$$CAM = 2 TB / 0.1$$

$$CAM = 20 TB$$

Cuando $t = 16.50$ es cuando se alcanza la estabilidad: las consultas a partir de aquí se mantienen a 50.

1. La siguiente ecuación diferencial describe la dinámica de la temperatura $T_{INT}(t)$ en el interior de una casa que alberga una masa de aire M con calor específico CE prácticamente constante. La casa posee un sistema de climatización con una potencia variable $PC(t)$ que se emplea en aumentar o disminuir la temperatura interior y en vencer las pérdidas debidas a que el aislamiento térmico de la casa no es perfecto. Estas pérdidas son directamente proporcionales a la diferencia con la temperatura exterior $T_{EXT}(t)$ e inversamente proporcionales a la resistencia térmica RT de la casa.

$$\frac{dT_{INT}(t)}{dt} = \frac{1}{M CE} PC(t) - \frac{1}{M CE RT} (T_{INT}(t) - T_{EXT}(t))$$

a) Dibujar el correspondiente diagrama de influencias, justificando los tipos de relaciones entre las tres variables fundamentales y los tres parámetros.

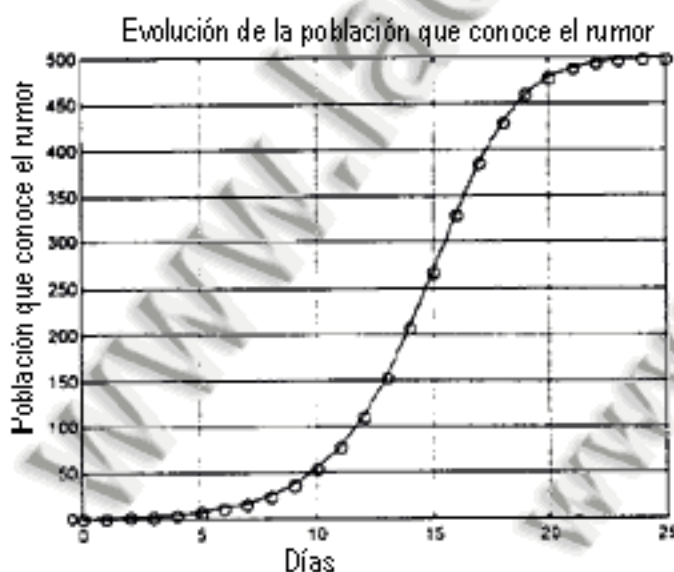
b) Completar el diagrama anterior con un sistema automático de calefacción; éste debe ser capaz de llevar y mantener la temperatura en el interior de la casa a un valor deseado $TD(t)$ por encima de la temperatura exterior.

c) Combinar en el diagrama anterior un sistema de aire acondicionado que sea capaz de llevar y mantener la temperatura interior a un valor por debajo de la temperatura exterior. Añadir nuevas variables si es necesario.

2. En la figura de la izquierda se muestra el comportamiento temporal de la variable de estado (Población que conoce un rumor) en el modelo de difusión de un cierto rumor en una población finita. Y en la figura de la derecha se muestra la correspondiente trayectoria en el plano de fase.

a) ¿A qué arquetipo de los estudiados corresponde el comportamiento de la variable de estado? Razonar si la trayectoria en el plano de fase dada se corresponde con el comportamiento representado.

b) Establecer el conjunto de ecuaciones que pueden representar a este modelo. Especificando el significado y las unidades de cada variable.



3. Modelo "Propagación de un incendio".

Se pretende estudiar, con un modelo, el número de árboles que se queman en la propagación de un incendio forestal. En el modelo se han hecho las siguientes hipótesis:

- Se distinguen tres tipos de árboles: árboles sin quemar (ASQ), árboles en llamas (ALL) y árboles quemados (AQ).
- El fuego se propaga por la acción del viento con un factor (FPF) que, para simplificar la simulación, se considerará constante.
- El número de bomberos (NB) disponibles para controlar el fuego depende del instante en el que se encuentre el incendio pero no de la evolución de éste. Vea la planificación temporal del número de bomberos representada en la figura.

Las ecuaciones que definen el modelo son las siguientes:

$$(1) \text{ALLV}(t) = \min(\text{ASQ}(t), \text{FPF ASQ}(t) \text{ALL}(t))$$

$$(2) \text{ALLQ}(t) = \text{FAQ ALL}(t)$$

$$(3) \text{AAB}(t) = \min(\text{ALL}(t), \text{NB}(t) \text{CAP})$$

$$(4) \frac{d \text{ALL}(t)}{dt} = \text{ALLV}(t) - \text{AAB}(t) - \text{ALLQ}(t)$$

$$(5) \frac{d \text{AQ}(t)}{dt} = \text{ALLQ}(t)$$

$$(6) \frac{d \text{ASQ}(t)}{dt} = \text{AAB}(t) - \text{ALLV}(t)$$

$$(7) \text{NB}(t) = f(t)$$

Siendo:

ASQ, árboles sin quemar

ALL, árboles en llamas

AQ, árboles quemados

ALLV, árboles que pasan a llamas por la acción del viento

ALLQ, árboles que estando en llamas se queman

AAB, árboles apagados por la acción de los bomberos

FAQ, fracción de árboles que se queman a la hora

NB, número de bomberos

CAP, capacidad del bombero (número de árboles que puede apagar un bombero a la hora)

FPF, factor de propagación del fuego (debido al viento).

Se pide:

a) Hacer una clasificación razonada de las variables que describen el modelo, especificando las unidades de cada una de ellas, y dibujar el correspondiente diagrama de Forrester. Se recomienda ayudarse de las ecuaciones del modelo.

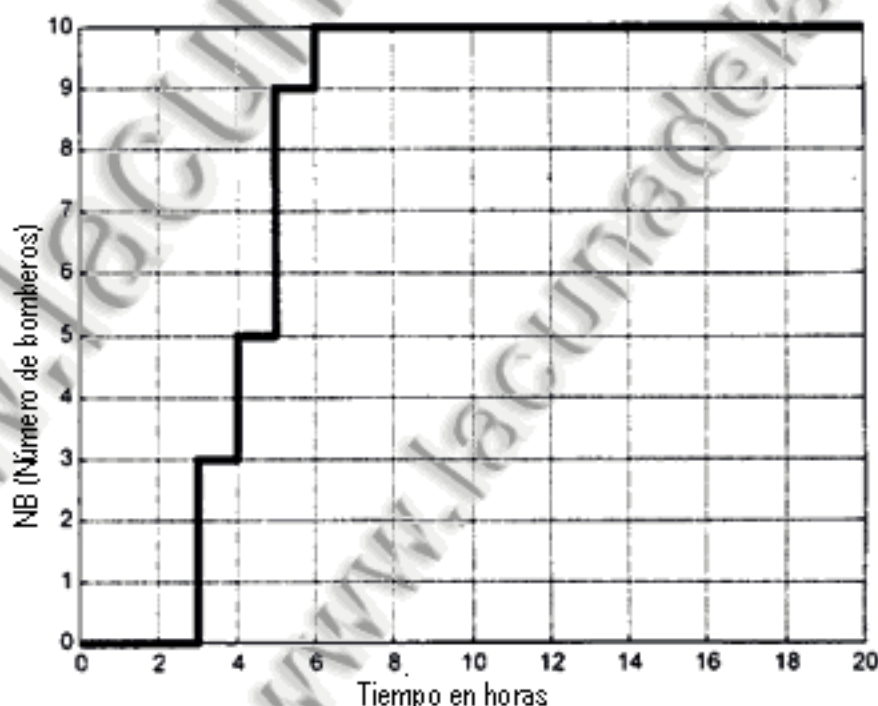
b) Calcular, iterando las veces que sea necesario, el instante de tiempo en el que se extinguirá el fuego. Determinar en dicho instante cuántos árboles del bosque se han quemado.

Las condiciones de simulación son:

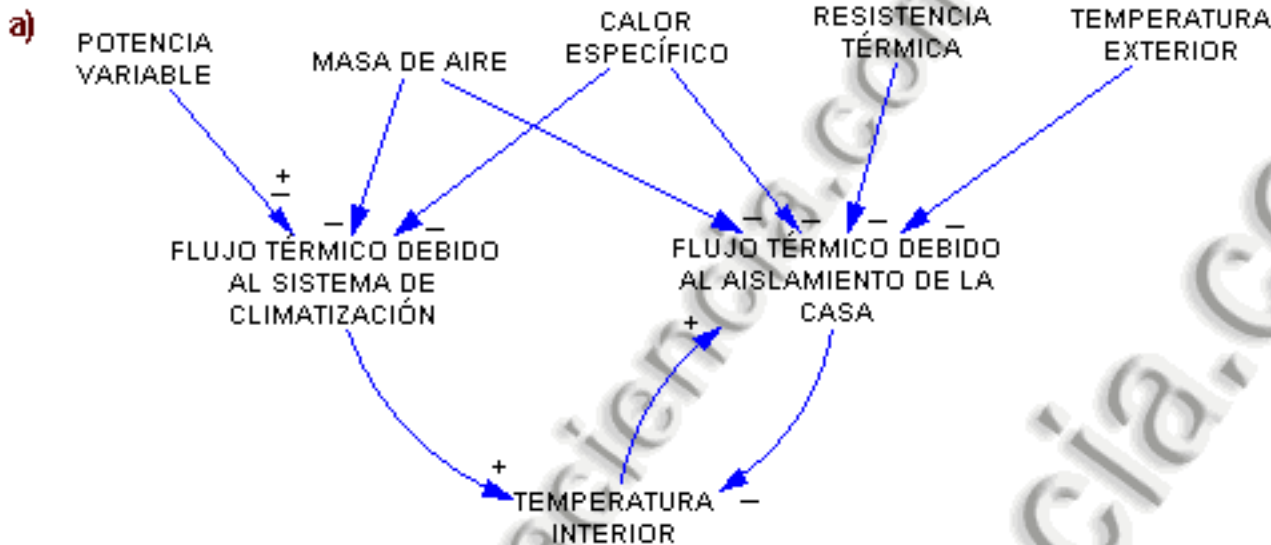
- Inicialmente hay 500 árboles sin quemar, 5 árboles en llama y ningún árbol quemado.
- El factor de propagación del fuego debido al viento vale 0.004.
- La fracción de árboles que se queman a la hora vale 0.3.
- La capacidad de un bombero es de 10 árboles a la hora.
- Se utiliza la aproximación de Euler con $\Delta t = 1$ hora.
- Se consideran números enteros de árboles en todas las variables, redondeando al entero menor cuando sea necesario.

c) En las mismas condiciones de simulación del apartado anterior, ¿Cuál sería el número de bomberos mínimo necesario para extinguir el fuego durante la tercera hora del incendio?

d) En las mismas condiciones de simulación del apartado (b), ¿qué cambio debería experimentar el factor de propagación del fuego justo en el instante en el que llegan los primeros bomberos para que no queden árboles sin quemar?

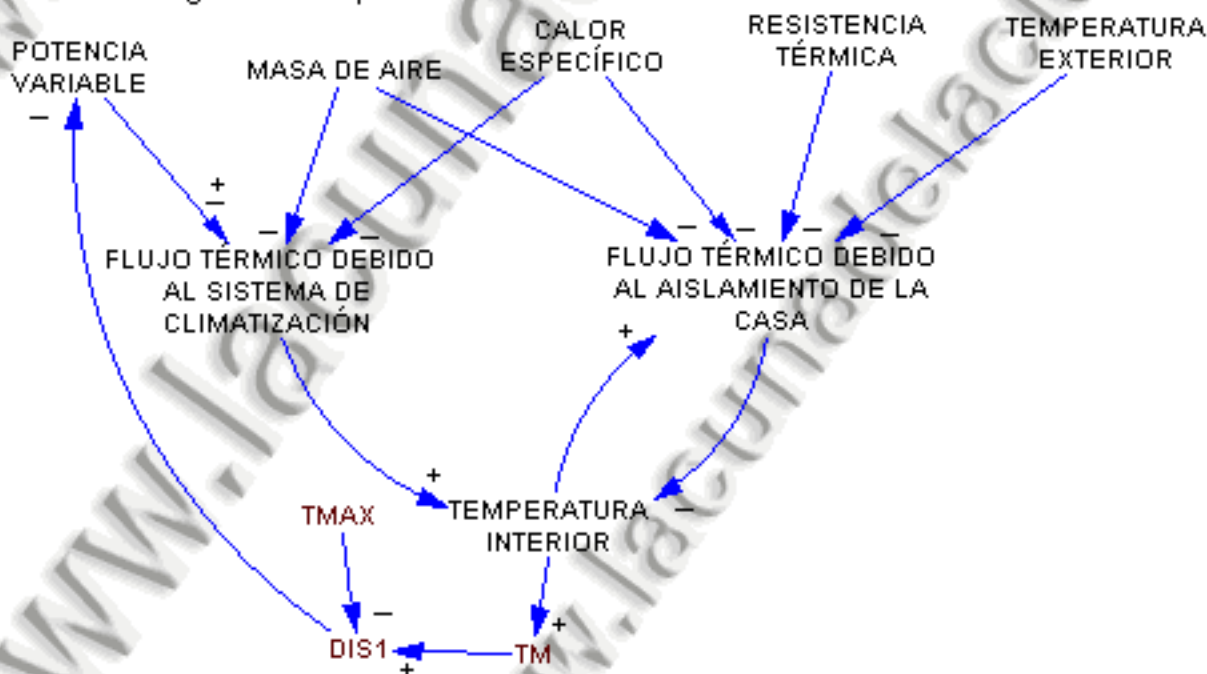


Planificación temporal del número de bomberos $\text{NB}(t) = f(t)$

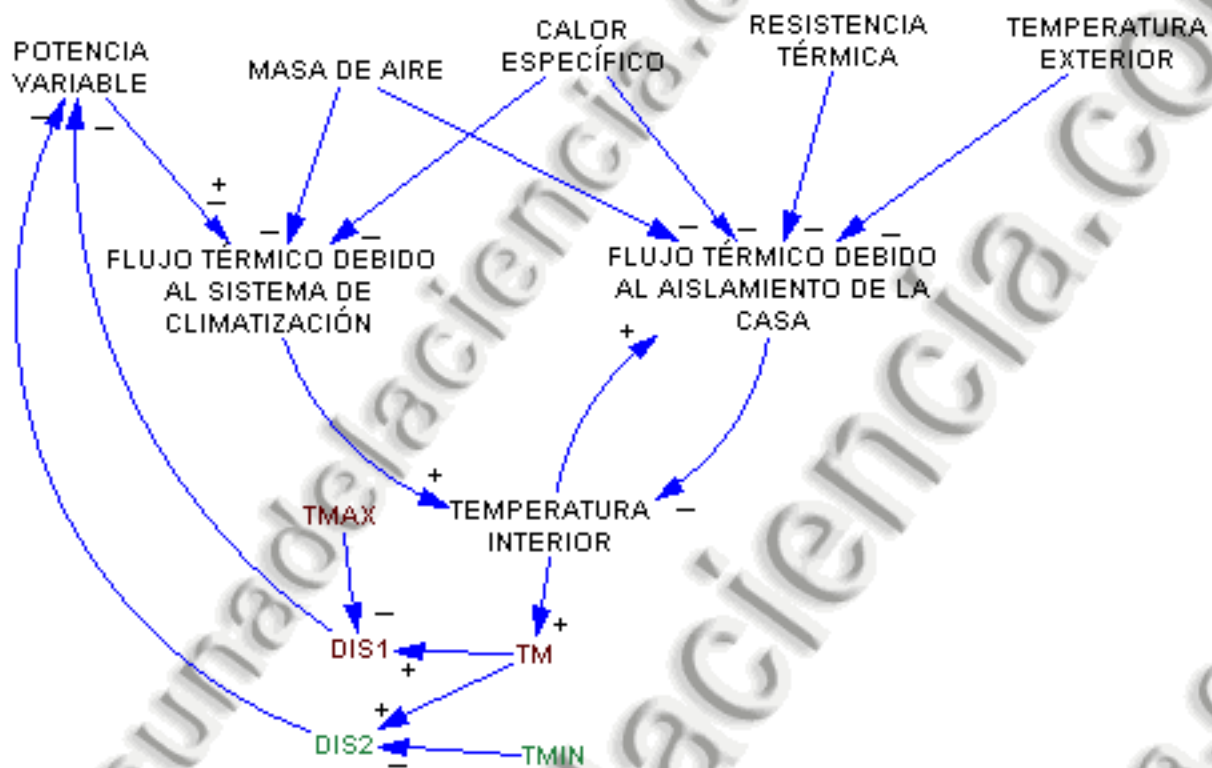


- La potencia variable puede influir positiva o negativamente en el flujo térmico de climatización debido a que puede elevar la temperatura o disminuirla según la potencia.
- La masa de aire influye negativamente en ambos flujos ya que cuanto más masa de aire tengamos menores serán los flujos.
- El calor específico también influye negativamente en los flujos por el mismo motivo.
- La resistencia térmica y la temperatura exterior también influyen negativamente en el flujo de aislamiento, ya que a mayor resistencia térmica o temperatura exterior menor flujo.
- El flujo de climatización influye en la temperatura interior aumentándola.
- El flujo de aislamiento influye en la temperatura interior disminuyéndola.
- La temperatura interior, a su vez influye en el flujo de aislamiento aumentándolo.

b) Introducimos la variable discrepancia (DIS1) que haremos corresponder a la diferencia entre la temperatura interior medida (TM) y la temperatura mínima (TMIN) y que influirá negativamente regulando la potencia variable.



c) Introducimos la variable discrepancia (DIS2) que haremos corresponder a la diferencia entre la temperatura interior medida (TM) y la temperatura mínima (TMIN) y que influirá positivamente regulando la potencia variable.



a) Al arquetipo de crecimiento sigmoidal.

Variables:

P Población total; parámetro; personas

PR Población que conoce el rumor; estado; personas

PNR Población que no conoce el rumor; variable auxiliar; personas

FD Flujo de difusión; flujo; personas/día

PDD Porcentaje de difusión diario; parámetro

CDD Contactos de difusiones que se producen por día; parámetro

$$\frac{d(PR)}{dt} = FD(t)$$

$$PNR(t) = P - PR(t)$$

$$FD(t) = CDD \cdot PDD \cdot PR(t) \cdot PNR(t)$$

Explicación al cálculo del flujo de difusión: el producto $PR \cdot PNR$ determina el nº total de posibles contactos entre la población que conoce el rumor y la que no la conoce, de todos ellos sólo un tanto por ciento son reales (PDD), de los cuales sólo una fracción producen realmente la difusión del rumor.

b) $P = 100$; $PR(0) = 20$

ut: días

intervalo de simulación: 1 día

Observemos las gráficas. Por ejemplo un instante $t=0$;

$$PR = 20; PNR = 100 - 20 = 80$$

$$FD = PDD \cdot CDD \cdot PR \cdot PNR = PDD \cdot CDD \cdot 20 \cdot 80 = 8$$

$$\text{Despejamos el producto } PDD \cdot CDD = 8/1600 = 0,005$$

Por tanto si fijamos por ejemplo $PDD = 0,02$ y $CDD = 0,25$ serían parámetros válidos que definirían el presente modelo.

Modelo propagación de un incendio.

a) Justificación.

- (1) Los árboles que pasan a llamas por la acción del viento son el menor número de entre los árboles que quedan sin quemar y el número de árboles a que se propaga el incendio (en función de los que están en llamas y los que quedan sin quemar).
- (2) Los árboles que estando en llamas se queman es una porción de los que están en llamas.
- (3) El número de árboles apagados por la acción de los bomberos será el número de árboles que pueden apagar los bomberos existentes, o si el número de árboles es menor que el número de ellos que pueden apagar, entonces el número de árboles apagados coincidirá con el número de árboles en llamas.
- (4) El número de árboles en llamas se incrementará con el número de árboles que pasa a llamas por la acción del viento y disminuirá con los árboles apagados por la acción de los bomberos y los árboles que se queman.
- (5) El número de árboles quemados aumentará con los árboles en llamas que se queman.
- (6) El número de árboles sin quemar aumentará con los árboles apagados por los bomberos y disminuirá por los árboles que pasan a llamas.
- (7) El número de bomberos depende del instante en que se inicie el incendio según la gráfica que da el enunciado.

DEFINICIÓN DE VARIABLES:

ASQ, árboles sin quemar

ALL, árboles en llamas

AQ, árboles quemados

ALLV, árboles que pasan a llamas por la acción del viento

ALLQ, árboles que estando en llamas se queman

AAB, árboles apagados por la acción de los bomberos

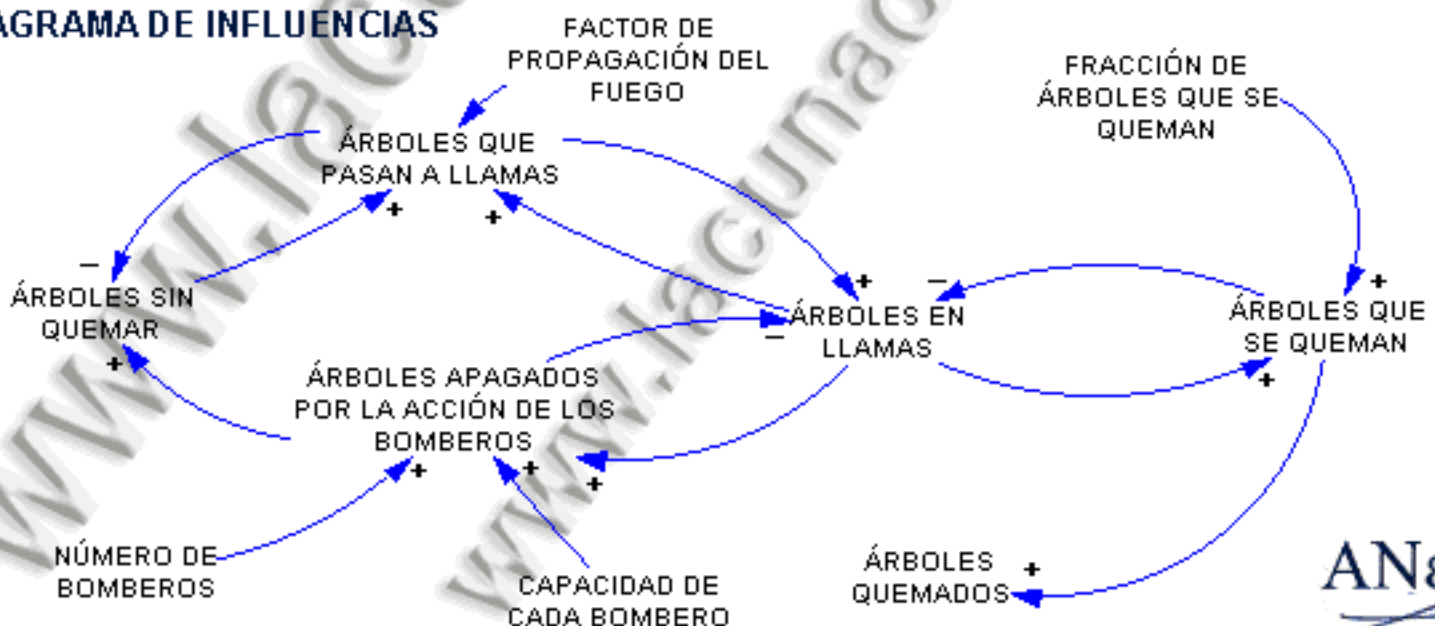
FAQ, fracción de árboles que se queman a la hora

NB, número de bomberos

CAP, capacidad del bombero (número de árboles que puede apagar un bombero a la hora)

FPF, factor de propagación del fuego (debido al viento).

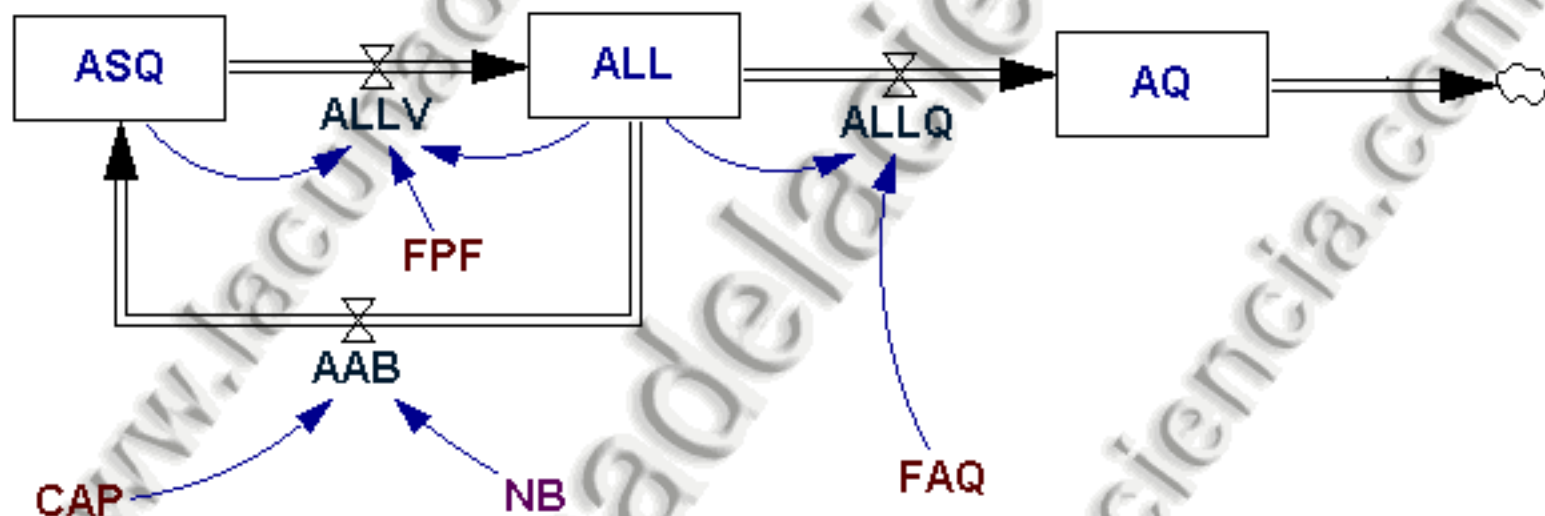
DIAGRAMA DE INFLUENCIAS



CLASIFICACIÓN DE LAS VARIABLES Y UNIDADES:

- Variables de estado:
AQ: árboles
ALL: árboles
ASQ: árboles
- Variables de flujo:
ALLV: árboles/hora
ALLQ: árboles/hora
AAB: árboles/hora
- Constantes:
FPF: árboles⁻¹
FAQ: hora⁻¹
CAP: árboles/bombero
- Variables auxiliares:
NB: bomberos

DIAGRAMA DE FORRESTER:



ECUACIONES PARA LA SIMULACIÓN

- (1) $ALLV(t) = \min(ASQ(t), FPF \cdot ASQ(t) \cdot ALL(t))$
- (2) $ALLQ(t) = FAQ \cdot ALL(t)$
- (3) $AAB(t) = \min(ALL(t), NB(t) \cdot CAP)$
- (4) $ALL(t + \Delta t) = ALL(t) + \Delta t \cdot [ALLV(t) - AAB(t) - ALLQ(t)]$
- (5) $AQ(t + \Delta t) = AQ(t) + \Delta t \cdot ALLQ(t)$
- (6) $ASQ(t + \Delta t) = ASQ(t) + \Delta t \cdot [AAB(t) - ALLV(t)]$
- (7) NB(t) la obtenemos de la gráfica que nos da el enunciado

b) Simulación

FPF = 0.004 FAQ = 0.3 CAP = 10
ASQ(0) = 500 ALL(0) = 5 AQ(0) = 0

$\Delta t = 1$ hora

Tabla con valores aproximados al entero menor para el número de árboles después de cada iteración.

t	ALL	AQ	ASQ	NB	ALLV	ALLQ	AAB
0	5	0	500	0	10	1	0
1	14	1	490	0	27	4	0
2	37	5	463	0	68	11	0
3	94	16	395	3	148	28	30
4	184	44	277	5	203	55	50
5	282	99	124	9	124	84	90
6	232	183	90	10	83	69	100
7	146	252	107	10	62	43	100
8	65	295	145	10	37	19	65
9	18	314	173	10	12	5	18
10	7	319	179	10	5	2	7
11	3	321	181	10	2	0	3
12	2	321	182	10	1	0	2
13	1	321	183	10	0	0	1
14	0	321	184				

El incendio se extingue a las 14 horas con 321 árboles quemados.

c) Para extinguir el incendio durante la tercera hora $ALL(3) = 0$

$$ALL(3) = ALL(2) + \Delta t \cdot [ALLV(2) - AAB(2) - ALLQ(2)]$$

$$ALL(2) = 37$$

$$\Delta t = 1$$

$$ALLV(2) = \min(ASQ(2), FPF \cdot ASQ(2) \cdot ALL(2)) = 68$$

$$ALLQ(2) = FAQ \cdot ALL(2) = 0.3 \cdot 37 = 11$$

$$AAB(2) = \min(ALL(2), NB(2) \cdot CAP)$$

Se supone que los árboles en llamas no se están acabando: $AAB(2) = NB \cdot 10$

Sustituyendo y despejando:

$$0 = 37 + 1 [68 - 10 NB - 11]$$

$$0 = 68 + 57 - 10NB$$

$$125 = 10 NB$$

$$NB = 12.5$$

El número mínimo de bomberos necesario para extinguir el incendio en la tercera hora es 13

d) Para que no haya árboles sin quemar cuando llegan los primeros bomberos: $ASQ(3) = 0$

$$ASQ(3) = ASQ(2) + \Delta t \cdot [AAB(2) - ALLV(2)]$$

$$ASQ(2) = 463$$

$$\Delta t = 1$$

$$AAB(2) = \min(ALL(2), NB(2) \cdot CAP) = 0$$

$$ALLV(2) = \min(ASQ(2), FPF \cdot ASQ(2) \cdot ALL(2))$$

Se supone que todavía hay árboles sin quemar así que: $ALLV(2) =$

$$FPF \cdot ASQ(2) \cdot ALL(2) = 463 \cdot 37 \cdot FPF$$

Sustituyendo y despejando:

$$0 = 463 + 1 [0 - FPF \cdot 463 \cdot 37]$$

$$463 = FPF \cdot 463 \cdot 37$$

$$FPF = 1/37 = 0.027$$

El cambio que sufre FPF en la tercera hora será:

$$\Delta FPF = 0.027 - 0.004 = 0.023$$

1. La siguiente figura muestra un diagrama de influencias simplificado para estudiar la evolución de una población de ciervos. En este diagrama se ha supuesto que la regeneración de recursos naturales se obtiene multiplicando los recursos existentes por una tasa de regeneración. Se pide:

- Completar el diagrama de influencias justificando de forma cualitativa cada una de las relaciones y los signos.
- Ampliar el diagrama con un bucle que considere la variación de la población de ciervos como consecuencia de la "Caza furtiva". Incluya en este bucle todas las variables y relaciones que considere necesarias con la hipótesis de que la caza de ciervos tiene sólo un fin comercial para la población humana y por tanto está sujeta a las reglas de mercado (oferta, demanda).

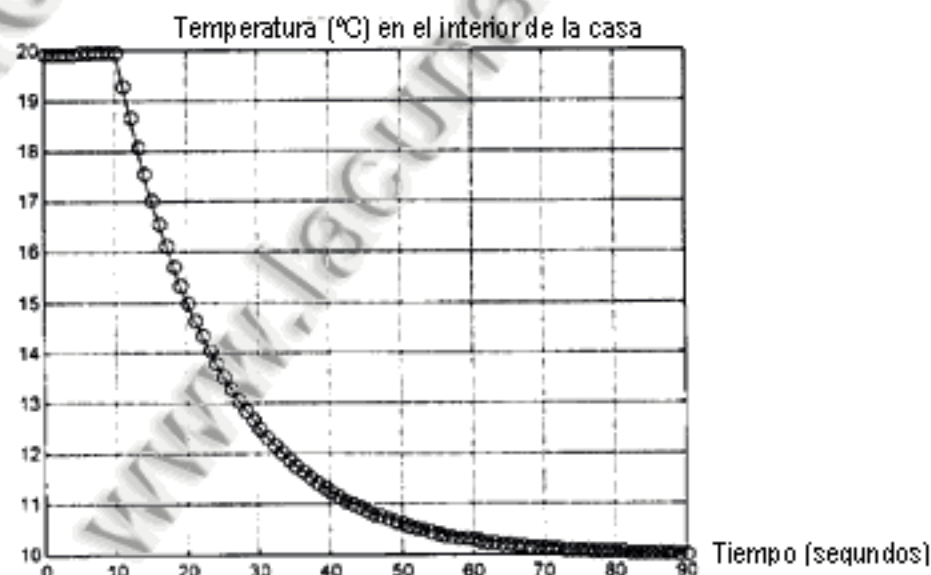


2. La siguiente ecuación diferencial describe la dinámica de la temperatura $TINT(t)$ en el interior de una casa que alberga una masa de aire M con calor específico CE prácticamente constante. La casa posee un sistema de climatización con una potencia variable $PC(t)$ que se emplea en aumentar o disminuir la temperatura interior y en vencer las pérdidas debidas a que el aislamiento térmico de la casa no es perfecto. Estas pérdidas son directamente proporcionales a la diferencia con la temperatura exterior $TEXT(t)$ e inversamente proporcionales a la resistencia térmica RT de la casa.

$$\frac{dTINT(t)}{dt} = \frac{1}{M \cdot CE} PC(t) - \frac{1}{M \cdot CE \cdot RT} (TINT(t) - TEXT(t))$$

En la figura se muestra el comportamiento temporal que experimentó la temperatura interior cuando el sistema de calefacción pasó de estar generando un valor de 1000 W a estar apagado en el instante $t = 10$ s.

- Sabiendo que la temperatura exterior permaneció constante durante todo el tiempo que se estuvo midiendo la temperatura interior, ¿cuál fue su valor? Para contestar a esta pregunta no necesita hacer ningún tipo de cálculo, utilice la información gráfica.
- Utilizar el resultado del apartado (a), la ecuación diferencial y la información gráfica durante el tiempo que la calefacción permaneció encendida para determinar el valor de RT .
- Utilizar el resultado del apartado (b), la ecuación diferencial y la información gráfica durante el tiempo que la calefacción estuvo apagada para determinar el producto $M \cdot CE$.



3. Modelo "Virus informático".

Se pretende estudiar el efecto que un determinado virus informático puede producir en un servidor de correos electrónicos. Para ello se ha construido un modelo dinámico, descrito por las siguientes cinco ecuaciones:

$$(1) \frac{d \text{CPE}(t)}{dt} = \text{CGU} - \text{CE}(t)$$

$$(2) \text{CE}(t) = \min(\text{CPE}(t), \text{CEC}(t))$$

$$(3) \text{CC}(t) = \text{VA} \cdot \text{PCC} \cdot \text{CE}(t)$$

$$(4) \text{CD}(t) = \text{FPC} \cdot \text{delay}(\text{CC}(t), 2)$$

$$(5) \frac{d \text{CEC}(t)}{dt} = - \text{DC}(t)$$

Siendo:

CPE, los correos pendientes por enviar

CGU, una estimación del número de correos que generan diariamente los usuarios del servidor

CE, los correos enviados diariamente por el servidor

CEC, la capacidad para enviar correos que tiene el servidor

CC, los correos que generan otros servidores en contestación a correos infectados por virus

VA, una variable auxiliar con valor igual a 0 cuando el virus está inactivo y 1 cuando el virus está activo

PCC, el porcentaje de correos infectados que son contestados por otros servidores

CD, la disminución de capacidad para enviar correos

FPC, el factor de pérdida de capacidad en función de los correos infectados

En este modelo se ha supuesto: 1º) que el servidor tiene una capacidad limitada para enviar correos y que esta capacidad disminuye progresivamente cuando se reciben contestaciones a los correos infectados por el virus, 2º) que todos los correos que se envían desde el servidor están infectados desde el momento que se activa el virus, pero que sólo un porcentaje de éstos recibe contestación, y 3º) que la contestación tarda aproximadamente dos días en llegar.

Se pide:

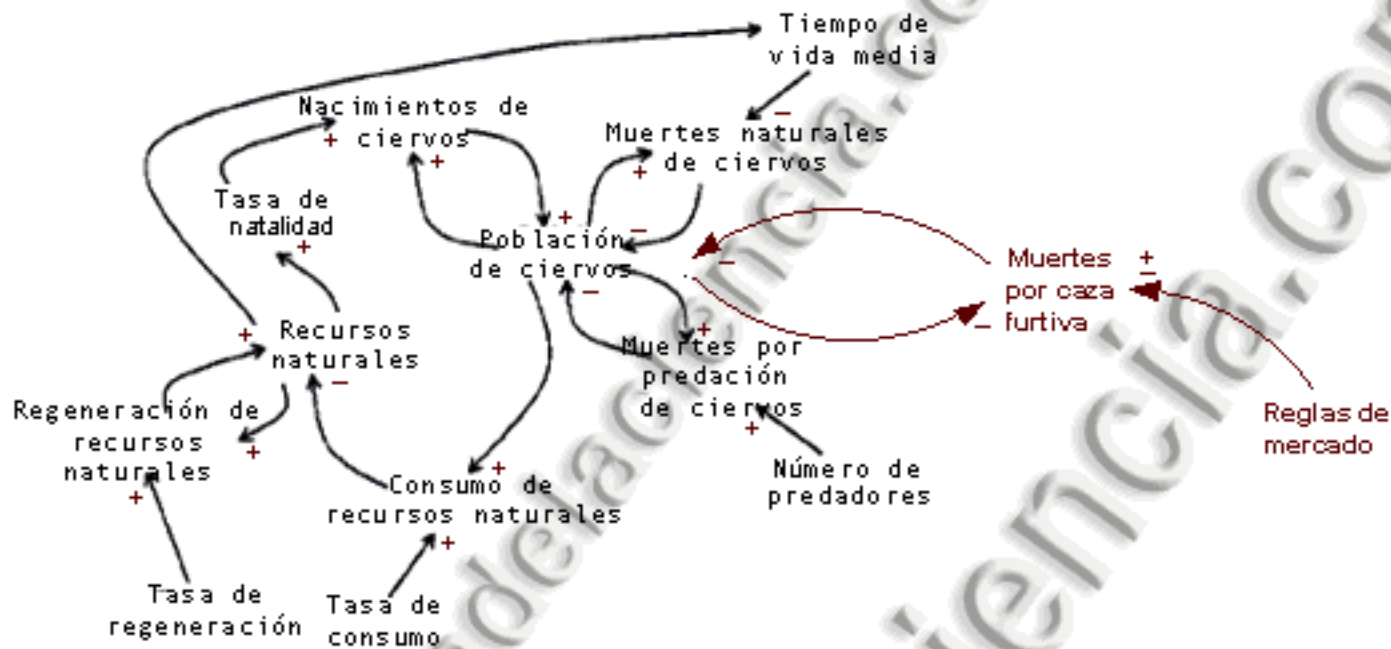
a) Razonar sobre la congruencia de estas ecuaciones y expresar, mediante el correspondiente diagrama de Forrester, las relaciones entre las distintas variables que intervienen en el modelo.

b) Determinar, mediante simulación, lo que ocurre en el servidor durante 20 días si:

- Inicialmente hay 50 correos por enviar.
- Los usuarios generan una media de 50 nuevos correos diarios.
- En ausencia de virus, el servidor tiene capacidad para enviar 100 correos diarios.
- El virus se activa en el quinto día y a partir de entonces permanece activado.
- El 50% de los correos infectados reciben contestación de los otros servidores
- El servidor pierde un 0.5 de capacidad por cada correo infectado que recibe.
- Se utiliza la aproximación de Euler con $\Delta t = 1$ día.
- Se consideran números enteros en todas las variables de flujo, redondeando al entero menor cuando sea necesario.

c) De acuerdo con los resultados de la simulación, ¿Cuándo pudieron darse cuenta los usuarios de que algo raro estaba ocurriendo en el servidor?

d) Suponga que el administrador del servidor ha detectado el virus en el décimo día, que ha recuperado la capacidad inicial del servidor (100 correos diarios) y ha conseguido que éste ya no envíe correos infectados. ¿Con ello habría resuelto completamente el problema? ¿Usted qué hubiera hecho? Razona las repuestas.



- Los nacimientos de ciervos y la población de ciervos forman un bucle de alimentación positiva, con una influencia positiva en ambos sentidos.
- Las regeneración de recursos naturales y los recursos naturales también constituyen un bucle de realimentación positiva.
- Tanto las muertes naturales de ciervos como las muertes por predación de ciervos forman con la población de ciervos sendos bucles de realimentación negativa, influyendo éstas negativamente en la población de ciervos y la población de ciervos positiva sobre ellas pues a una mayor/menor población se produce un aumento/disminución de muertes.
- La tasa de regeneración ejerce una influencia positiva en la regeneración de recursos naturales, éstos también influyen positivamente en los recursos naturales, que actúan a su vez de manera positiva sobre la tasa de natalidad y a un aumento/disminución de esta tasa provocará un aumento/disminución en el nº de nacimientos de ciervos.
- Los recursos naturales tienen una influencia positiva en el tiempo de vida media, a mayor/menor número de recursos mayor/menor tiempo de vida media; y el tiempo de vida media tiene una influencia negativa en el nº de muertes naturales de ciervos.
- La tasa de regeneración tiene una influencia positiva en la regeneración de recursos naturales y la tasa de consumo una influencia de igual comportamiento sobre el consumo de recursos naturales.
- Por último el nº de predadores influye positivamente en el nº de muertes por predación de ciervos, a mayor/menor nº de predadores mayor/menor nº de muertes por predación.

a) La gráfica muestra la evolución del estado a lo largo del tiempo. Se parte de un estado inicial $TINT(0) = 20^\circ$ y se tiende a un objetivo $TINT(90) = 10^\circ = x_d$. En este caso se trata de una función monótona decreciente.

NOTA: si hubiésemos partido de un estado inicial 10° y el estado deseado hubiera sido 20° , sería una función creciente. Ambas, monótona creciente y monótona decreciente corresponden a un comportamiento de BUCLE DE REALIMENTACIÓN NEGATIVA, a diferencia el bucle de realimentación positiva que se trata de una función exponencial.

La temperatura exterior, que permanece constante, es la temperatura objetivo, $x_d = 10^\circ$.

b) Determinaremos el valor de RT sabiendo que en $t = 0$ s, $TINT$ permanece constante, es decir $dTINT/dt = 0$. En ese mismo instante $PC = 1000$ Watios, $TEXT = 10^\circ$ y $TINT = 20^\circ$:

$$\frac{dTINT(t)}{dt} = \frac{1}{M \cdot CE} PC(t) - \frac{1}{M \cdot CE \cdot RT} (TINT(t) - TEXT(t))$$

$$0 = \frac{1}{M \cdot CE} 1000 - \frac{1}{M \cdot CE \cdot RT} (20 - 10)$$

$$0 = \frac{1}{M \cdot CE} \left[1000 - \frac{1}{RT} (20 - 10) \right]$$

$$0 = 1000 - \frac{1}{RT} 10$$

$$1000 = \frac{1}{RT} 10$$

$$1000 RT = 10$$

$$RT = 0.01$$

c) Para determinar el producto $M \cdot CE$ consideraremos $t = 20$ s. En este instante $PC = 0$ Watios, $TINT = 15^\circ$, $TEXT = 10^\circ$ y la variación de $TINT$ la podemos calcular con cocientes incrementales por aproximación:

$$\frac{dTINT}{dt} = \frac{\Delta TINT}{\Delta t} = \frac{15 - 17}{20 - 15} = \frac{-2}{5}$$

Sustituyendo:

$$\frac{dTINT(t)}{dt} = \frac{1}{M \cdot CE} PC(t) - \frac{1}{M \cdot CE \cdot RT} (TINT(t) - TEXT(t))$$

$$\frac{-2}{5} = \frac{1}{M \cdot CE} 0 - \frac{1}{M \cdot CE \cdot 0.01} (15 - 10)$$

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{M \cdot CE \cdot 0.01} (15 - 10)$$

$$2 M \cdot CE \cdot 0.01 = 5 \cdot 5$$

$$M \cdot CE = 25 / 0.02$$

$$M \cdot CE = 1250$$

Modelo virus informático.

a) Justificación.

- (1) Los correos pendientes de enviar aumentan con los correos que generan diariamente los usuarios y disminuyen con los correos enviados diariamente por el servidor.
- (2) Los correos enviados diariamente por el servidor coincide con la capacidad para enviar correos que tiene el servidor salvo que el número de correos pendientes sea inferior.
- (3) El número de correos que generan otros servidores en contestación a correos infectados por virus depende del número medio de correos con virus enviado diariamente.
- (4) La disminución de la capacidad para enviar correos es función de los correos infectados y el número de correos que generan otros servidores en contestación a correos infectados con el virus con un retraso de 2 unidades de tiempo.
- (5) La capacidad para enviar correos que tiene el servidor disminuye con la disminución de capacidad para enviar correos.

CLASIFICACIÓN DE LAS VARIABLES Y UNIDADES:

- Variables de estado:

CPE: correos

CEC: correos

- Variables de flujo:

CD: correos / día

CGU: correos / día

CE: correos / día

- Constantes:

VA: día⁻¹

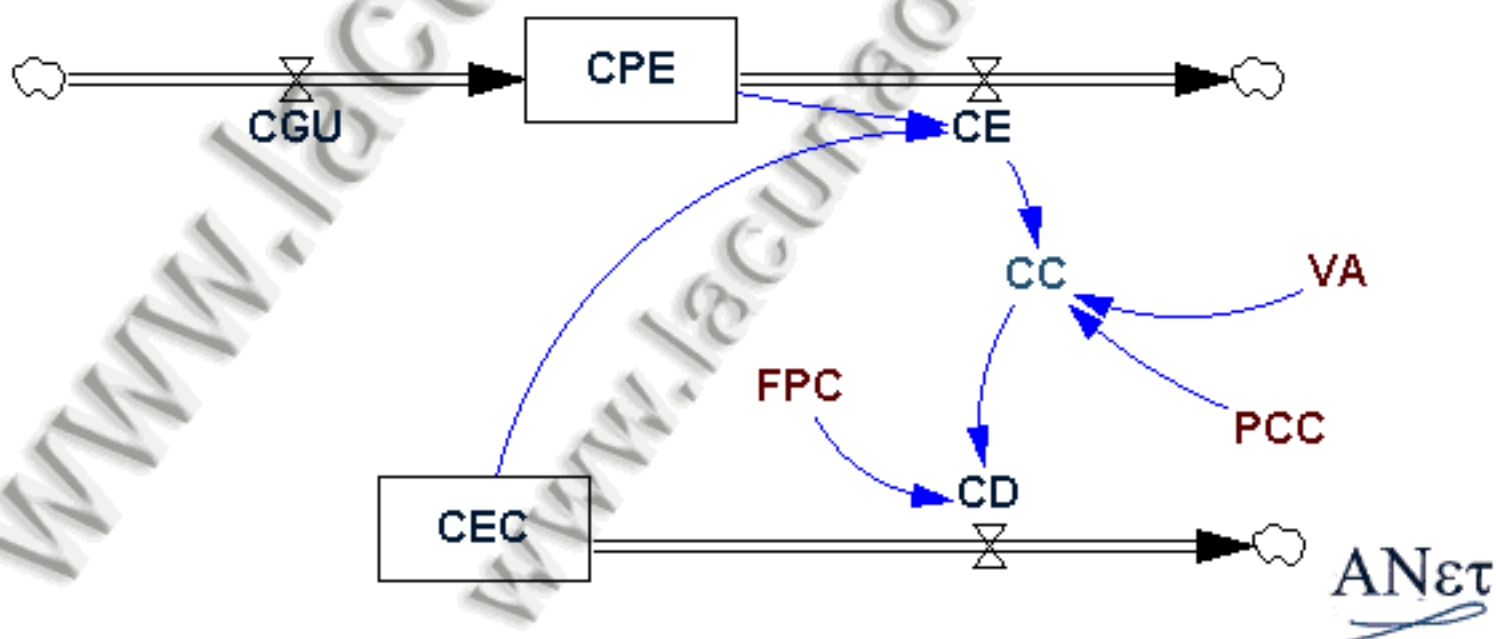
PCC: adimensional

FPC: adimensional

- Variables auxiliar:

CC: correos

DIAGRAMA DE FORRESTER:



ECUACIONES PARA LA SIMULACIÓN

- (1) $CPE(t + \Delta t) = CPE(t) + \Delta t \cdot [CGU - CE(t)]$
- (2) $CE(t) = \min(CPE(t), CEC(t))$
- (3) $CC(t) = VA - PCC \cdot CE(t)$
- (4) $CD(t + \Delta t) = CD(t) + \Delta t \cdot [FPC \cdot CC(t) - CD(t)] / 2$
- (5) $CEC(t + \Delta t) = CEC(t) - \Delta t \cdot DC(t)$

b) Simulación

$CGU = 50$ $PCC = 0.5$ $FPC = 0.5$

$CPE(0) = 50$ $CEC(0) = 100$

La tabla se ha realizado aproximando CE y CD al entero menor.

t	CEC	CPE	CE	CC	CD
0	100	50	50	0	0
1	100	50	50	0	0
2	100	50	50	0	0
3	100	50	50	0	0
4	100	50	50	0	0
5	100	50	50	25	6
6	94	50	50	25	9
7	86	50	50	25	10
8	75	50	50	25	11
9	64	50	50	25	11
10	53	50	50	25	11
11	42	50	42	21	10
12	32	58	32	16	9
13	23	76	23	11,5	7
14	16	103	16	8	5
15	11	137	11	5,5	3
16	8	176	8	4	2
17	6	218	6	3	1
18	5	262	5	2,5	1
19	4	307	4	2	1
20	3	353	3	1,5	0

c) A partir del día 12 el número de correos pendientes de enviar comienza a aumentar y a partir del día 11 el número de correos enviados por el servidor disminuye.

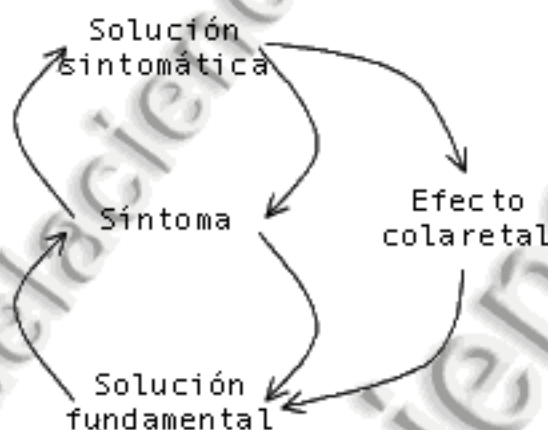
d) No se resuelve el problema, ya que tal y como se ve en la tabla adjunta siguen llegando correos infectados.

t	CEC	CPE	CE	CC	CD
0	100	50	50	0	0
1	100	50	50	0	0
2	100	50	50	0	0
3	100	50	50	0	0
4	100	50	50	0	0
5	100	50	50	25	6
6	94	50	50	25	9
7	85	50	50	25	10
8	75	50	50	25	11
9	64	50	50	25	11
10	100	50	50	0	5
11	95	50	50	25	8
12	87	50	50	25	10
13	77	50	50	25	11
14	66	50	50	25	11
15	55	50	50	25	11
16	44	50	44	22	11
17	33	56	33	16,5	9
18	24	73	24	12	7
19	17	99	17	8,5	5
20	12	132	12	6	4

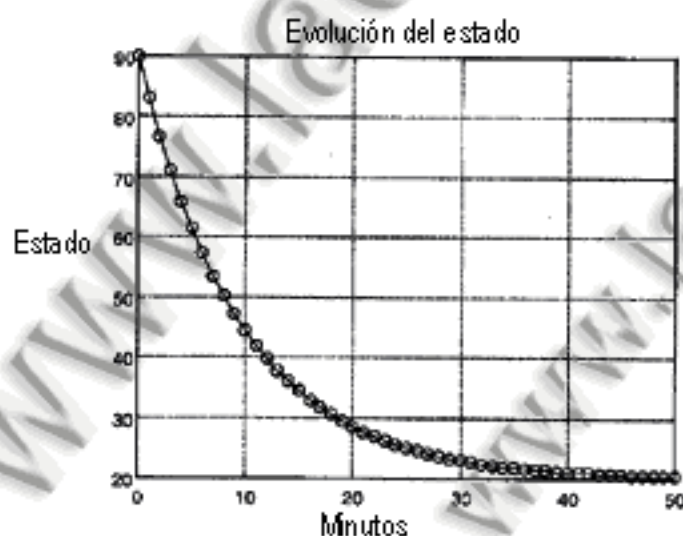
Para solucionar el problema lo que haría es estar tres días sin enviar correo, y al cuarto día restablecería la capacidad del servidor y la no enviaría correos infectados. Como ya no se reciben correos infectados, a partir de ahí $VA = 0$.

t	CEC	CPE	CE	CC	CD
0	100	50	50	0	0
1	100	50	50	0	0
2	100	50	50	0	0
3	100	50	50	0	0
4	100	50	50	0	0
5	100	50	50	25	6
6	94	50	50	25	9
7	85	50	50	25	10
8	75	50	50	25	11
9	64	50	50	25	11
10	0	50	0	0	5
11	0	100	0	0	2
12	0	150	0	0	1
13	100	200	100	0	0
14	100	150	100	0	0
15	100	100	100	0	0
16	100	50	50	0	0
17	100	50	50	0	0
18	100	50	50	0	0
19	100	50	50	0	0
20	100	50	50	0	0

1. La figura muestra el diagrama de influencias genérico del arquetipo de la adicción. En el que se han omitido intencionadamente los signos de todas las influencias y los retardos asociados a ciertas influencias. Se pide:
- Completar el diagrama, justificando de forma cualitativa las influencias, los signos y los retardos que considere necesarios.
 - Analizar brevemente los diferentes bucles que intervienen en el diagrama.
 - Poner un ejemplo concreto de dicho arquetipo.



2. En la figura de la izquierda se muestra el comportamiento temporal de la variable de estado de un sistema y en la figura de la derecha su muestra la trayectoria en el plano de fase.
- Suponiendo que el sistema es lineal, ¿qué estructura elemental puede tener este comportamiento?
 - ¿Cuál puede ser su diagrama de Forrester?
 - ¿Qué valores numéricos tienen los parámetros de este sistema para que el estado y el flujo evolucionen de esta forma?
 - Asigne nombres concretos a cada una de las variables del modelo si lo que se quiere representar es el enfriamiento que experimenta una taza de leche desde que se saca de un microondas y se expone a la temperatura ambiente de una habitación.



3. Modelo "Predador/Presa"

En este ejercicio se pretende modelar un sistema ecológico predador/presa, en el que ambas poblaciones están confinadas en un mismo territorio. Para ello se han elegido dos poblaciones muy representativas de este tipo de sistemas: una población de conejos y una población de zorros. En las que se han despreciado las muertes naturales frente a las muertes por predación y las muertes por falta de alimentos (presas) respectivamente.

El modelo viene descrito por las siguientes ecuaciones:

$$(1) \frac{dC(t)}{dt} = NC(t) - MCP(t)$$

$$(2) NC(t) = TNC \cdot C(t)$$

$$(3) MCP(t) = PE \cdot C(t) \cdot Z(t)$$

$$(4) \frac{dZ(t)}{dt} = NZ(t) - MZFP(t)$$

$$(5) NZ(t) = TNZ \cdot Z(t)$$

$$(6) VMZ(t) = g(C(t))$$

$$(7) MZFP(t) = \frac{Z(t)}{VMZ(t)}$$

Siendo:

C, el número de conejos

NC, el nacimiento de conejos por semana

TNC, la tasa de natalidad de los conejos

MCP, la muerte de conejos por predación por semana

PE, el factor de encuentro entre conejos y zorros

Z, el número de zorros

NZ, el nacimiento de zorros por semana

TNZ, la tasa de natalidad de los zorros

VMZ, la vida media de los zorros

MZFP, la muerte de zorros por falta de presas por semana

g, una función no lineal que relaciona la vida media de los zorros con el número de conejos, tal como se recoge en la tabla y en la gráfica adjuntas.

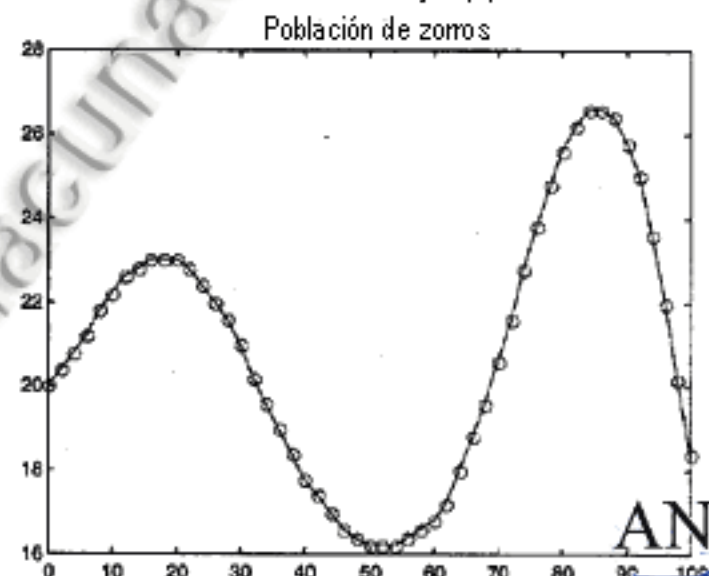
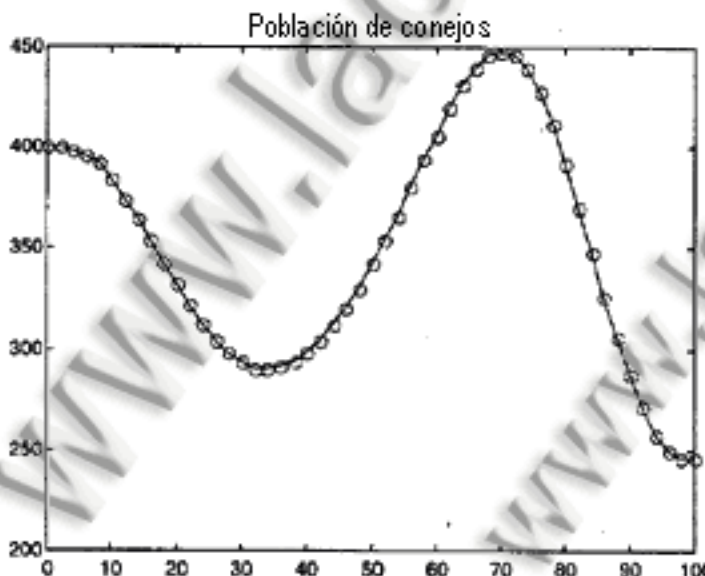
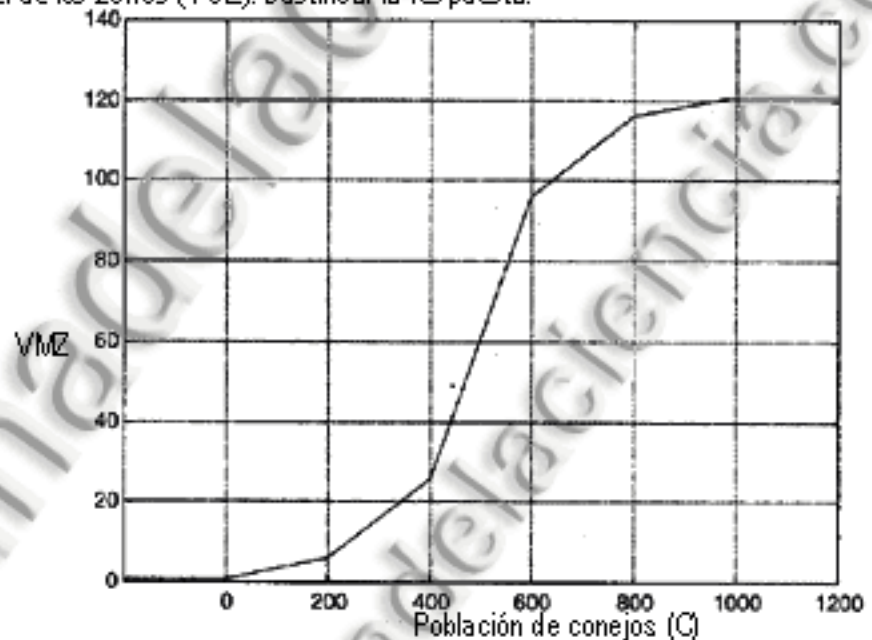
a) Hacer una clasificación razonada de las variables que describen el modelo, especificando sus unidades, y dibujar el correspondiente diagrama de Forrester.

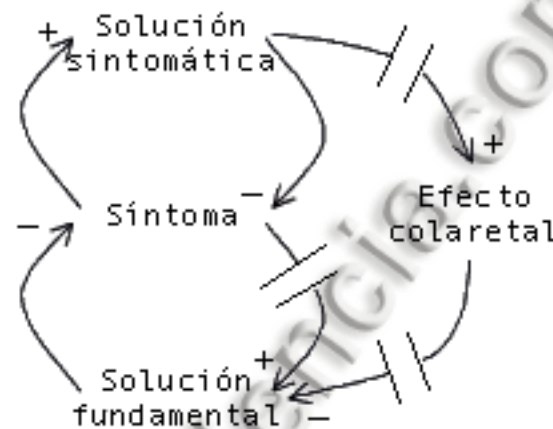
b) Comprobar que si $TNC=0.1$, $TNZ=0.05$ y $PE=0.005$, podrán convivir indefinidamente sin ningún tipo de fluctuación 340 conejos y 20 zorros.

c) Suponer que la población inicial de conejos es 400, pero todo lo demás es igual que en el apartado (b), e iterar al menos 15 veces con un intervalo de simulación $\Delta t = 2$ semanas para comprobar que las poblaciones evolucionan como se muestran en las dos figuras siguientes.

d) Qué cambios hay que introducir en las ecuaciones del modelo para tener en cuenta dos nuevos parámetros: el tiempo de gestación de los conejos (TGC) y el de los zorros (TGZ). Justificar la respuesta.

C	VMZ
0	1
200	6
400	26
600	96
800	116
1000	121
1200	121





a) Tenemos dos procesos de realimentación negativa. El superior representa la solución sintomática que trata de dar una solución rápida y superficial al problema. Esta solución es sólo temporal. El inferior tiene un retraso y sus efectos tardan más en hacerse evidentes. A veces se presenta un proceso adicional de realimentación positiva que genera efectos colaterales.

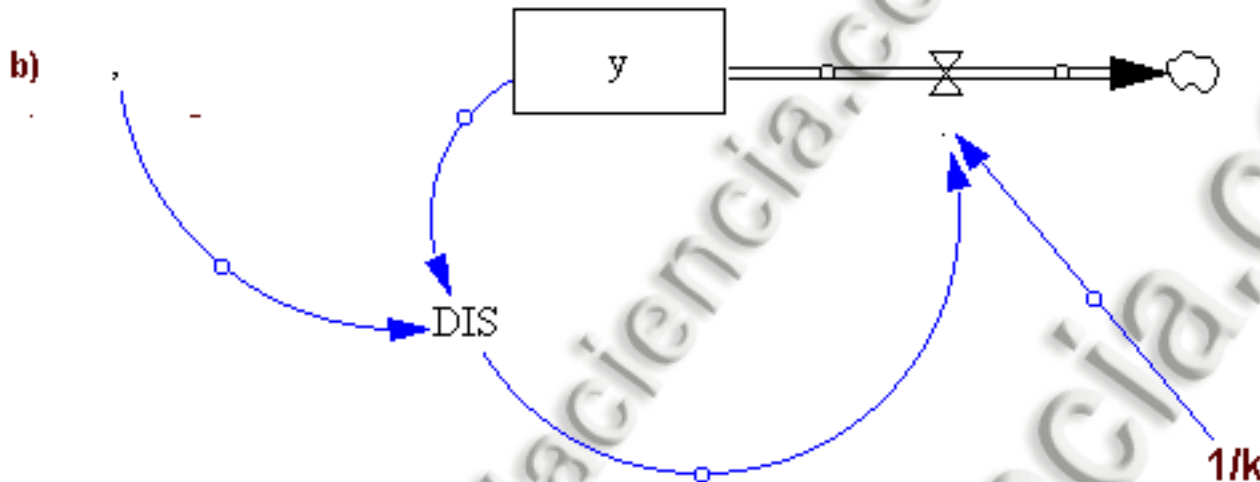
b) En el diagrama de influencias genérico del archetipo de adicción se observan dos bucles de realimentación negativa. Los dos tratan de corregir (debido a su carácter regulador) el mismo síntoma problemático. El superior representa la actuación ante el síntoma en sí, mediante la que se persigue una solución rápida y superficial, resolviendo así el problema con rapidez, pero sólo temporalmente. En bucle inferior se observa un retraso pues la actuación ante la base del problema que causa el síntoma es más lenta y sus efectos tardan más tiempo en hacerse notar.

Además de los dos bucles de realimentación negativa se observa un bucle adicional de realimentación positiva que surge, en este tipo de archetipo, con frecuencia, aunque no siempre y que es consecuencia de los efectos colaterales de la solución sintomática: el solucionar el síntoma induce a pensar que no es necesario buscar soluciones ante el problema que genera el síntoma, con el tiempo se confía más y más en la solución sintomática, que acaba por parecer la única solución posible, pero que desemboca en un situación de dependencia o adicción. "Las soluciones bien intencionadas a corto plazo empeoran las cosas a largo plazo".



El exceso de trabajo conduce al estrés y éste es tratado con fármacos. Los fármacos que han aliviado mi estrés pueden producir, sin embargo, un aumento en la percepción de la capacidad de aceptar más trabajo, ya no estoy estresado puedo trabajar más y más, lo que me genera una nueva situación de estrés, el problema sigue latente y periódicamente reaparece, con lo que genera primero dependencia de los fármacos y luego adicción. Estoy resolviendo el síntoma (estrés) y no el problema de fondo: el exceso de trabajo.

a) Siempre que se trate de un sistema con un comportamiento que tiende a un objetivo se trata de un bucle de realimentación negativa.



c) La gráfica muestra la evolución del estado a lo largo del tiempo. Se parte de un estado inicial $x(0) = 90$ y se tiende a un objetivo $x(50) = 20^\circ = x_d$.

Ya hemos indicado que se trata del típico comportamiento de un bucle de realimentación negativa. La formulación matemática de este tipo de bucles es:

$$F = k (x_d - x)$$

Para calcular el valor del parametro k usamos la fórmula de la trayectoria de este tipo de sistemas:

$$x(t) = x_d + [x(0) - x_d] \cdot e^{-kt}$$

En la gráfica vemos que en el instante $t = 5$, el valor del estado es 60. Sustituimos:

$$60 = 20 + [90 - 20] \cdot e^{-k5}$$

$$60 - 20 = [90 - 20] \cdot e^{-k5}$$

$$40 = 70 \cdot e^{-k5}$$

$$40 / 70 = e^{-k5}$$

$$0.57 = e^{-k5}$$

$$\ln 0.57 = -5k$$

$$-0.56 = -5k$$

$$k = 0.56/5 \approx 0.1$$

Por tanto los valores numéricos de los parámetros de este sistema son:

$$x_d = 20, k = 0.1$$

d) Comportamiento del flujo de un bucle de realimentación negativa:

$$F = k (x_d - x)$$

Ecuación diferencial que refleja el proceso de enfriamiento:

$$\frac{dTEMP(t)}{dt} = \frac{1}{FPT} (TEMP(t) - TAMB)$$

TEMP(t) temperatura de la taza de leche siendo TEMP(0) = 90°

TAMB temperatura ambiente de la habitación (20°)

FPT factor de pérdidas térmicas

Siendo $k = 1/FPT$.

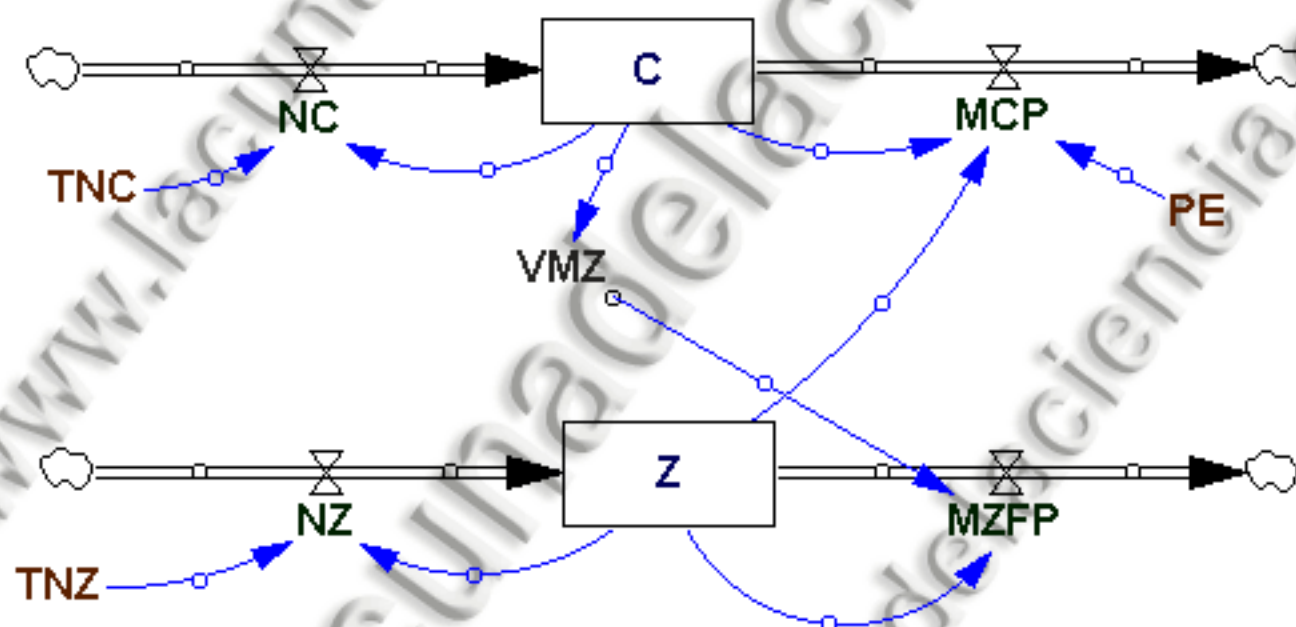
Si $k = 0.1$ entonces $FPT = 1/0.1 = 10$

Modelo predador / presa.

a) CLASIFICACIÓN DE LAS VARIABLES Y UNIDADES:

- Variables de estado:
C: conejos
Z: zorros
- Variables de flujo:
NC: conejos / semana
MCP: conejos / semana
NZ: zorros / semana
MZFP: zorros / semana
- Constantes:
TNC: semana⁻¹
PE: semana⁻¹
TNZ: semana⁻¹
- Variable auxiliar no lineal:
VMZ: semanas

DIAGRAMA DE FORRESTER:



b) Que no hay fluctuaciones quiere decir que las dos derivadas deben valer cero, es decir que:

$$NC(t) - MCP(t) = 0 \quad \text{y} \quad NZ(t) - MZFP(t) = 0$$

Comprobémoslo:

$$0.1 \cdot 340 - 0.005 \cdot 340 \cdot 20 = 0$$

$$0.005 \cdot 20 - 20 / 20 = 0$$

Como hemos comprobado, 340 conejos y 20 zorros pueden convivir indefinidamente.

NOTA: VMZ(340) lo calculamos suponiendo ese tramo lineal y usando la ecuación de la recta que pasa por dos puntos:

$$\frac{VMZ - 6}{26 - 6} = \frac{340 - 200}{400 - 200}$$

$$VMZ - 6 = \frac{20 \cdot 140}{200}$$

$$VMZ = 6 + 14$$

$$VMZ = 20$$

ECUACIONES PARA LA SIMULACIÓN

$$(1) C(t + \Delta t) = C(t) + \Delta t [NC(t) - MCP(t)]$$

$$(2) NC(t) = TNC \cdot C(t)$$

$$(3) MCP(t) = PE \cdot C(t) \cdot Z(t)$$

$$(4) Z(t + \Delta t) = Z(t) + \Delta t [NZ(t) - MZFP(t)]$$

$$(5) NZ(t) = TNZ \cdot Z(t)$$

$$(6) VMZ(t) = g(C(t))$$

$$(7) MZFP(t) = Z(t) / VMZ(t)$$

c) Simulación

$$TNC = 0.1 \quad TNZ = 0.05 \quad PE = 0.005$$

$$C(0) = 400 \quad Z(0) = 20$$

$\Delta t = 2$ semanas

Tabla con valores sin aproximar.

t	C	Z	NC	MCP	NZ	VMZ	MZFP
0	400,00	20,00	40,00	40,00	1,00	26,00	0,77
2	400,00	20,46	40,00	40,92	1,02	26,00	0,79
4	398,15	20,93	39,82	41,67	1,05	25,82	0,81
6	394,44	21,41	39,44	42,22	1,07	25,44	0,84
8	388,89	21,86	38,89	42,51	1,09	24,89	0,88
10	381,65	22,29	38,16	42,54	1,11	24,16	0,92
12	372,90	22,68	37,29	42,28	1,13	23,29	0,97
14	362,91	23,00	36,29	41,73	1,15	22,29	1,03
16	352,04	23,23	35,20	40,90	1,16	21,20	1,10
18	340,65	23,37	34,07	39,80	1,17	20,07	1,16
20	329,19	23,37	32,92	38,47	1,17	18,92	1,24
22	318,08	23,24	31,81	36,96	1,16	17,81	1,30
24	307,78	22,95	30,78	35,32	1,15	16,78	1,37
26	298,69	22,51	29,87	33,62	1,13	15,87	1,42
28	291,18	21,93	29,12	31,92	1,10	15,12	1,45
30	285,57	21,22	28,56	30,30	1,06	14,56	1,46
32	282,09	20,43	28,21	28,81	1,02	14,21	1,44

$$\text{Nota: } \frac{VMZ - 6}{26 - 6} = \frac{C - 200}{400 - 200}$$

$$VMZ - 6 = \frac{20 \cdot (C - 200)}{200}$$

$$VMZ = 6 + \frac{(C - 200)}{10}$$

$$VMZ = 26 + C / 10$$

d) Introduciríamos dos nuevas variables de estado: Conejos sin gestas (CSG) y zorros sin gestar (ZSG) y haríamos cambios en las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} (1) \frac{dC(t)}{dt} &= CG(t) - MCP(t) & y & & \frac{dCSG(t)}{dt} &= NC(t) - CG(t) \\ (4) \frac{dZ(t)}{dt} &= ZG(t) - MZF(t) & y & & \frac{dZSG(t)}{dt} &= NZ(t) - ZG(t) \end{aligned}$$

Donde las variables de flujo CG y ZG indican los conejos gestados y los zorros gestados, respectivamente.

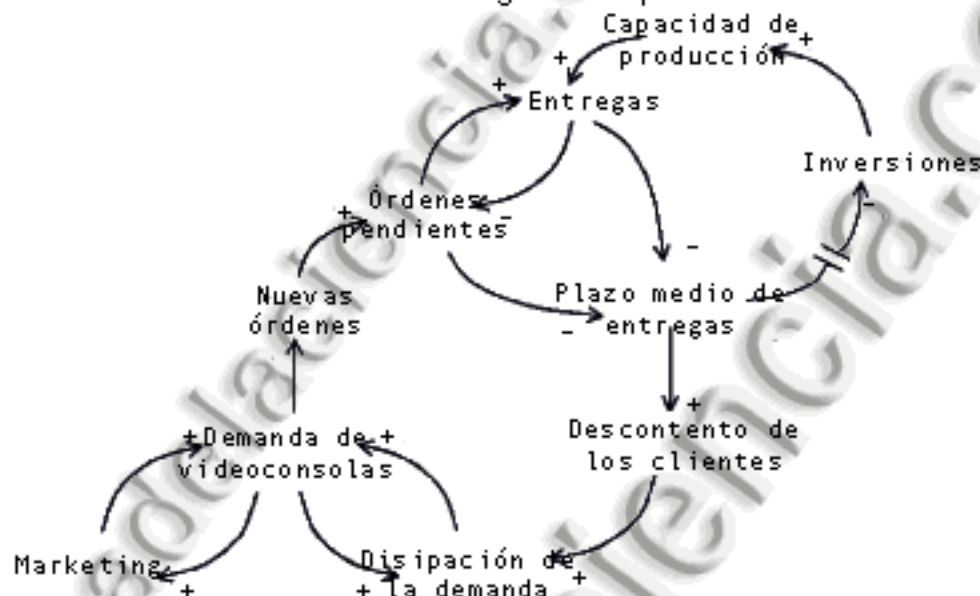
Por último habría que añadir dos nuevas ecuaciones:

$$CG(t) = TMGC \cdot CSG(t)$$

$$ZG(t) = TMGZ \cdot ZSG(t)$$

Donde TMGC y TMGZ son las tasas medias de gestación de los conejos y zorros respectivamente.

1. Para analizar la demanda de un modelo concreto de videoconsolas, así como el plazo de entrega de las mismas a sus clientes, se ha construido el siguiente diagrama de influencias en el que se han errado intencionadamente ciertos signos. Se pide:



- Justificar de forma cualitativa cada una de las relaciones y sus signos, corrigiendo aquellos con los que no esté de acuerdo.
- ¿Qué características de la empresa fabricante de las videoconsolas se perciben claramente en el modelo?
- ¿Qué arquetipo de los que ha estudiado contempla el tipo de situación que se da en este modelo? Justifique sus respuesta.

2. La industria agrícola que tiene por objeto la cría de los gusanos de seda y la obtención de la misma se conoce como SERICICULTURA. Los huevos procedentes de mariposas fecundas se conservan durante el invierno en un sitio frasco y se incuban en primavera, cuando las hojas de las moreras están suficientemente desarrolladas, para provocar el nacimiento de las larvas, que alcanzarán su máximo tamaño aproximadamente a los 40 días. Momento en el que éstos comienzan a tejer el capullo y tardan un par de días en quedar totalmente encerrados y en pasar al estado de crisálida. A los 17 días, si el capullo no ha sido ahogado, la crisálida se transforma en un mariposa blanca. En otras cajas se favorece el apareamiento macho y hembra, después del cual muere el macho; la hembra muere a los 4 días, después de haber puesto gran cantidad de huevos. Por supuesto, sólo una pequeña parte de los capullos permanecen intactos hasta la completa metamorfosis de las crisálidas; el resto se retira para extraer la seda.

- Dibujar un diagrama de Forrester con los cuatro estados del gusano de seda (huevo, larva, crisálida y mariposa), los correspondientes flujos entre ellos, las otras variables representativas del proceso anteriormente descrito y cualquier otra variable que considere oportuna para reflejar más fielmente el proceso.
- ¿Se ha visto necesitado de utilizar algún retraso material significativo en el diagrama de apartado (a)? ¿dónde y por qué?
- ¿Cómo ampliaría el diagrama de Forrester para tener en cuenta las necesidades alimenticias del gusano de seda?

3. Modelo simplificado "Transmisión de la fiebre amarilla".

En este ejercicio se presenta un modelo simplificado de transmisión de una enfermedad vírica, la fiebre amarilla, en una población humana. La enfermedad la provoca un virus, y la única forma de contraerla es por picadura de un mosquito, que hace de agente transmisor de la enfermedad. Se sabe que el virus desencadena en las personas una sintomatología, que dura varios días, y durante los cuales la persona puede contagiar el virus a los mosquitos que le piquen. Transcurrida la sintomatología, algunas personas superan la enfermedad y quedan inmunes para siempre, mientras que otras mueren.

El modelo está descrito por las siguientes ecuaciones:

$$(1) \text{mcp}(t) = \text{MIN}(\text{mntv}(t), \text{npm} \text{mntv}(t) \frac{\text{ptv}(t)}{\text{pto}(t)})$$

$$(2) \text{pcp}(t) = \text{MIN}(\text{ps}(t), \text{npm} \text{mntv}(t) \frac{\text{ps}(t)}{\text{pto}(t)})$$

$$(3) \text{pem}(t) = \text{tm} \text{ptv}(t)$$

$$(4) \text{pse}(t) = (1 - \text{tm}) \text{ptv}(t)$$

$$(5) \text{pto}(t) = \text{ps}(t) + \text{ptv}(t) + \text{pin}(t)$$

$$(6) \frac{d \text{mntv}(t)}{dt} = - \text{mcp}(t)$$

$$(7) \frac{d \text{mntv}(t)}{dt} = \text{mcp}(t)$$

$$(8) \frac{d \text{ps}(t)}{dt} = - \text{pcp}(t)$$

$$(9) \frac{d \text{ptv}(t)}{dt} = \text{pcp}(t) - \text{pem}(t) - \text{pse}(t)$$

$$(10) \frac{d \text{pin}(t)}{dt} = \text{pse}(t)$$

Siendo:

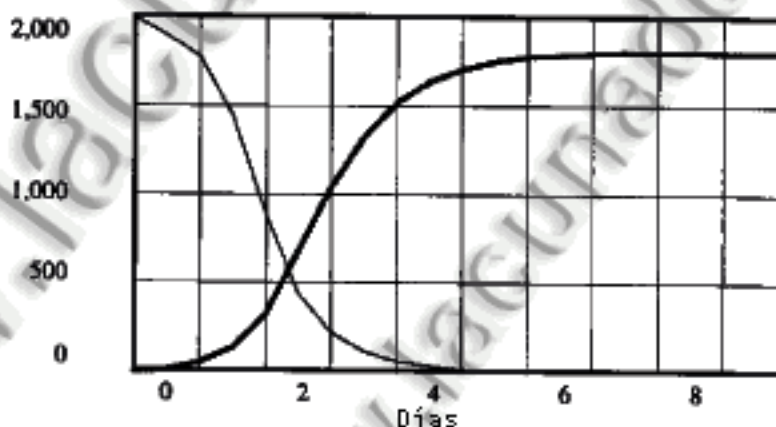
MIN	La función mínimo
mntv	Población de mosquitos que no transmite el virus
mtv	Población de mosquitos que transmite el virus
mcp	Mosquitos contagiados por picadura a persona enferma
npm	Picaduras diarias de cada mosquito
ps	Población sana
ptv	Población transmisora del virus
pin	Población inmune a la enfermedad
pto	Población total
pcp	Población contagiada por picadura de mosquito
pse	Población que supera la enfermedad
pem	Población enferma que muere
tm	Tasa de mortalidad de la población enferma

a) Justificar que el modelo propuesto es coherente con el enunciado y recoge bastante bien la interacción entre las dos poblaciones (la humana y la de los mosquitos).

b) Clasificar las variables y resumir en el correspondiente diagrama de Forrester el conjunto total de ecuaciones del modelo.

c) Suponiendo que $\text{npm}=2$, $\text{tm}=0.1$, que hay una población inicial de 5000 mosquitos, de los cuales 100 ya están infectados, y una población inicial de 2000 personas, de las cuales 10 son transmisora del virus pero ninguna es inmune todavía. Simular la evolución de las variables más importantes del modelo, utilizando la aproximación de Euler con $\Delta t=0.5$ días como intervalo de simulación y redondeo a un decimal. La siguiente figura, obtenida sin redondeo, que muestra la evolución de la población sana y de la población inmune le puede servir para comprobar si ha efectuado correctamente la simulación.

Modelo simplificado de la fiebre amarilla



Población sana ——— personas
Población inmune ——— personas

d) En función de los resultados del apartado (c), utilizando el conocimiento del modelo si no ha tenido tiempo para realizar la simulación, conteste de forma razonada a las siguientes preguntas: ¿Cómo está distribuida la población en el décimo día? ¿cuáles son los días importantes de esta simulación?

a) Modificaciones realizadas en las relaciones:

Órdenes pendientes \rightarrow + Plazo medio de entregas

Órdenes pendientes \rightarrow - Entregas

Plazo medio de entregas \rightarrow - \rightarrow + Inversiones

Demanda de videoconsolas \rightarrow - Disipación de la demanda

Disipación de la demanda \rightarrow - Demanda de videoconsolas

Por un lado disponemos de dos bucles de realimentación positiva que influyen en la demanda de videoconsolas:

A un aumento/disminución de marketing mayor/menor demanda de videoconsolas y a un aumento/disminución de demanda de videoconsolas mayor/menor marketing. A este bucle de realimentación positiva le denominaremos BUCLE DE PROMOCIÓN.

A un aumento/disminución de la disipación de la demanda menor/mayor demanda de videoconsolas y a un aumento/disminución de demanda de videoconsolas menor/mayor disipación de la demanda.

Por otro lado un aumento/disminución en la demanda de videoconsolas más/menos nuevas órdenes (influencia positiva), las nuevas órdenes a su vez influyen positivamente en las órdenes pendientes y éstas negativamente en las entregas que a su vez influyen negativamente en el plazo medio de entregas, ejerciendo éstas una influencia positiva en el descontento de los clientes que afectan positivamente en la disipación de la demanda y ésta última negativamente en la demanda de videoconsolas, cerrándose así un bucle de realimentación negativa (4 + y 3 -) a este bucle le denominaremos BUCLE DE RETRASO SUMINISTRO.

Las Órdenes pendientes también influyen positivamente en el plazo medio de las entregas.

En tercer lugar las entregas influyen negativamente en el plazo medio de las entregas que con un cierto retraso incluyen positivamente en las inversiones, éstas positivamente en la capacidad de producción y ésta última nuevamente positivamente sobre las entregas cerrando un bucle de realimentación negativa (3 + 1 -) que denominaremos BUCLE DE CAPACIDAD DE PRODUCCIÓN.

b) Características:

La empresa dispone de política de marketing para incentivar la venta de videoconsolas.

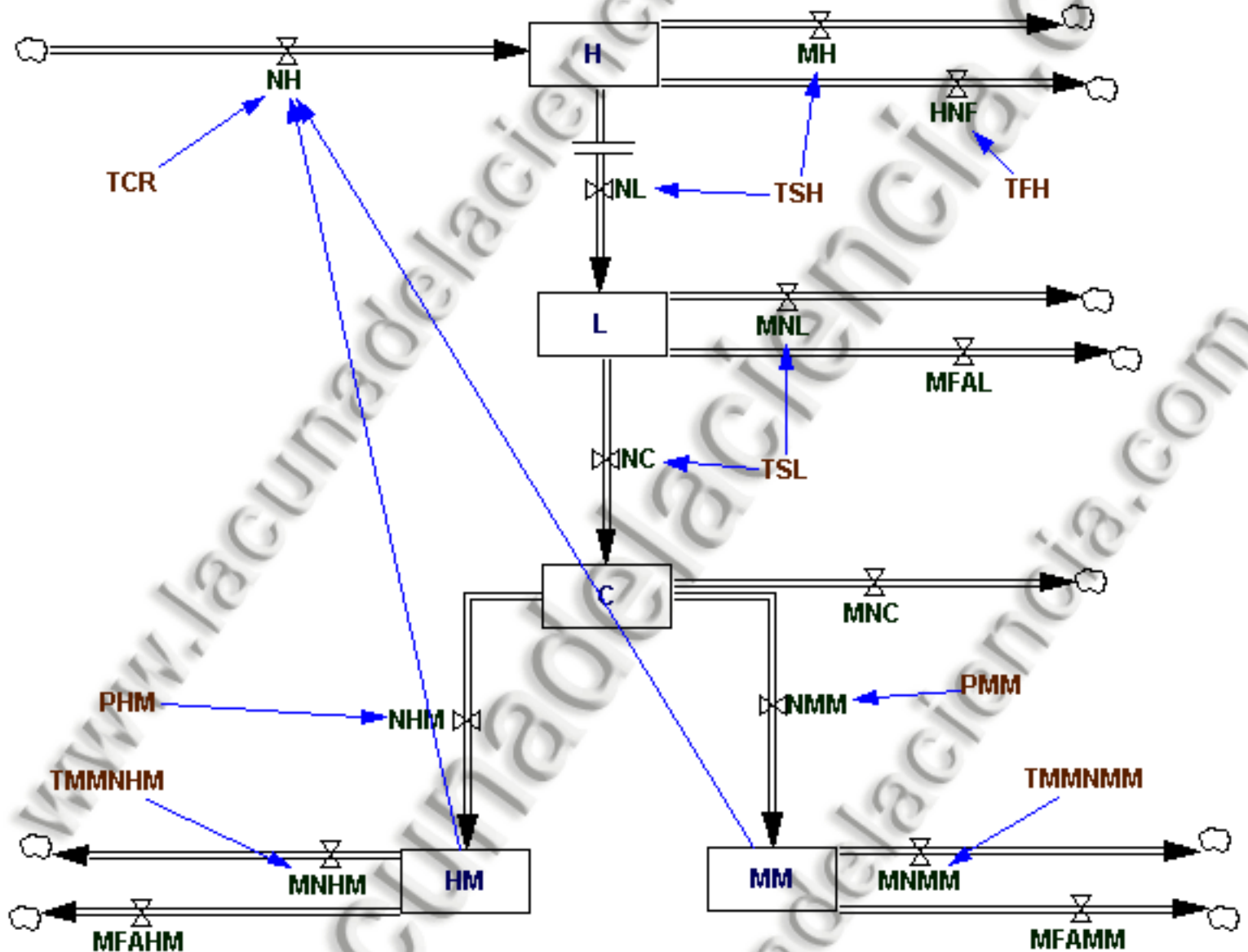
Un aumento de las entregas de órdenes pendientes provoca retrasos en el plazo medio de entregas y un aumento en el descontento de los clientes lo que hace disminuir la demanda (aumento de la disipación de las demandas).

Dispone también de una política de aumento de capacidad de producción cuando se detecta que ésta es la que limita las entregas. Si la toma de decisión de este aumento se retrasa y tarda en decidirse sobre su actuación, pueden haberse producido retrasos excesivos en el plazo medio de entregas y haber afectado negativamente al volumen de ventas.

c) El tipo de situación contemplado en el presente modelo corresponde al ARQUETIPO DEL CRECIMIENTO CON INVERSIÓN INSUFICIENTE.

Por un lado disponemos de la combinación de un bucle de realimentación positiva (BUCLE DE PROMOCIÓN) con otro de realimentación negativa (BUCLE DE RETRASO DE SUMINISTRO) lo que da lugar a un crecimiento sigmoïdal. Al incrementarse las órdenes pendientes, con relación a la capacidad de producción, el plazo medio de las entregas aumenta, se produce así un descontento de los clientes, por lo que aumenta la disipación de la demanda. Ante un aumento de la disipación de la demanda (menos clientes) la empresa podría actuar aumentando su política de marketing para incentivar nuevas ventas, pero ésta no sería una buena actuación, pues las nuevas ventas provocarían un nuevo aumento en el plazo medio de entregas debido a que no se dispone de la suficiente capacidad de producción. La actuación sobre esta estructura debe hacerse sobre el bucle positivo CAPACIDAD DE PRODUCCIÓN incrementando así la capacidad de producción. Una vez detectado el problema de que el retraso del plazo medio de entregas es debido a la insuficiente capacidad de producción, se actúa sobre ésta muy cautelarmente. Podemos interpretar la combinación de los bucles retraso suministro y capacidad de producción como arquetipo de adición.

El retraso material significativo se produce debido al largo periodo (todo el invierno) en el que los huevos son conservados en sitio fresco, no iniciándose la incubación hasta la primavera, retraso producido por la no disponibilidad de hojas de moreras desarrolladas hasta entonces y que son vitales en la alimentación de las larvas.



H: huevos
L: larvas
C: crisálidas
HM: hembras mariposa
MM: machos mariposa
NH: nuevos huevos
NL: nuevas larvas
NC: nuevas crisálidas
NHM: nuevas hembras mariposa
NMM: nuevos machos mariposa
HNF: huevos no fecundados
MH: huevos muertos
MNL: muerte natural de larvas

MNC: muerte natural de crisálidas
MNHM: muerte natural hembras mariposa
MNM: muerte natural machos mariposa
TFH: tasa de fecundación de los huevos
TSH: tasa de supervivencia de los huevos
TSL: tasa de supervivencia de larvas
MFAL: muerte por falta de alimento de larvas
PMM: porcentaje de machos mariposa
PHM: porcentaje de hembras mariposa
TCR: tasa de contactos reproductivos
MFAMM: muerte por falta de alimentos de machos mariposa
MFAHM: muerte por falta de alimentos hembras mariposa

Modelo transmisión de la fiebre amarilla.

a) Justificación.

- (1) Los mosquitos contagiados por la picadura a una persona son función de las picaduras diarias de cada mosquito, el número de mosquitos que transmite el virus, la población que transmite el virus y la población total salvo que la población de mosquitos que no transmite el virus se agote.
- (2) La población contagiada por picadura es función de las picaduras diarias de cada mosquito, la población de mosquitos que transmite el virus, la población sana y la población total salvo que se agote la población sana.
- (3) La población enferma que muere es función de la tasa de mortalidad de la enfermedad y de la población transmisora de la enfermedad.
- (4) La población que supera la enfermedad es función de la tasa de superación de la enfermedad ($1 - \text{tasa de mortalidad}$) y de la población transmisora de la enfermedad.
- (5) La población total es la población sana, más la contagiada por picadura de mosquito más la inmune a la enfermedad.
- (6) La población de mosquitos que no contagia el virus disminuye con la población de mosquitos contagiados por la picadura a una persona enferma.
- (7) La población de mosquitos que contagia el virus aumenta con la población de mosquitos contagiados por la picadura a una persona enferma.
- (8) La población sana disminuye con la población contagiada por la picadura de un mosquito.
- (9) La población transmisora del virus aumenta con la población contagiada por picadura y disminuye con la población enferma que muere y la población enferma que supera la enfermedad.
- (10) La población inmune a la enfermedad aumenta con la población que supera la enfermedad.

b) DEFINICIÓN DE VARIABLES:

mntv	Población de mosquitos que no transmite el virus
mtv	Población de mosquitos que transmite el virus
mcp	Mosquitos contagiados por picadura a persona enferma
npm	Picaduras diarias de cada mosquito
ps	Población sana
ptv	Población transmisora del virus
pin	Población inmune a la enfermedad
pto	Población contagiada por picadura de mosquito
pcp	Población contagiada por picadura de mosquito
pse	Población que supera la enfermedad
pem	Población enferma que muere
tm	Tasa de mortalidad de la población enferma

CLASIFICACIÓN DE LAS VARIABLES Y UNIDADES:

- Variables de estado:

mntv: mosquitos
mtv: mosquitos
ps: personas
ptv: personas
pin: personas

- Variables de flujo:

mcp: mosquitos / día
pcp: personas / día

pem: personas / día

pse: personas / día

- Constantes:

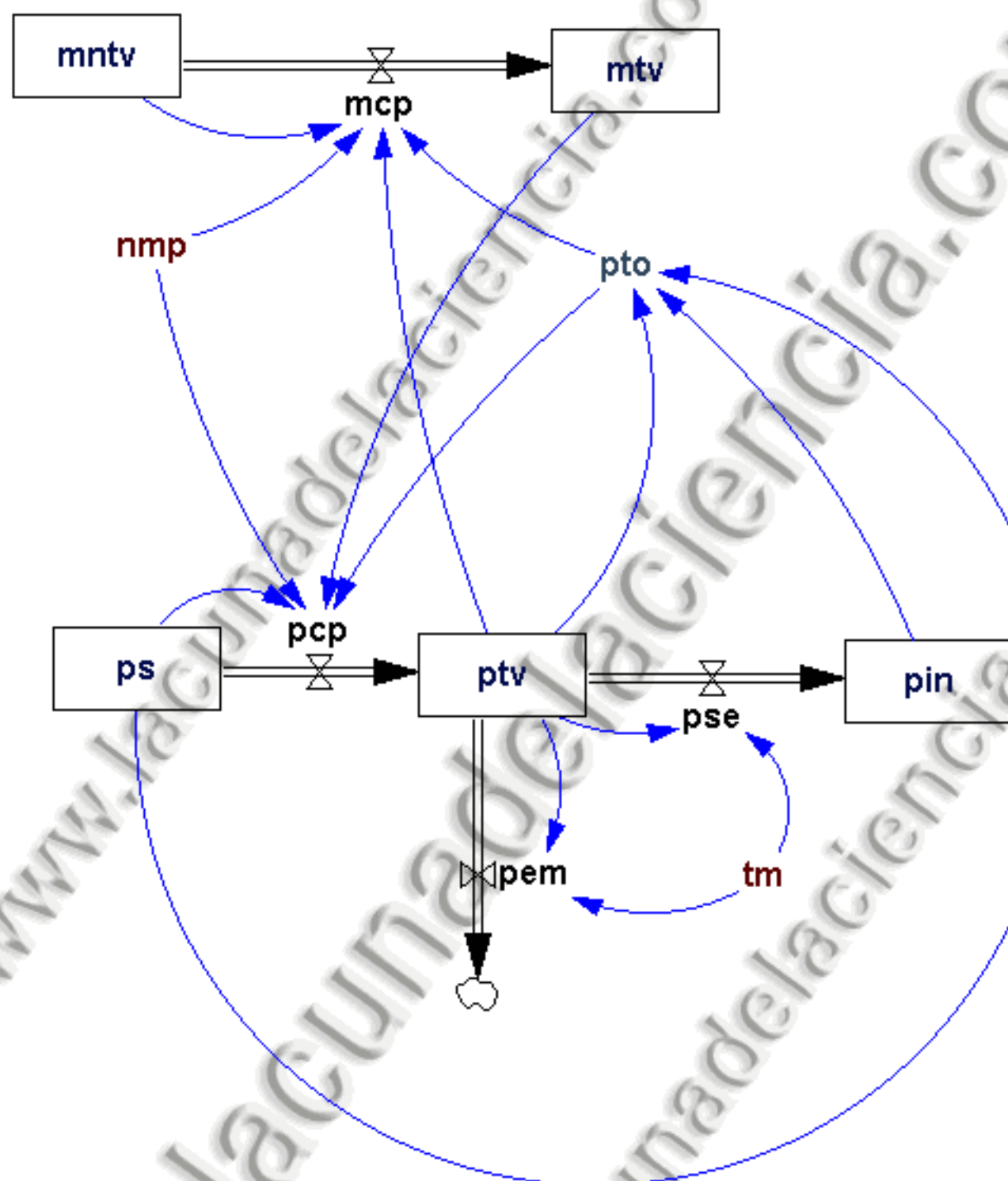
npm: día⁻¹

tm: día⁻¹

- Variable auxiliar:

pto: personas

DIAGRAMA DE FORRESTER:



c) ECUACIONES

- (1) $mcp(t) = \text{MIN}(mntv(t), npm \cdot mntv(t) \cdot ptv(t) / pto(t))$
- (2) $pcp(t) = \text{MIN}(ps(t), npm \cdot mntv(t) \cdot ps(t) / pto(t))$
- (3) $pem(t) = tm \cdot ptv(t)$
- (4) $pse(t) = (1 - tm) \cdot ptv(t)$
- (5) $pto(t) = ps(t) + ptv(t) + pin(t)$
- (6) $mntv(t + \Delta t) = mntv(t) - \Delta t \cdot mcp(t)$
- (7) $mtv(t + \Delta t) = mntv(t) + \Delta t \cdot mcp(t)$
- (8) $ps(t + \Delta t) = ps(t) - \Delta t \cdot pcp(t)$
- (9) $ptv(t + \Delta t) = ptv(t) + \Delta t \cdot [pcp(t) - pem(t) - pse(t)]$
- (10) $pin(t + \Delta t) = pin(t) + \Delta t \cdot pse(t)$

Tabla con valores aproximados a un decimal.

t	mntv	mtv	ps	ptv	pin	mcp	pcp	pem	pse	pto
0	4900	100	1990	10	0	49	199	1	9	2000
0,5	4875,5	124,5	1890,5	104,5	4,5	509,6	235,4	10,5	94	1999,5
1	4620,7	379,3	1772,8	170	51,5	787,8	674,3	17	153	1994,3
1,5	4226,8	773,2	1435,7	422,2	128	1797,2	1118	42,2	380	1985,9
2	3328,2	1671,8	876,7	770,1	318	2609	876,7	77	693	1964,8
2,5	2023,7	2976,3	438,4	823,5	664,5	1730,2	438,4	82,4	741,2	1926,4
3	1158,6	3841,4	219,2	630,9	1035,1	775,5	219,2	63,1	567,8	1885,2
3,5	770,9	4229,2	109,6	425,1	1319	353,6	109,6	42,5	382,6	1853,7
4	594,1	4406	54,8	267,4	1510,3	173,4	54,8	26,7	240,7	1832,5
4,5	507,4	4492,7	27,4	161,1	1630,7	89,9	27,4	16,1	145	1819,2
5	462,5	4537,7	13,7	94,3	1703,2	48,2	13,7	9,4	84,9	1811,2
5,5	438,4	4561,8	6,9	54	1745,7	26,2	6,9	5,4	48,6	1806,6
6	425,3	4574,9	3,5	30,5	1770	14,4	3,5	3	27,5	1804
6,5	418,1	4582,1	1,8	17	1783,8	7,9	1,8	1,7	15,3	1802,6
7	414,2	4586,1	0,9	9,4	1791,5	4,3	0,9	0,9	8,5	1801,8
7,5	412,1	4588,3	0,5	5,2	1795,8	2,4	0,5	0,5	6,7	1801,5
8	410,9	4589,5	0,3	1,9	1799,2	0,9	0,3	0,2	1,7	1801,4
8,5	410,5	4590	0,2	1,1	1800,1	0,5	0,2	0,1	1	1801,4
9	410,3	4590,3	0,1	0,7	1800,6	0,3	0,1	0,1	0,6	1801,4
9,5	410,2	4590,5	0,1	0,4	1800,9	0,2	0,1	0	0,4	1801,4
10	410,1	4590,6	0,1	0,3	1801,1	0,1	0,1	0	0,3	1801,5

d) El décimo día toda la población ha sido ya portadora de la fiebre pero la enfermedad ha sido erradicada ya que en ese momento no hay portadores. Han sobrevivido 1801,1 personas. Los días más importantes de la simulación son los cuatro primeros ya que a partir del cuarto la situación está casi estabilizada.

1. Se pretende analizar el crecimiento sostenido del precio de la gasolina en los últimos años mediante un modelo simple, que incluya al menos las siguientes variables:

- Precio del barril de petróleo (PBP)
- Litros de gasolina que se obtienen de un barril de petróleo (LGBP)
- Costes de producción (CP)
- Precio por litro de gasolina producida (PLGP)
- Costes de distribución (CD)
- Costes de expedición (CE)
- Impuestos directos sobre el litro de gasolina (IDLG)
- Precio final del litro de gasolina (PFLG)

a) Proponer un diagrama de influencias para este modelo, justificando cada una de las influencias y los signos. Observaciones: 1) si lo desea puede utilizar el nombre abreviado de las variables, 2) suponga que en el concepto costes están incluidos los beneficios del agente (productos, distribuidor o expendedor, respectivamente).

b) ¿Cómo explicaría de forma cualitativa el crecimiento sostenido del precio de la gasolina a partir del diagrama del apartado (a)?

c) Combinar en el diagrama anterior un mecanismo de regulación, capaz de mantener el precio de la gasolina entre un máximo y un mínimo.

2. La siguiente ecuación diferencial describe la dinámica de la temperatura $TINT(t)$ en el interior de una casa que alberga una masa de aire M con calor específico CE prácticamente constante. La casa posee un sistema de calefacción con una potencia variable $PC(t)$ que se emplea en aumentar la temperatura interior y en vencer las pérdidas debidas a que el aislamiento térmico de la casa no es total. Estas pérdidas son directamente proporcionales a la diferencia con la temperatura exterior $TEXT(t)$ e inversamente proporcionales a la resistencia térmica RT de la casa.

$$\frac{dTINT(t)}{dt} = \frac{1}{M \cdot CE} PC(t) - \frac{1}{M \cdot CE \cdot RT} (TINT(t) - TEXT(t))$$

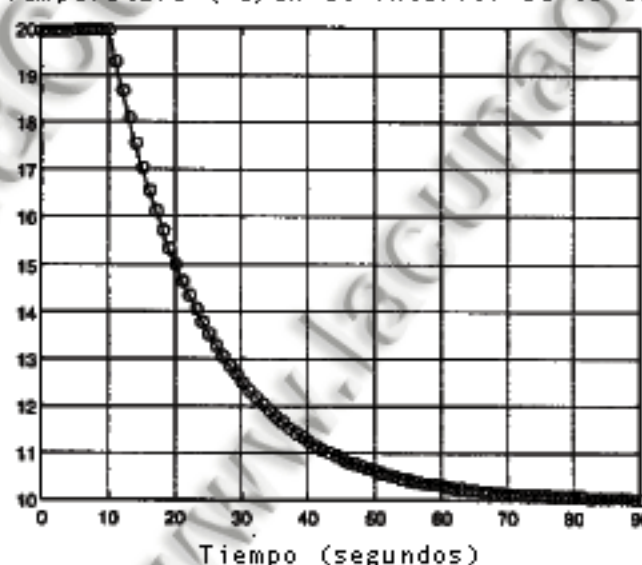
En la figura se muestra el comportamiento temporal que experimentó la temperatura interior cuando el sistema de calefacción pasó de estar generando un valor de 1000 Watios a estar apagado en el instante $t=10s$.

a) Sabiendo que la temperatura exterior permaneció constante durante todo el tiempo que se estuvo midiendo la temperatura interior, ¿cuál fue su valor? Para contestar a esta pregunta no necesita hacer ningún tipo de cálculo, utilice la información gráfica.

b) Utilizar el resultado del apartado (a), la ecuación diferencial y la información gráfica durante el tiempo que la calefacción permaneció encendida para determinar el valor de RT .

c) Utilizar el resultado del apartado (b), la ecuación diferencial y la información gráfica durante el tiempo que la calefacción estuvo apagada para determinar el producto $M \cdot CE$.

Temperatura ($^{\circ}C$) en el interior de la casa



3. Modelo "Cadena de producción manual".

Una fábrica artesana tiene que producir y distribuir diariamente un determinado número de válvulas de admisión; para ello recibe de un proveedor una partida de 1000 piezas brutas diarias para la fabricación de dichas válvulas. En el modelo, con el que se pretende analizar esta cadena de producción, se han hecho las siguientes hipótesis:

- Se distinguen cuatro tipos de piezas: piezas en bruto (PB), piezas acabadas (PA), piezas entregadas (PE) y piezas recicladas (PR).
- El personal de la cadena de producción se divide en operarios y en transportistas. El número de operarios (NO) depende del número de piezas en bruto que tenga en cada momento la fábrica y el número de transportistas (NT) del número de pieza acabadas. Véanse las tablas adjuntas.
- Las piezas acabadas (PA) se entregan (PE), excepto un pequeño porcentaje que por tener algún defecto de fabricación pasan a ser piezas recicladas (PR).
- De las piezas recicladas hay un porcentaje que presentan defectos demasiado grandes y se desechan, el resto se reciclan y pasan nuevamente a piezas en bruto (PB) para la fabricación.

Las ecuaciones que describen el modelos son las siguientes:

$$(1) PBA(t) = \min(PB(t), CAPO \cdot NO(t))$$

$$(2) PAR(t) = FPAR \cdot PA(t)$$

$$(3) PAE(t) = \min(PA(t), CAPT \cdot NT(t))$$

$$(4) PRB(t) = FPRB \cdot PR(t)$$

$$(5) PRD(t) = (1 - FPRB) \cdot PR(t)$$

$$(6) \frac{dPB(t)}{dt} = PRB(t) - PBA(t)$$

$$(7) \frac{dPA(t)}{dt} = PBA(t) - PAR(t) - PAE(t)$$

$$(8) \frac{dPR(t)}{dt} = PAR(t) - PRB(t) - PRD(t)$$

$$(9) \frac{dPE(t)}{dt} = PAE(t)$$

$$(10) NO(t) = f(PB(t))$$

$$(11) NT(t) = g(PA(t))$$

Siendo:

PB, piezas en bruto

PA, piezas acabadas

PE, piezas entregadas

PR, piezas recicladas

PBA, piezas en bruto que pasan a acabadas

PAR, piezas acabadas que se reciclan

PAE, piezas acabadas que se entregan

PRB, piezas recicladas que pasan bruto

PRD, piezas recicladas que se desechan

NO, número de operarios

NT, número de transportistas

CAPO, capacidad del operario (número de piezas que puede acabar un operario a la hora)

CAPT, capacidad del transportista (número de piezas que puede entregar un transportista a la hora)

FPAR, fracción de piezas acabadas que son recicladas por mala fabricación

FPRB, fracción de piezas recicladas que pasan a bruto

min, la función mínimo

f y g son dos funciones no lineales (a tramos rectos) descritas en las tablas adjuntas.

PB	NO
0	0
100	5
400	12
800	17
1000	25

PA	NT
0	0
100	2
400	7
800	10
1000	15

Presentación tabulada de la función no lineal NO = f(PB)

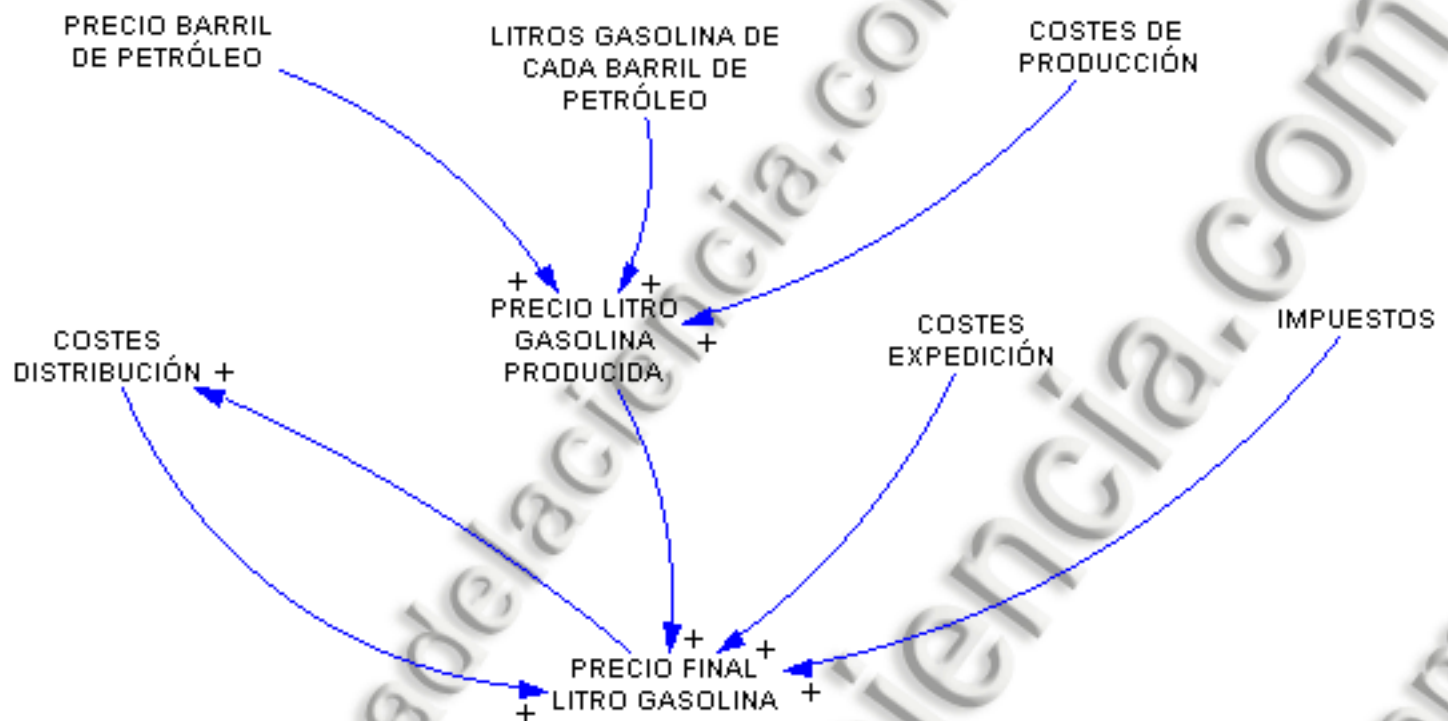
Presentación tabulada de la función no lineal NT = g(PA)

a) Hacer una clasificación razonada de las variables que describen el modelo, especificando las unidades de cada una de ellas, y dibujar el correspondiente diagrama de Forrester.

b) Calcular iterando las veces que sea necesario, al cabo de cuantas horas se terminan las piezas en bruto (se considera que se terminan cuando PB sea menor que uno). ¿Qué porcentaje de piezas se han entregado hasta entonces? Suponer que: FPAR=0.05, FPRB=0.8, CAPO=10 y CAPT=50. Utilizar la aproximación de Euler con $\Delta t=1$ hora y considerar que todas las variables son números reales, es decir, sin redondeo.

c) En las mismas condiciones de simulación del apartado anterior, ¿cuál sería el número de operarios mínimo para terminar con las piezas en bruto en la cuarta hora?

d) Proponga los cambios necesarios en el modelo para introducir un control de calidad de las piezas en bruto, indicando claramente el significado de cada variable nueva que utilice y las ecuaciones que se ven alteradas.



El crecimiento sostenido del precio de la gasolina se produce debido al bucle de realimentación positiva existente entre el precio final del litro de gasolina (PFLG) y los costes de distribución (CD), pues un aumento en el precio final del litro de gasolina aumentará los costes de distribución que a su vez tendrán una influencia positiva sobre el precio final del litro de gasolina aumentando el mismo y este aumento en el precio final afectará nueva y positivamente en los costes de distribución.

a) La gráfica muestra la evolución del estado a lo largo del tiempo. Se parte de un estado inicial $TINT(0) = 20^\circ$ y se tiende a un objetivo $TINT(90) = 10^\circ = x_d$. En este caso se trata de una función monótona decreciente.

NOTA: si hubiésemos partido de un estado inicial 10° y el estado deseado hubiera sido 20° , sería una función creciente. Ambas, monótona creciente y monótona decreciente corresponden a un comportamiento de BUCLE DE REALIMENTACIÓN NEGATIVA, a diferencia el bucle de realimentación positiva que se trata de una función exponencial.

La temperatura exterior, que permanece constante, es la temperatura objetivo, $x_d = 10^\circ$.

b) Determinaremos el valor de RT sabiendo que en $t = 0$ s, $TINT$ permanece constante, es decir $dTINT/dt = 0$. En ese mismo instante $PC = 1000$ Watios, $TEXT = 10^\circ$ y $TINT = 20^\circ$:

$$\frac{dTINT(t)}{dt} = \frac{1}{M \cdot CE} PC(t) - \frac{1}{M \cdot CE \cdot RT} (TINT(t) - TEXT(t))$$

$$0 = \frac{1}{M \cdot CE} 1000 - \frac{1}{M \cdot CE \cdot RT} (20 - 10)$$

$$0 = \frac{1}{M \cdot CE} \left[1000 - \frac{1}{RT} (20 - 10) \right]$$

$$0 = 1000 - \frac{1}{RT} 10 \quad 1000 = \frac{1}{RT} 10$$

$$1000 RT = 10$$

$$RT = 0.01$$

c) Para determinar el producto $M \cdot CE$ consideraremos $t = 20$ s. En este instante $PC = 0$ Watios, $TINT = 15^\circ$, $TEXT = 10^\circ$ y la variación de $TINT$ la podemos calcular con cocientes incrementales por aproximación:

$$\frac{dTINT}{dt} = \frac{\Delta TINT}{\Delta t} = \frac{15 - 17}{20 - 15} = \frac{-2}{5}$$

Sustituyendo:

$$\frac{dTINT(t)}{dt} = \frac{1}{M \cdot CE} PC(t) - \frac{1}{M \cdot CE \cdot RT} (TINT(t) - TEXT(t))$$

$$\frac{-2}{5} = \frac{1}{M \cdot CE} 0 - \frac{1}{M \cdot CE \cdot 0.01} (15 - 10)$$

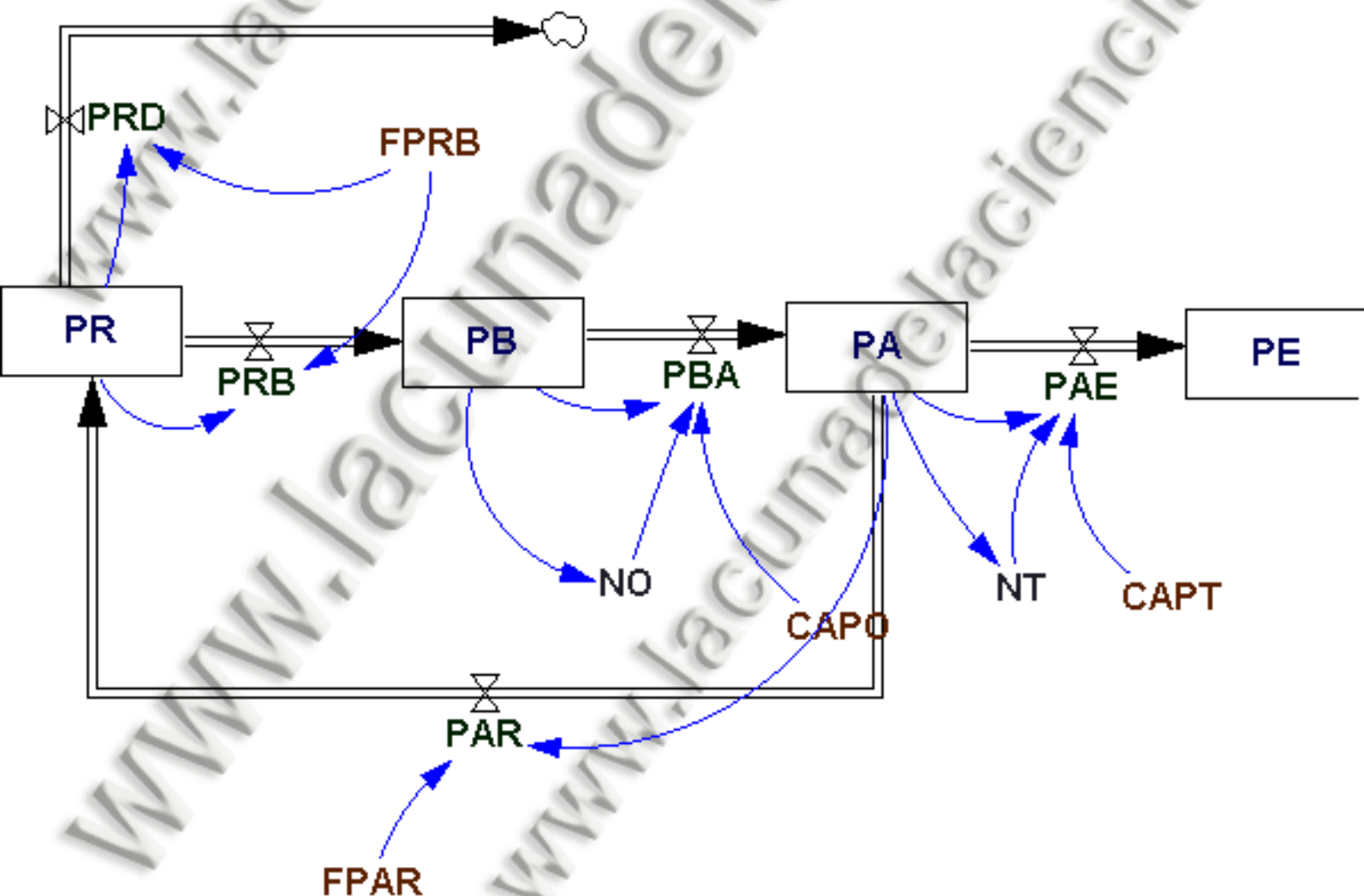
$$\frac{2}{5} = \frac{1}{M \cdot CE \cdot 0.01} (15 - 10)$$

$$2 M \cdot CE \cdot 0.01 = 5 \cdot 5$$

$$M \cdot CE = 25 / 0.02$$

$$M \cdot CE = 1250$$





ECUACIONES PARA LA SIMULACIÓN

- (1) $PBA(t) = \min(PB(t), CAPO\ NO(t))$
- (2) $PAR(t) = FPAR\ PA(t)$
- (3) $PAE(t) = \min(PA(t), CAPT\ NT(t))$
- (4) $PRB(t) = FPRB\ PR(t)$
- (5) $PRD(t) = (1 - FPRB)\ PR(t)$
- (6) $PB(t + \Delta t) = PB(t) + \Delta t \cdot [PRB(t) - PBA(t)]$
- (7) $PA(t + \Delta t) = PA(t) + \Delta t \cdot [PBA(t) - PAR(t) - PAE(t)]$
- (8) $PR(t + \Delta t) = PR(t) + \Delta t \cdot [PAR(t) - PRB(t) - PRD(t)]$
- (9) $PE(t + \Delta t) = PE(t) + \Delta t \cdot PAE(t)$
- (10) $NO(t)$ lo buscaremos en la tabla del enunciado
- (11) $NT(t)$ lo buscaremos en la tabla del enunciado

c) Simulación

CAPO = 10 FPAR = 0.05 CAPT = 50 FPRB = 0.8
PB(0) = 100 PA(0) = 0 PR(0) = 0 PRD(0) = 0

$\Delta t = 1$ hora

Tabla con valores sin aproximar.

t	PB	PA	PR	PE	NO	NT	PBA	PAR	PAE	PRB	PRD
0,00	1000,00	0,00	0,00	0,00	25,00	15,00	250,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1,00	750,00	250,00	0,00	0,00	16,38	9,63	163,75	12,50	250,00	0,00	0,00
2,00	586,25	151,25	12,50	250,00	14,33	8,40	143,28	7,56	151,25	1,00	2,50
3,00	443,97	135,72	16,56	401,25	12,55	7,33	125,50	6,79	135,72	1,33	3,31
4,00	319,80	118,71	18,71	536,97	10,13	5,66	101,29	5,94	118,71	1,50	3,74
5,00	220,01	95,35	19,41	655,68	7,80	4,00	78,00	4,77	95,35	1,55	3,88
6,00	143,56	73,23	18,74	751,03	6,02	2,73	60,16	3,66	73,23	1,50	3,75
7,00	84,89	56,50	17,16	824,26	4,24	1,70	42,45	2,83	56,50	1,37	3,43
8,00	43,82	39,62	15,18	880,77	2,19	0,88	21,91	1,98	39,62	1,21	3,04
9,00	23,12	19,93	12,91	920,39	1,16	0,46	11,56	1,00	19,93	1,03	2,58
10,00	12,59	10,57	10,29	940,32	0,63	0,25	6,30	0,53	10,57	0,82	2,06
11,00	7,12	5,77	7,94	950,88	0,36	0,14	3,56	0,29	5,77	0,63	1,59
12,00	4,20	3,27	6,00	956,65	0,21	0,08	2,10	0,16	3,27	0,48	1,20
13,00	2,58	1,93	4,49	959,92	0,13	0,05	1,29	0,10	1,93	0,36	0,90
14,00	1,65	1,19	3,33	961,86	0,08	0,03	0,82	0,06	1,19	0,27	0,67
15,00	1,09	0,76	2,45	963,05	0,05	0,02	0,55	0,04	0,76	0,20	0,49
16,00	0,74	0,51	1,81	963,81	0,04	0,01	0,37	0,03	0,51	0,14	0,36

Las piezas en bruto se terminan al cabo de 16 horas. Para entonces se han entregado 963 piezas, que supone el 0,96% del total.

NOTA: Para calcular NO y NT suponemos que son funciones no lineales con tramos lineales e interpolamos en cada intervalo:

$$\frac{PB - pbo}{pbr - pbo} = \frac{NO - noo}{nor - noo}$$

$$\frac{PB - pbo}{pbr - pbo} = \frac{NT - nto}{ntr - nto}$$

Donde pb, no y nt se sustituirán por los correspondientes valores de cada intervalo. Así obtendremos:

Si PB está entre 400 y 800:

$$NO = (PB + 560) / 80$$

$$NT = (3 \cdot PB + 1600) / 400$$

Si PB está entre 100 y 400:

$$NO = (7 \cdot PB + 800) / 300$$

$$NT = (PB + 20) / 60$$

Si PB está entre 0 y 100:

$$NO = PB / 20$$

$$NT = PB / 50$$

c) Para terminar las piezas en bruto en la cuarta hora: $PB(4) = 0$.

$$PB(4) = PB(3) + \Delta t [PRB(3) - PBA(3)]$$

$$PB(3) = 443.97$$

$$\Delta t = 1$$

$$PRB(3) = FPRB \cdot PR(3) = 0.8 \cdot 16.56 = 1.33$$

$$PBA(3) = \min(PB(3), CAPO \cdot NO)$$

Las PB todavía no se están agotando, entonces $PBA(3) = CAPO \cdot NO = 10 \cdot NO$

Sustituyendo y despejando:

$$0 = 443.97 + 1 [1.33 - 10NO]$$

$$443.97 - 1.33 = 10 NO$$

$$NO = 44.26$$

El número mínimo de operarios para acabar las piezas en bruto en la cuarta hora será 45.

d) Introduciríamos una variable nueva: piezas brutas que han pasado el control de calidad (PBC) y haríamos cambios en las siguientes ecuaciones:

$$(1) PBA(t) = \min(PBC(t), CAPO \cdot NO(t))$$

$$(6) \frac{d PB(t)}{dt} = PRB(t) - PCC(t) \quad \text{y} \quad \frac{d PBC(t)}{dt} = PCC(t) - PBA(t)$$

$$(10) NO(t) = f(PBC(t))$$

Donde la variable de flujo PCC indica las piezas brutas que pasan el control de calidad.

Por último habría que añadir una nueva ecuación:

$$PCC(t) = TPCC \cdot PB(t)$$

Donde TPCC es la tasa de piezas que pasan el control de calidad.

1. Se pretende analizar la evolución de una determinada población de palomas mediante un modelo que incluya la menos las siguientes variables (ordenadas alfabéticamente):

- Mortalidad de palomas adultas (MPA)
- Mortalidad de palomas jóvenes (MPJ)
- Nuevas palomas (NP)
- Palomas adultas (PA)
- Palomas jóvenes (PJ)
- Paso de palomas jóvenes a adultas (PJA)
- Porcentaje de población con capacidad de reproducción (PPR)
- Palomas reproductoras (PR)
- Población total de palomas (PTP)
- Tasa de maduración de las palomas jóvenes (TMJ)
- Tasa de mortalidad de las palomas jóvenes (TMPJ)
- Tasa de mortalidad de las palomas adultas (TMPA)
- Tasa de reproducción de las palomas (TRP)

Proponer un conjunto de ecuaciones para este modelo y dibujar el correspondiente diagrama de Forrester, justificando el tipo y unidades de todas las variables.

2. La siguiente ecuación diferencial describe el proceso de enfriamiento (pérdida de calor) de cualquier cuerpo (previamente calentado). Representa que la pérdida instantánea de calor es directamente proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo $\{TEMP(t)\}$ y la temperatura ambiente $\{TAMB\}$

$$\frac{d TEMP(t)}{dt} = \frac{1}{FPT} (TEMP(t) - TAMB)$$

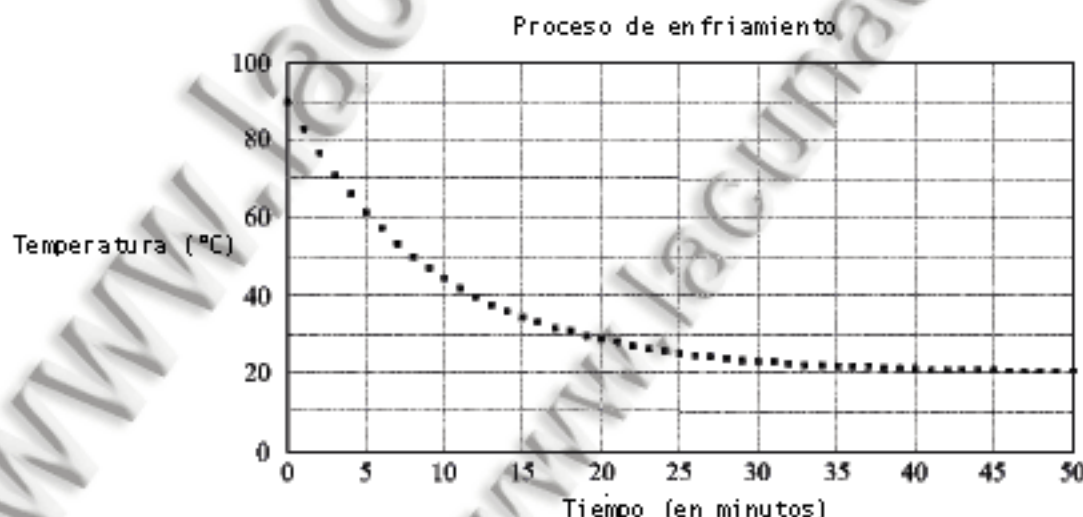
a) En la figura se muestra el comportamiento temporal que experimentó la temperatura de un cuerpo. Utilice la información gráfica para determinar:

La temperatura a la que se calentó el cuerpo.

El valor de la temperatura ambiente.

El factor de pérdidas térmicas FPT que tiene este cuerpo.

b) ¿Qué estructura elemental de las que usted conoce puede reflejar este comportamiento? Justifique su respuesta.



3. Modelo simplificado "flujo migratorio".

En este ejercicio se presenta un modelo simplificado del flujo migratorio entre dos comunidades (países, ciudades, etc...) debido a factores económicos. El modelo quiere representar que: a) la calidad de vida se mide en términos de un reparto equitativo de los recursos económicos de cada comunidad entre sus miembros, b) el flujo entre comunidades está provocado por la diferencia entre las calidades de vida de ambas poblaciones.

El modelo está descrito por las siguientes ecuaciones:

$$(1) \frac{d P_1(t)}{dt} = -FN_{12}(t)$$

$$(2) \frac{d P_2(t)}{dt} = FN_{12}(t)$$

$$(3) CV_1(t) = \frac{RE_1}{P_1(t)}$$

$$(4) CV_2(t) = \frac{RE_2}{P_2(t)}$$

$$(5) FN_{12}(t) = TM (CV_2(t) - CV_1(t))$$

Siendo:

CV₁, calidad de vida de la comunidad 1

CV₂, calidad de vida de la comunidad 2

FN₁₂, flujo migratorio neto de la comunidad 1 hacia la 2

P₁, población de la comunidad 1

P₂, población de la comunidad 2

RE₁, recursos económicos mensuales de la comunidad 1

RE₂, recursos económicos mensuales de la comunidad 2

TM, la tasa migratoria entre las dos comunidades

a) Justificar que el modelo propuesto es coherente con el enunciado y recoge bastante bien la interacción entre las dos comunidades.

b) Clasificar las variables y resumir en el correspondiente diagrama de Forrester el conjunto total de ecuaciones del modelo.

c) Suponiendo que: RE₁ = RE₂ = 1 millón de euros/mes, TM=1000 personas/euro, la comunidad 1 está constituida por 100 mil personas y la comunidad 2 por 50 mil personas. Simular la evolución de las variables del modelo, durante al menos 15 meses, utilizando la aproximación de Euler con Δt=1 mes como intervalo de simulación y redondeo a un decimal en las calidades de vida.

Modelo población de palomas.

DEFINICIÓN DE VARIABLES:

- Mortalidad de palomas adultas (MPA)
- Mortalidad de palomas jóvenes (MPJ)
- Nuevas palomas (NP)
- Palomas adultas (PA)
- Palomas jóvenes (PJ)
- Paso de palomas jóvenes a adultas (PJA)
- Porcentaje de población con capacidad de reproducción (PPR)
- Palomas reproductoras (PR)
- Población total de palomas (PTP)
- Tasa de maduración de las palomas jóvenes (TMJ)
- Tasa de mortalidad de las palomas jóvenes (TMPJ)
- Tasa de mortalidad de las palomas adultas (TMPA)
- Tasa de reproducción de las palomas (TRP)

CLASIFICACIÓN DE LAS VARIABLES Y UNIDADES:

- Variables de estado:

PJ: palomas

PA: palomas

- Variables de flujo:

MPJ: palomas / mes

MPA: palomas / mes

PJA: palomas / mes

NP: palomas / mes

- Constantes:

TRP: mes^{-1}

PPR: %

TMPJ: mes^{-1}

TMJ: mes^{-1}

TMA: mes^{-1}

- Variable auxiliar:

PR: palomas

ECUACIONES

$$(1) \frac{dPJ}{dt} = NP(t) - MPJ(t) - PJA(t)$$

$$(2) \frac{dPA}{dt} = PJA(t) - MPA(t)$$

$$(3) NP(t) = TRP \cdot PR(t)$$

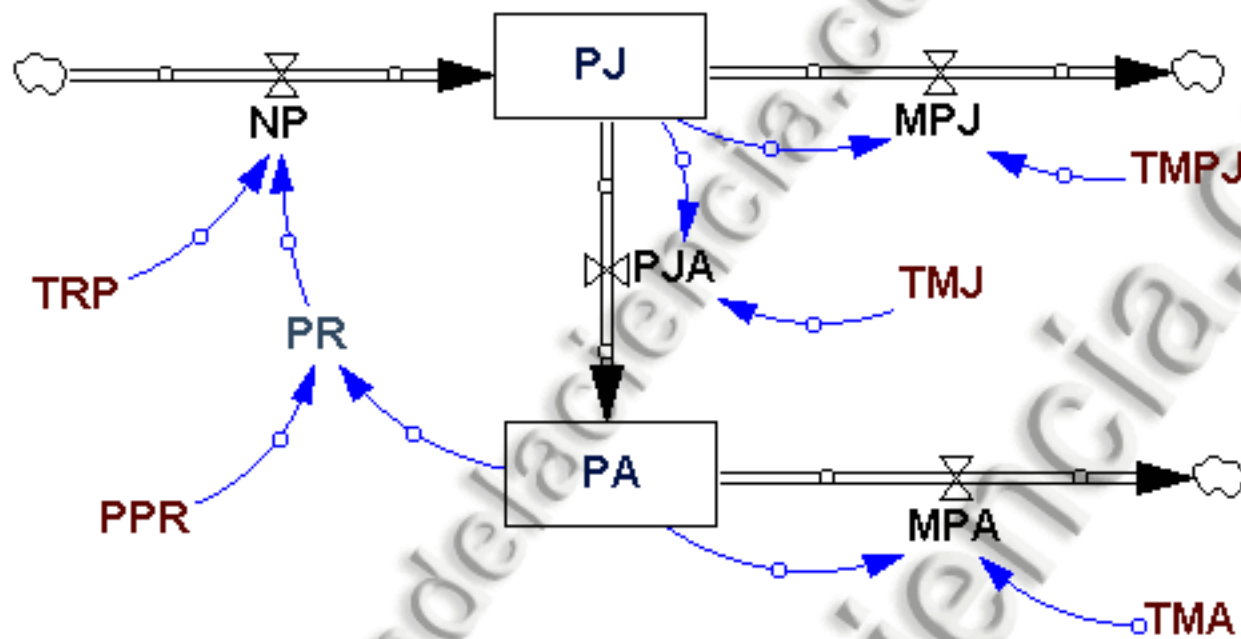
$$(4) PR(t) = PPR \cdot PA(t)$$

$$(5) MPJ(t) = TMPJ \cdot PJ(t)$$

$$(6) PJA(t) = TMJ \cdot PJ(t)$$

$$(7) MPA(t) = TMA \cdot PA(t)$$

DIAGRAMA DE FORRESTER:



a) La gráfica muestra la evolución del estado a lo largo del tiempo. Se parte de un estado inicial $x(0) = 90^\circ$ y se tiende a un objetivo $x(50) = 20^\circ = x_d$. En este caso se trata de una función monótona decreciente.

NOTA: si hubiésemos partido de un estado inicial 20° y el estado deseado hubiera sido 90° , sería una función creciente. Ambas, monótona creciente y monótona decreciente corresponden a un comportamiento de BUCLE DE REALIMENTACIÓN NEGATIVA, a diferencia el bucle de realimentación positiva que se trata de una función exponencial.

La formulación matemática de un bucle de realimentación negativa es:

$$F = k(x_d - x)$$

Observemos la ecuación diferencial del enunciado que describe el flujo de nuestro proceso de enfriamiento:

$$\frac{d \text{TEMP}(t)}{dt} = -\frac{1}{\text{FPT}}(\text{TEMP}(t) - \text{TAMB})$$

De una simple comparación deducimos que $k = 1/\text{FPT}$.

Para calcular usamos la fórmula de la trayectoria de este tipo de sistemas:

$$x(t) = x_d + [x(0) - x_d] \cdot e^{-kt}$$

En la gráfica vemos que en el instante $t = 5$, el valor de la temperatura es 60° . Sustituimos:

$$60 = 20 + [90 - 20] \cdot e^{-k5}$$

$$60 - 20 = [90 - 20] \cdot e^{-k5}$$

$$40 = 70 \cdot e^{-k5}$$

$$40 / 70 = e^{-k5}$$

$$0.57 = e^{-k5}$$

$$\ln 0.57 = -5k$$

$$-0.56 = -5k$$

$$k = 0.56/5 \approx 0.1$$

Como lo que nos piden es el valor de FPT:

$$\text{FPT} = 1/k = 1/0.1 = 10$$

Respuestas:

Valor de la temperatura a la que se calentó el cuerpo: 90°

Valor de la temperatura ambiente: 20°

Factor de pérdidas térmicas: 10

b) Siempre que se trate de un sistema con un comportamiento que tiende a un objetivo se trata de un bucle de realimentación negativa.

Ejercicios relacionados: 7,8,9,10 de la colección de ejercicios resueltos del Equipo docente. En ellos para los cálculos de k se utilizan las gráficas de las trayectorias de las cuales no disponemos en el presente ejercicio de examen (se nos da la evolución de estado).

Modelo flujo migratorio.

a) Justificación.

- La población de la comunidad 1 disminuye si hay flujo de la comunidad 1 a la comunidad 2.
- La población de la comunidad 2 aumenta si hay flujo de la comunidad 1 a la 2.
- y (4) las calidades de vida respectivas en ambas comunidades dependen directamente de los recursos existentes por persona de cada comunidad.

(5) El flujo migratorio neto de la comunidad 1 hacia la 2 es función de una tasa migratoria y las calidades de vida respectivas de ambas comunidades.

DEFINICIÓN DE VARIABLES:

CV1, calidad de vida de la comunidad 1

CV2, calidad de vida de la comunidad 2

FN12, flujo migratorio neto de la comunidad 1 hacia la 2

P1, población de la comunidad 1

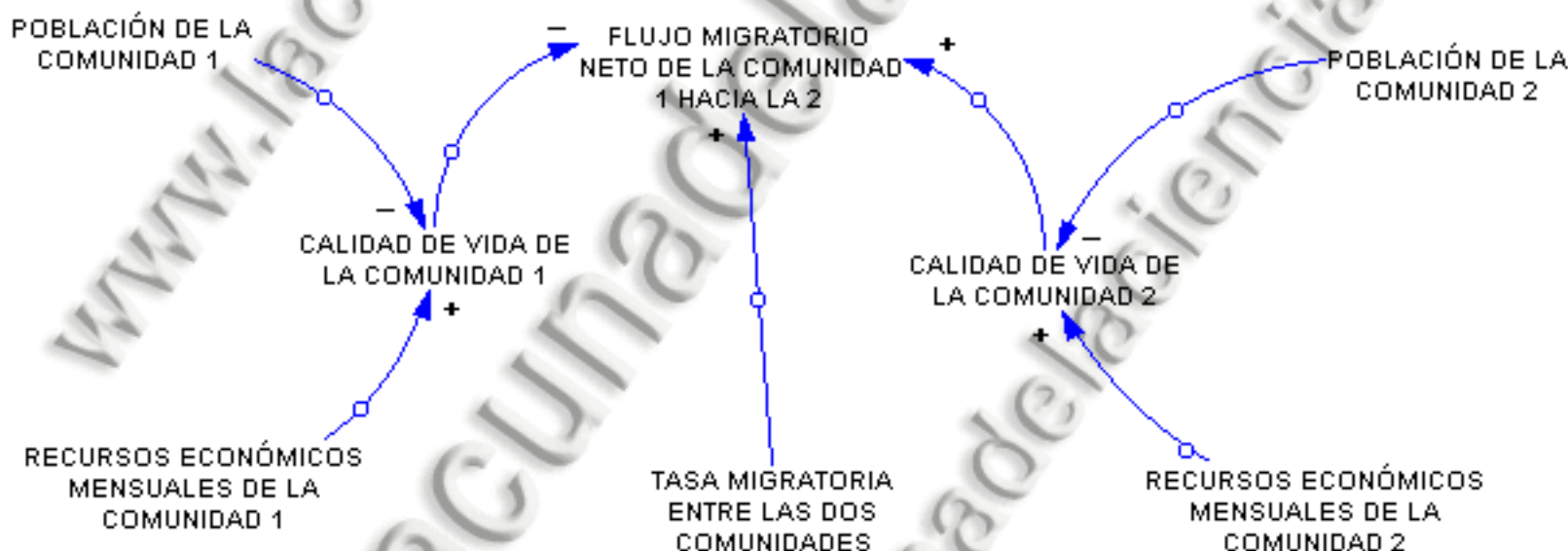
P2, población de la comunidad 2

RE1, recursos económicos mensuales de la comunidad 1

RE2, recursos económicos mensuales de la comunidad 2

TM, la tasa migratoria entre las dos comunidades

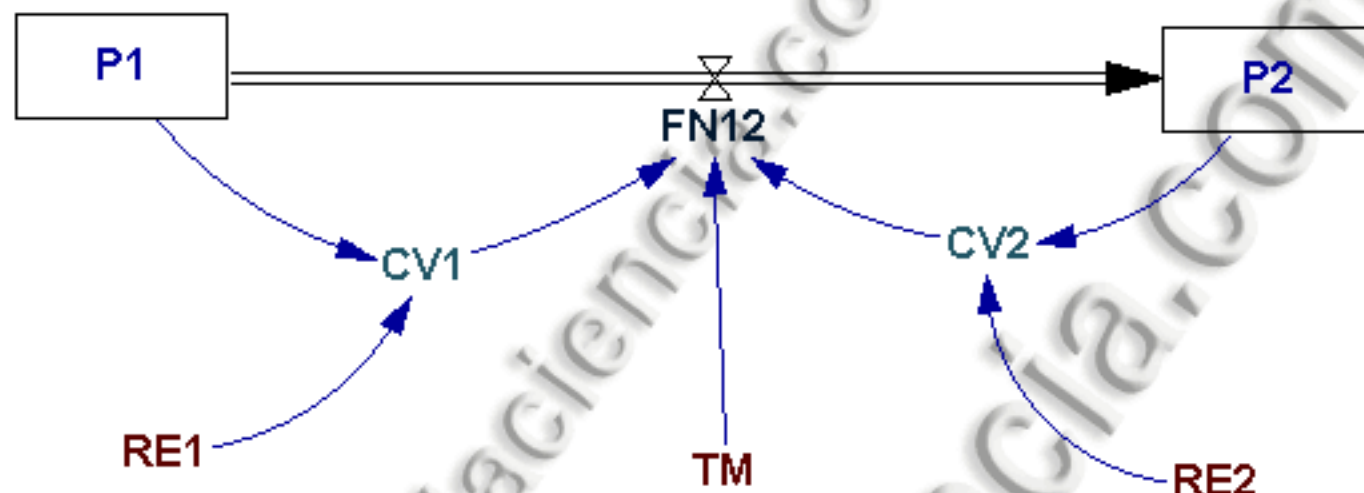
DIAGRAMA DE INFLUENCIAS



b) CLASIFICACIÓN DE LAS VARIABLES Y UNIDADES:

- Variables de estado:
 - P1: personas
 - P2: personas
- Variables de flujo:
 - FN12: personas / mes
- Constantes:
 - RE1: euros
 - RE2: euros
 - TM: personas² / mes-euro
- Variable auxiliar:
 - CV1: euros / persona
 - CV2: euros / persona

DIAGRAMA DE FORRESTER:



ECUACIONES PARA LA SIMULACIÓN

- (1) $P1(t + \Delta t) = P1(t) - \Delta t \cdot FN12(t)$
- (2) $P2(t + \Delta t) = P2(t) + \Delta t \cdot FN12(t)$
- (3) $CV1(t) = RE1 / P1(t)$
- (4) $CV2(t) = RE2 / P2(t)$
- (5) $FN12(t) = TM (CV2(t) - CV1(t))$

c) Simulación

RE1 = RE2 = 1 millón de euros / mes

TM = 1000 personas / euro

P1(0) = 100 mil personas

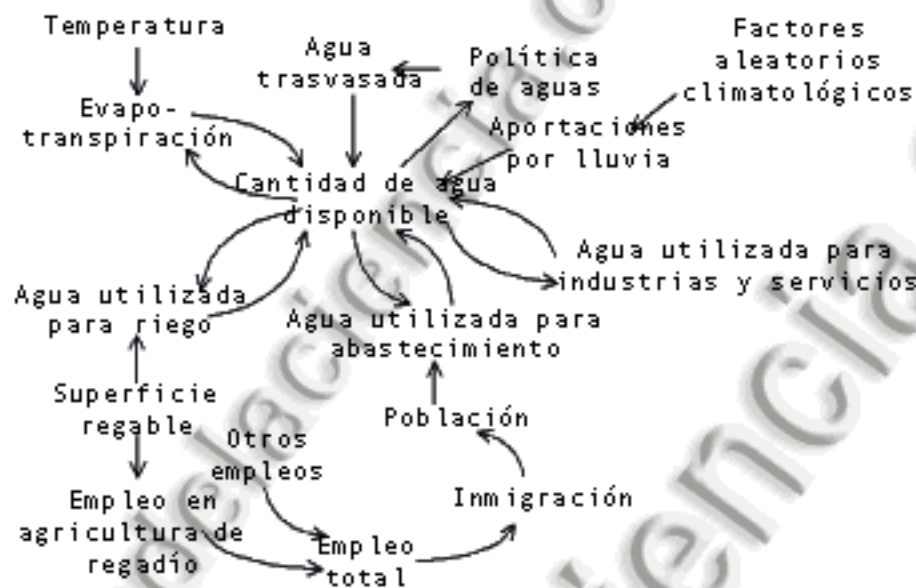
P2(0) = 50 mil personas

$\Delta t = 1$ mes

Tabla con valores redondeados a un decimal en las calidades de vida.

t	P1	P2	FN12	CV1	CV2
0	100000	50000	10000	10	20
1	90000	60000	5600	11,1	16,7
2	84400	65600	3400	11,8	15,2
3	81000	69000	2200	12,3	14,5
4	78800	71200	1300	12,7	14
5	77500	72500	900	12,9	13,8
6	76600	73400	500	13,1	13,6
7	76100	73900	400	13,1	13,5
8	75700	74300	300	13,2	13,5
9	75400	74600	100	13,3	13,4
10	75300	74700	100	13,3	13,4
11	75200	74800	100	13,3	13,4
12	75100	74900	100	13,3	13,4
13	75000	75000	0	13,3	13,3
14	75000	75000	0	13,3	13,3
15	75000	75000	0	13,3	13,3

1. Para analizar la disponibilidad de agua en una CUENCA HIDROGRÁFICA, se ha construido el siguiente diagrama de influencias en el que faltan por incluir todos los signos. Se pide:



a) Completar el diagrama de influencias, justificando de forma cualitativa cada una de las relaciones y sus signos.

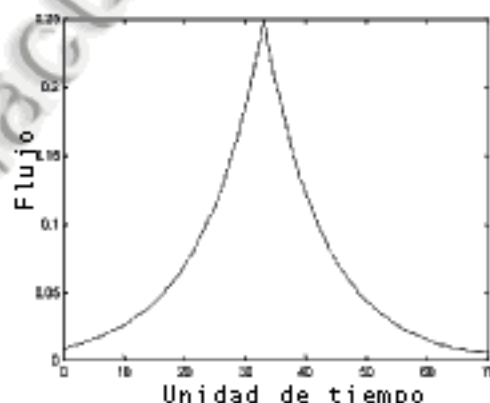
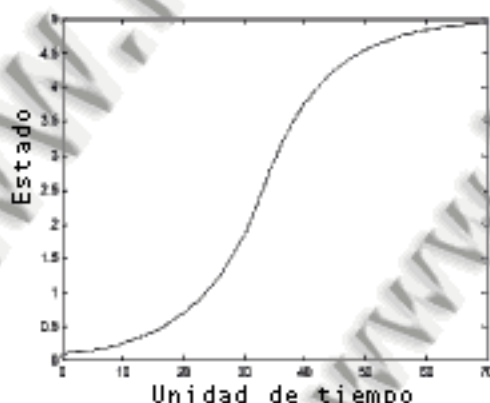
b) ¿Qué relaciones del modelo se prestan en su opinión a cierta ambigüedad, es decir, pueden presentar el signo + en ciertos casos y negativo en otros? Y ¿qué relaciones pueden venir afectadas por un cierto retraso (no representado en el diagrama)?

c) ¿Qué otras variables del modelo podrían verse influenciadas por la política de aguas? Justifique su respuesta.

2. Las figuras muestran la evolución temporal de las variables (estado y flujo) de un bucle elemental de realimentación.

a) ¿Qué tipo de relación debe existir entre el estado y el flujo para que el estado presente el crecimiento en S de la izquierda?

b) Razonar sobre la estructura que tendría el modelo completo, trazando el correspondiente diagrama de Forrester.



3. Modelo "Edificación de viviendas".

En este ejercicio se pretende modelar el proceso de edificación de viviendas en un área urbana. El modelo viene descrito por las siguientes cuatro ecuaciones:

$$(1) DV(t) = \frac{V(t)}{VMV}$$

$$(2) CV(t) = V(t) MVS(t) TNCV$$

$$(3) \frac{dV(t)}{dt} = CV(t) - DV(t)$$

$$(4) FO(t) = \frac{V(t) SPV}{S}$$

Y la tabla:

FO	MVS
0	0.4
0.1	0.7
0.2	1
0.3	1.25
0.4	1.45
0.5	1.5
0.6	1.5
0.7	1.4
0.8	1
0.9	0.5
1	0

Siendo:

V, el número de viviendas

CV, la construcción de viviendas

DV, la demolición de viviendas

FO, el factor de ocupación del terreno

TNCV, la tasa normal de construcción de viviendas

S, la superficie edificable

SPV, el factor de repercusión de una vivienda sobre la superficie edificable

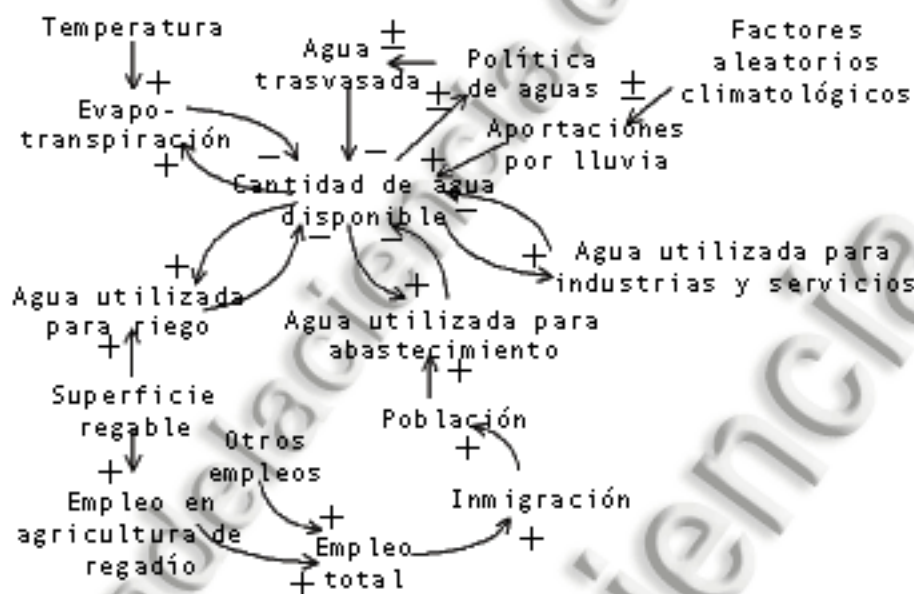
VMV, la vida media de las viviendas

MVS, el multiplicador de viviendas

- Dibujar el diagrama de influencias, razonando todas y cada una de las relaciones. Se recomienda ayudarse de las ecuaciones del modelo.
- Hacer una clasificación razonada de las variables que describen el modelo, especificando las unidades de cada una de ellas, y dibujar el correspondiente diagrama de Forrester.
- Iterar al menos 10 veces para observar si el número de viviendas tiende a un valor en estado estacionario.

Las condiciones de simulación son:

- Inicialmente hay 7396 viviendas.
 - La vida media de las viviendas es de 75 años.
 - La tasa normal de construcción vale 0.05.
 - La superficie edificable está limitada a 1000 m².
 - El factor de repercusión de una vivienda sobre la superficie edificable vale 0.1.
 - El intervalo de simulación Δt es de 1 año.
 - En las variables que no tengan sentido los decimales, se redondeará al entero menor.
- Determinar analíticamente el valor que tendrá el multiplicador de viviendas (MVS) en el estado estacionario bajo las condiciones de simulación del apartado (c).



a) Tanto la evapo-transpiración, como el agua utilizada para riego, como el agua utilizada para abastecimiento y también el agua utilizada para industrias y servicios influyen en la cantidad de agua disponible con sendos bucles de realimentación negativa, con un lazo de influencia negativa desde cada una de las variables sobre la cantidad de agua disponible y un lazo de influencia positiva desde la cantidad de agua disponible a cada una de las variables anteriormente mencionadas. Por ejemplo un aumento/disminución en la evapo-transpiración provocará una menor/mayor cantidad de agua disponible y un aumento/ disminución de la cantidad de agua disponible un aumento/disminución en la evapo-transpiración.

- El aumento/disminución de temperatura influye positivamente en una mayor/menor evapo-transpiración.
- El aumento/disminución de superficie regable influye positivamente tanto en la cantidad de agua utilizada para el riego como en el empleo en la agricultura de regadío.
- El empleo total se ve influido positivamente tanto por el empleo en la agricultura de regadío como por otros empleos.
- El empleo total influye positivamente en la inmigración y ésta en la población que a su vez influye de manera positiva en la cantidad de agua utilizada para abastecimiento.
- Tanto la cantidad de agua trasvasada como las aportaciones por lluvia influyen ambas en la cantidad de agua disponible de manera negativa y positiva respectivamente.
- Con respecto las relaciones entre la política de aguas cantidad de agua disponible y agua trasvasada pueden prestarse a cierta ambigüedad como se verá en el apartado b), lo mismo sucede con la influencia de los factores aleatorios climatológicos sobre las aportaciones por lluvias.

b) Las relaciones entre la política de aguas cantidad de agua disponible y agua trasvasada pueden prestarse a cierta ambigüedad pues según la política adoptada podría tener una influencia negativa o positiva, así si se decide que a una mayor/menor cantidad de agua disponible se aumentará/disminuirá la cantidad de agua trasvasada esta influencia será positiva y si se decide que a una mayor/menor cantidad de agua disponible se disminuirá/aumentará la cantidad de agua trasvasada la influencia será negativa.

La influencia de los factores aleatorios climatológicos sobre las aportaciones por lluvias también es ambigua, pues depende del factor climatológico considerado: a mayor/menor buen tiempo menor/mayor aportación por lluvia (influencia negativa); pero si consideramos a mayor/menor lluvia mayor/menor aportación por lluvia (influencia positiva).

En cuanto a las relaciones que pueden verse afectadas por un cierto retraso están aquellas en las que interviene la toma de decisiones. En el presente modelo la decisión de cual será la actuación de la política de aguas y la decisión de inmigrar por un mayor empleo total disponible.

- a) Para que en un sistema de primer orden presente un crecimiento en S es necesario que exista una función no lineal en la realimentación de nivel, es decir, el estado x variará en función del Flujo que a su vez es función no lineal del estado x .

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(t) ; F(t) = k R(x(t))$$

donde $R(t)$ es la función no lineal tal que
 $R(t) = x(t)$ si $x(t) \leq x_d/2$
 $R(t) = x_d - x(t)$ si $x(t) > x_d/2$

La expresión matemática que relaciona el flujo con el estado se puede expresar:

$$F(t) = k x(t) \quad \text{si } x(t) \leq x_d/2$$

$$F(t) = k (x_d - x(t)) \quad \text{si } x(t) > x_d/2$$

- b) Echemos un vistazo a las gráficas del enunciado.

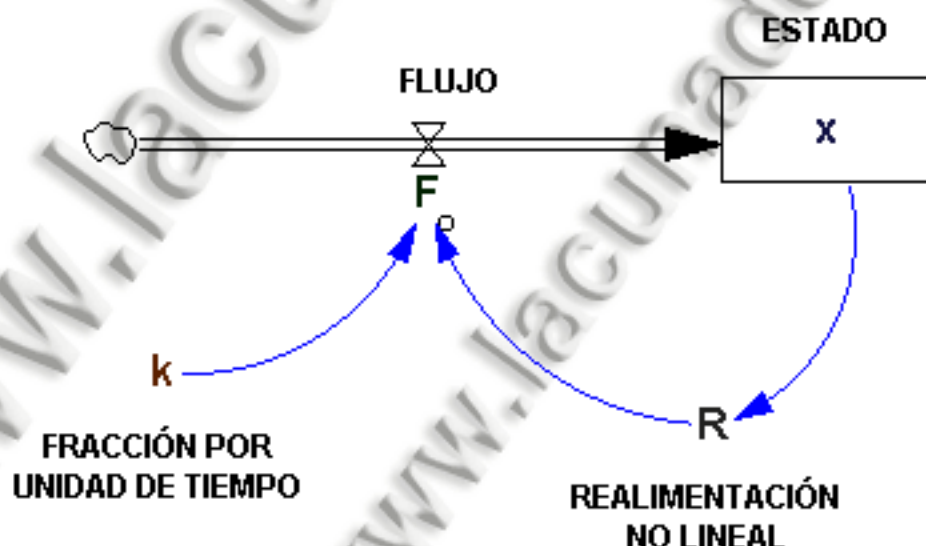
En un instante de tiempo $t=10$ $x(10)=0,25$ (dato extraído de la gráfica de la izq)
 $F(10)=0,0025$ (dato extraído gráfica derecha)

Por tanto si $F(10) = k x(10)$; $0,0025 = k 0,05$; $k=0,1$

Por otra parte de la gráfica de la izq obtenemos dato $x_d=5$

En nuestro modelo $F(t) = 0,1 x(t)$ si $x(t) \leq 2,5$
 $F(t) = 0,1 (5 - x(t))$ si $x(t) > 2,5$

El sistema presentará un crecimiento exponencial hasta el estado medio (2,5) y flujo máximo (0,25), la relación entre el flujo y el estado, en este tramo, es la de un bucle elemental de realimentación positiva, y a partir de este instante el sistema evolucionará al estado deseado (5) de forma asintótica siendo la relación entre el flujo y el estado, en este otro tramo, la de un bucle elemental de realimentación negativa. La no linealidad hace que la realimentación sea positiva o negativa en función de que el nivel esté por debajo o por encima del valor al que corresponde el flujo máximo. El comportamiento del sistema será similar al crecimiento SIGMOIDAL.

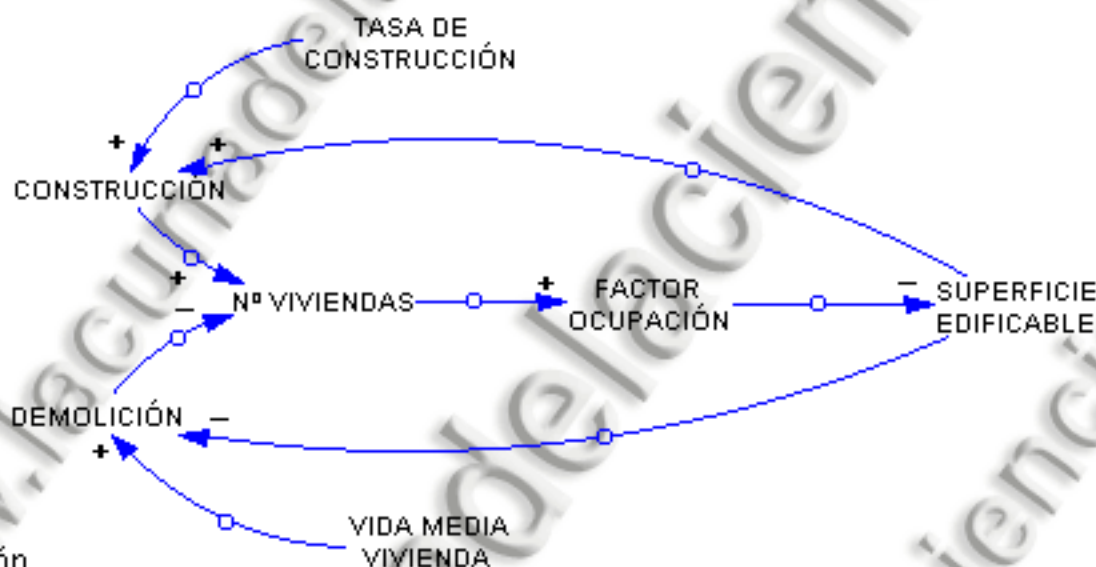


Modelo edificación de viviendas.

DEFINICIÓN DE VARIABLES:

V, el número de viviendas
CV, la construcción de viviendas
DV, la demolición de viviendas
FO, el factor de ocupación del terreno
TNCV, la tasa normal de construcción de viviendas
S, la superficie edificable
SPV, el factor de repercusión de una vivienda sobre la superficie edificable
VMV, la vida media de las viviendas
MVS, el multiplicador de viviendas

a) DIAGRAMA DE INFLUENCIAS



Justificación.

A mayor número de viviendas construidas, mayor será el número total de viviendas. Este crecimiento está regulado por el factor de ocupación que influirá negativamente en la superficie edificable y determinará una mayor o menor superficie, un mayor o menor número de construcción de viviendas (influencia positiva).

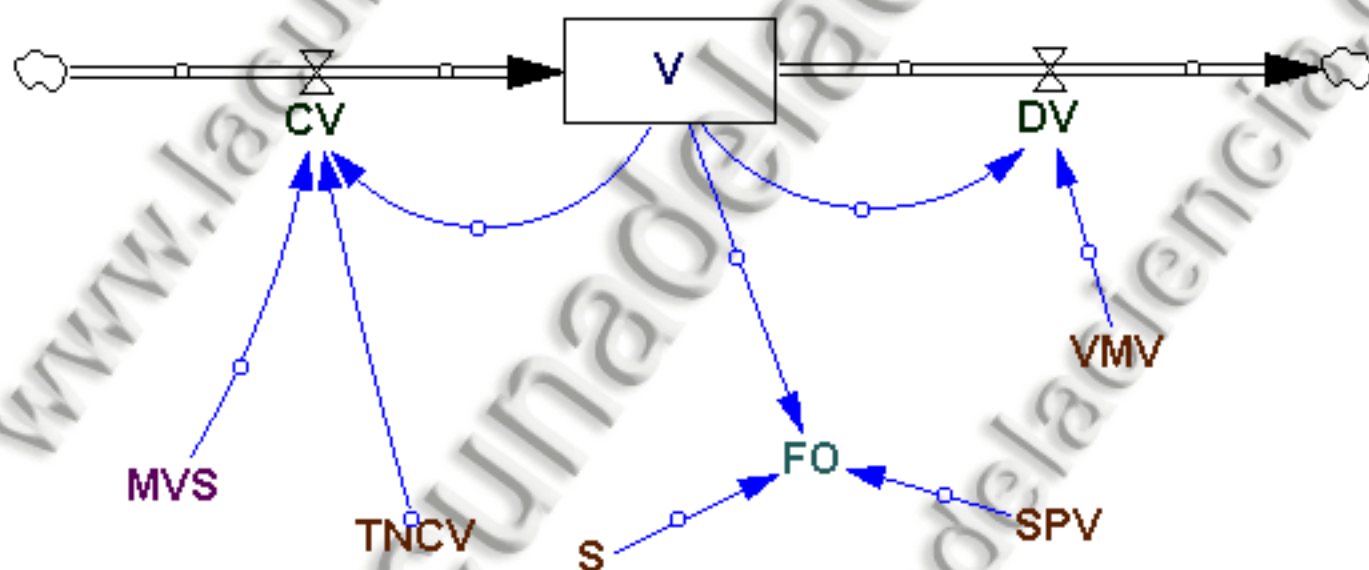
En cuanto al número de viviendas demolidas, a mayor/menor número de demolidas, menor/mayor será el número de viviendas totales (influencia negativa).

Por otra parte, el factor de ocupación y en consecuencia la superficie edificable influye negativamente en el número de viviendas demolidas, pues una mayor superficie edificable, hará que las demoliciones sean menores.

b) CLASIFICACIÓN DE LAS VARIABLES Y UNIDADES:

- Variables de estado:
V: viviendas
- Variables de flujo:
CV: viviendas/año
DV: viviendas/año
- Constantes:
VMV: años
TNCV: adimensional
SPV: adimensional
S: m^2
- Variables auxiliares:
FO: viviendas / m^2
- Variables exógenas:
MSV: $año^{-1}$

DIAGRAMA DE FORRESTER:



ECUACIONES PARA LA SIMULACIÓN

- (1) $DV(t) = V(t) / VMV$
- (2) $CV(t) = V(t) \cdot MSV(t) \cdot TNCV$
- (3) $V(t + \Delta t) = V(t) + \Delta t \cdot (CV(t) - DV(t))$
- (4) $FO(t) = V(t) \cdot SPV / S$

c) Simulación

$$VMV = 75$$

$$TNCV = 0.05$$

$$S = 1000$$

$$SPV = 0.1$$

$$V(0) = 7396$$

$$\Delta t = 1 \text{ año}$$

Las variables V, CV y DV están aproximadas al menor entero y FO a 1 decimal.

t	V	FO	CV	DV	MVS
0	7396	0.7	517	98	1.4
1	7815	0.7	547	104	1.4
2	8258	0.8	412	110	1
3	8560	0.8	428	114	1
4	8874	0.8	443	118	1
5	9199	0.9	229	122	0.5
6	9306	0.9	232	124	0.5
7	9414	0.9	235	125	0.5
8	9524	0.9	238	126	0.5
9	9636	0.9	240	128	0.5
10	9748	0.9	243	129	0.5
11	9862	0.9	246	131	0.5
12	9977	0.9	249	133	0.5
13	10093	1	0	134	0

Como se puede ver no tiende a un estado estacionario.

d) En el estado estacionario no habrá variación de V, es decir, $dV/dt = 0$

$$0 = CV - DV$$

$$0 = V \cdot MVS \cdot TNCB - V / VMV$$

$$0 = V \cdot (MVS \cdot TNCB - 1 / VMV)$$

$$0 = MVS \cdot TNCB - 1 / VMV$$

$$0 = VMV \cdot MVS \cdot TNCB - 1$$

$$VMV \cdot MVS \cdot TNCB = 1$$

$$MVS = 1 / (VMV \cdot TNCB)$$

$$MVS = 1 / 75 \cdot 0.05$$

$$MVS = 0.2667$$

1. Se pretende estudiar, con un modelo y en simulación, el tiempo de búsqueda de un computador central, que almacena información sobre todos los libros de una biblioteca, y al que están conectados otros computadores que hacen de puntos de consulta. La dirección de la biblioteca utiliza el tiempo de búsqueda para decidir el número de puestos de consultas bibliográficas que va a haber en cada momento, entre un mínimo de 2 y un máximo de 6 puestos. Pero el computador central también está dotado de un sistema de decisión automática para que cuando el tiempo de búsqueda aumente trate de contrarrestarlo poniendo más recursos propios a disposición de las consultas, y por tanto atienda más consultas por minuto. El modelo está descrito por las siguientes variables:

CAM consultas bibliográficas atendidas por minuto

CBA Consultas bibliográficas acumuladas

NCM Numero de consultas bibliográficas por minuto

NPC Número de puestos de consulta

TB Tiempo de búsqueda en minutos, medido como el tiempo transcurrido desde que un puesto de consulta solicita información de un libro y ésta le es satisfecha

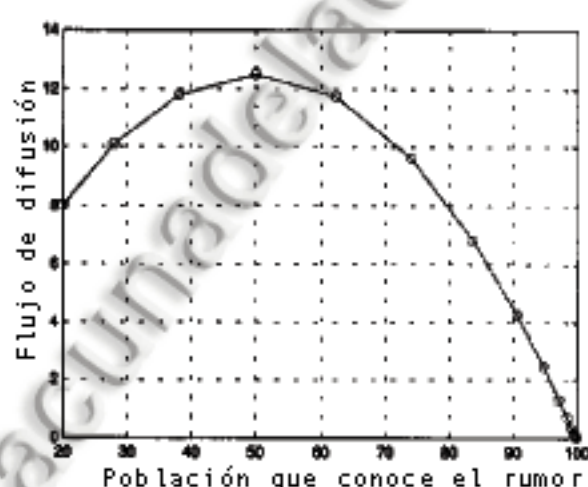
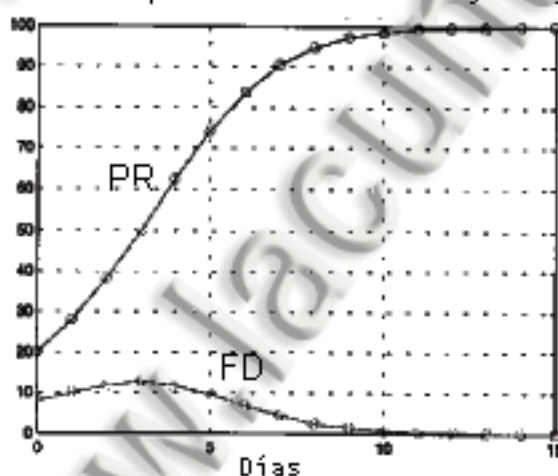
TCP Tasa de consultas por puesto.

a) Dibujar el diagrama de influencias, justificando de forma cualitativa cada una de las relaciones y signos que aparezcan.

b) Analizar de forma cualitativa la estabilidad de cada uno de los bucles que se forman y la del sistema en su conjunto.

2. En la figura de la izquierda se muestra el comportamiento temporal de las dos variables fundamentales (la Población que conoce un rumor y el Flujo de difusión) en el modelo de difusión de un cierto rumor en una población finita. Y en la figura de la derecha se muestra la relación que existe entre ellas.

Población que conoce el rumor y flujo de difusión



a) ¿A qué arquetipo de los estudiados corresponde el comportamiento de la variable de estado? Establecer el conjunto de ecuaciones que pueden representar a este modelo, especificando el significado y las unidades de cada variable.

b) utilizar la información gráfica de las figuras para determinar los parámetros que definen este modelo.

3. Modelo "Cadena de montaje".

Con el siguiente conjunto de ecuaciones se pretende modelar el funcionamiento de una cadena de montaje. La cadena pertenece a una pequeña empresa que monta dos tipos de equipos electrónicos bajo pedidos; el modelo básico y el modelo ampliado. El modelo ampliado se fabrica a partir de un modelo básico, incorporando las correspondientes ampliaciones. Para esta tarea la empresa cuenta con una plantilla de empleados temporales sólo están preparados para montar los equipos básicos. La plantilla de montaje está dimensionada considerando que los empleados temporales suelen tener una tasa de montaje algo menor que la de los empleados fijos y que es muy importante atender todos los pedidos recibidos. Con el fin de soportar cualquier eventualidad (aumento de pedidos o enfermedad de los empleados, etc ...) la empresa dispone de un cierto stock de ambos equipos.

$$(1) \text{MEB}(t) = \text{TMEBEF} - \text{EFMB}(t) + \text{TMET} \cdot \text{ET}(t)$$

$$(2) \text{EEB}(t) = \min(\text{PEB}(t), \text{EB}(t))$$

$$(3) \text{MA}(t) = \begin{cases} \text{TMA} - \text{EFMA}(t) & \text{si } (\text{PEB}(t) + \text{TMA} - \text{EFMA}(t)) \leq \text{EB}(t) \\ \text{EB}(t) - \min(\text{PEB}(t), \text{EB}(t)) & \text{si } (\text{PEB}(t) + \text{TMA} - \text{EFMA}(t)) > \text{EB}(t) \end{cases}$$

$$(4) \text{EEA}(t) = \min(\text{PEA}(t), \text{EA}(t))$$

$$(5) \frac{d\text{EB}(t)}{dt} = \text{MEB}(t) - \text{EEB}(t) - \text{MA}(t)$$

$$(6) \frac{d\text{EA}(t)}{dt} = \text{MA}(t) - \text{EEA}(t)$$

Siendo:

EA: Stock de equipos con ampliación

EB: Stock de equipos básicos

EEA: Entregas de equipos con ampliación

EEB: Entregas de equipos básicos

EFMA: Empleados fijos en el montaje de ampliaciones

EFMB: Empleados fijos en el montaje básico

ET: Empleados temporales

MA: Montaje de ampliaciones

MEB: Montaje de equipos básicos

min: La función mínimo

PEA: Pedidos de equipos con ampliación

PEB: Pedidos de equipos básicos

TMA: Tasa de montaje de las ampliaciones

TMEBEF: Tasa de montaje de los equipos básicos por empleados fijos

TMET: Tasa de montaje de los empleados temporales

a) Justificar que el modelo propuesto es coherente con el enunciado.

b) Clasificar las variables, indicando sus unidades, y resumir en el correspondiente diagrama de Forrester el conjunto total de ecuaciones del modelo.

c) Suponiendo que $\text{TMEBEF}=4$, $\text{TMET}=1.5$, $\text{TMA}=4$. Comprobar que la empresa puede atender un pedido diario de 10 equipos básicos y 8 equipos con ampliaciones, con ocho empleados fijos repartidos de la siguiente forma $\text{EFMB}=6$, $\text{EFMA}=2$ y cuatro empleados temporales ($\text{ET}=4$), sin que se produzcan alteraciones en su almacén, que dispone de 25 equipos básicos ($\text{EB}=25$) y 10 equipos con ampliaciones ($\text{EA}=10$).

d) Partiendo de las mismas condiciones del apartado (c) simular lo que ocurre en la cadena de montaje si en el segundo día caen enfermos dos de los empleados fijos que estaban destinados a montar equipos básicos. Se recomienda utilizar la aproximación de Euler con $\Delta t=1$ día como intervalo de simulación y simular únicamente diez días. ¿Es cierto que la empresa logra atender todas las peticiones de equipos básicos pero no las de equipos ampliados? ¿Qué ha ocurrido con los stocks?

e) La empresa está estudiando incorporar una política de distribución de empleos fijos y de contratación de empleados temporales en función de los pedidos recibidos. Justificar que añadiendo la variable $\text{EF}(t)$, que represente el número total de empleados fijos, y las siguientes tres ecuaciones se puede analizar esa política de contratación antes de llevarla a la práctica.

$$(7) \text{EFMA}(t) = \frac{\text{PEA}(t)}{\text{TMA}}$$

$$(8) \text{EFMB}(t) = \text{Ef}(t) - \text{EFMA}(t)$$

$$(9) \text{ET}(t) = \text{integer} \left(\text{delay} \left(\frac{\text{PEB}(t) + \text{PEA}(t) - \text{TMEBEF} \cdot \text{EFMB}(t)}{\text{TMET}}, 2 \right) \right)$$

Siendo:

integer: La función redondeo al menor entero

delay: La función retraso

Modelo búsqueda en computador central.**DEFINICIÓN DE VARIABLES:**

TB Tiempo de búsqueda en minutos, medido como el tiempo transcurrido desde que un puesto de consulta solicita información de un libro y ésta le es satisfecha

CAM consultas bibliográficas atendidas por minuto

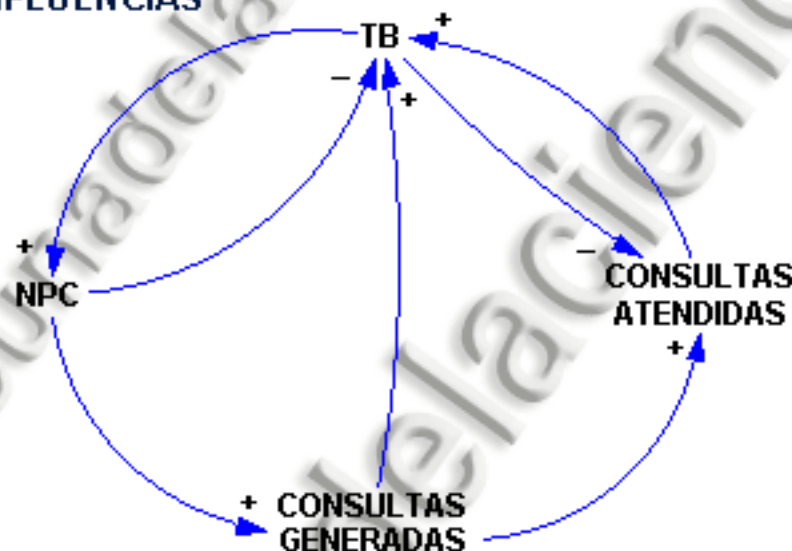
CBA Consultas bibliográficas acumuladas

NPC Número de puestos de consulta

TCP Tasa de consultas por puesto.

NCM Numero de consultas bibliográficas por minuto

f y g son dos funciones no lineales (a tramos rectos) descritas respectivamente en la tabla y en la gráfica siguientes.

DIAGRAMA DE INFLUENCIAS**a) Justificación.**

El tiempo de búsqueda determina el flujo de consultas. A mayor tiempo de respuesta en la búsqueda se aumenta el número de puestos de consultas que hace aumentar el número de consultas generadas repercutiendo de nuevo en un aumento en el tiempo de búsqueda. Se trata de un comportamiento típico de un bucle de realimentación positiva, crecimiento exponencial.

El sistema está regulado por dos bucles de realimentación negativa. Si el tiempo de búsqueda crece se aumentará el número de puestos de consulta, pero hasta un máximo de 6 que impide un crecimiento excesivo que daría lugar a un excesivo aumento en el tiempo de búsqueda.

Así mismo, el sistema dispone de un segundo bucle regulador: si el tiempo de búsqueda aumenta lo contrarresta poniendo más recursos a disposición de las consultas y por tanto atenderá más consultas por minuto.

b) Aparecen dos bucles de realimentación negativa:

- NPC – TB
- CONSULTAS ATENDIDAS – TB

Todos los demás bucles que se reflejan en el sistema son de realimentación positiva.

Si todos los bucles fueras de realimentación negativa, el sistema tendría un comportamiento estable. No obstante, al haber bucles de realimentación positiva, no se sabe lo que puede pasar y no se puede predecir el comportamiento del sistema.

a) Al arquetipo de crecimiento sigmoidal.

Variables:

P Población total; parámetro; personas

PR Población que conoce el rumor; estado; personas

PNR Población que no conoce el rumor; variable auxiliar; personas

FD Flujo de difusión; flujo; personas/día

PDD Porcentaje de difusión diario; parámetro

CDD Contactos de difusiones que se producen por día; parámetro

$$\frac{d(PR)}{dt} = FD(t)$$

$$PNR(t) = P - PR(t)$$

$$FD(t) = CDD \cdot PDD \cdot PR(t) \cdot PNR(t)$$

Explicación al cálculo del flujo de difusión: el producto $PR \cdot PNR$ determina el nº total de posibles contactos entre la población que conoce el rumor y la que no la conoce, de todos ellos sólo un tanto por ciento son reales (PDD), de los cuales sólo una fracción producen realmente la difusión del rumor.

b) $P = 100$; $PR(0) = 20$

ut: días

intervalo de simulación: 1 día

Observemos las gráficas. Por ejemplo un instante $t=0$;

$$PR = 20; PNR = 100 - 20 = 80$$

$$FD = PDD \cdot CDD \cdot PR \cdot PNR = PDD \cdot CDD \cdot 20 \cdot 80 = 8$$

$$\text{Despejamos el producto } PDD \cdot CDD = 8/1600 = 0,005$$

Por tanto si fijamos por ejemplo $PDD = 0,02$ y $CDD = 0,25$ serían parámetros válidos que definirían el presente modelo.

Modelo cadena de montaje.

a) Justificación.

- (1) El montaje de equipos básicos depende de los empleados fijos y temporales dedicados a esta función (tasa de montaje).
- (2) Sólo se hace una entrega de equipo básico si hay un pedido y además hay equipos en stock.
- (3) Si los pedidos de equipos básicos más la producción de equipos con ampliación es menor o igual que el stock de equipos básicos, se montan ampliaciones al 100% de las posibilidades de la empresa. En caso contrario sólo se montarán ampliaciones en los equipos básicos que queden después de atender los pedido de equipos básicos.
- (4) Sólo se hace una entrega de equipo ampliado si hay un pedido y además hay equipos ampliados en stock.
- (5) El número de equipos básicos en stock aumenta al montar equipos básicos y disminuye al hacer una entrega de equipo básico o al montar un equipo ampliado.
- (6) El número de equipos ampliados en stock aumenta al montar equipos ampliados y disminuye al entregarlos.

DEFINICIÓN DE VARIABLES:

EA: Stock de equipos con ampliación

EB: Stock de equipos básicos

EEA: Entregas de equipos con ampliación

EEB: Entregas de equipos básicos

EFMA: Empleados fijos en el montaje de ampliaciones

EFMB: Empleados fijos en el montaje básico

ET: Empleados temporales

MA: Montaje de ampliaciones

MEB: Montaje de equipos básicos

min: La función mínimo

PEA: Pedidos de equipos con ampliación

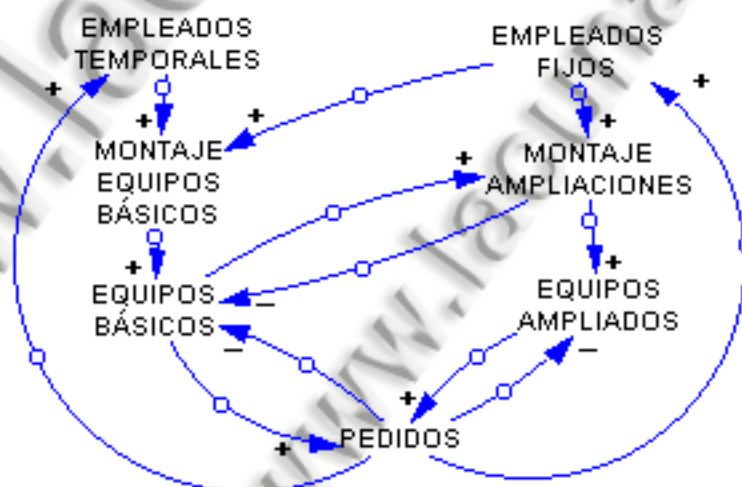
PEB: Pedidos de equipos básicos

TMA: Tasa de montaje de las ampliaciones

TMEBEF: Tasa de montaje de los equipos básicos por empelados fijos

TMET: Tasa de montaje de los empleados temporales

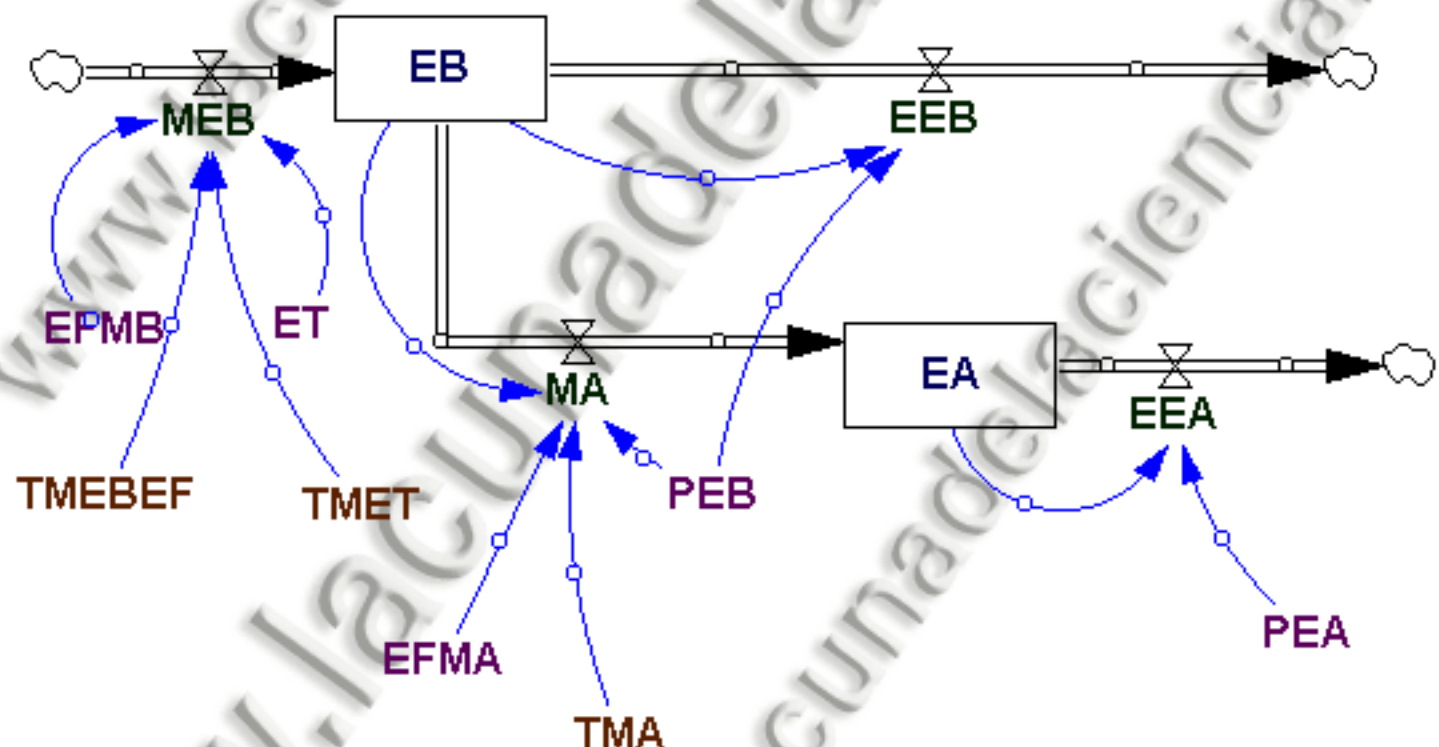
DIAGRAMA DE INFLUENCIAS



b) CLASIFICACIÓN DE LAS VARIABLES Y UNIDADES:

- Variables de estado:
EA: equipos ampliados
EB: equipos básicos
- Variables de flujo:
MEB: equipos / día
EEB: equipos / día
MA: equipos / día
EEA: equipos / día
- Constantes:
TMEBEF: equipos básicos / (día x empleado fijo)
TMA: equipos ampliados / (día x empleado fijo)
TMET: equipos básicos / (día x empleado temporal)
- Variables exógenas:
PEB: equipos básicos / día
PEA: equipos ampliados / día
EFMA: empleados fijos
EFMB: empleados fijos
ET: empleados temporales

DIAGRAMA DE FORRESTER:



ECUACIONES PARA LA SIMULACIÓN

- (1) $MEB(t) = TMEBEF \cdot EFMB(t) + TMET \cdot ET(t)$
- (2) $EEB(t) = \min(PEB(t), EB(t))$
- (3) $MA(t) = \begin{cases} TMA \cdot EFMA(t) & \text{si } (PEB(t) + TMA \cdot EFMA(t)) \leq EB(t) \\ EB(t) - \min(PEB(t), EB(t)) & \text{si } (PEB(t) + TMA \cdot EFMA(t)) > EB(t) \end{cases}$
- (4) $EEA(t) = \min(PEA(t), EA(t))$
- (5) $EB(t + \Delta t) = EB(t) + \Delta t (MEB(t) - EEB(t) - MA(t))$
- (6) $EA(t + \Delta t) = EA(t) + \Delta t (MA(t) - EEA(t))$

c) Demostración

$$\begin{aligned} TMEBEF &= 4 & TMET &= 1,5 & TMA &= 4 \\ PEB &= 10 & PEA &= 8 & EFMEB &= 6 & EFMA &= 2 & ET &= 4 \\ EB(0) &= 25 & EA(0) &= 10 \end{aligned}$$

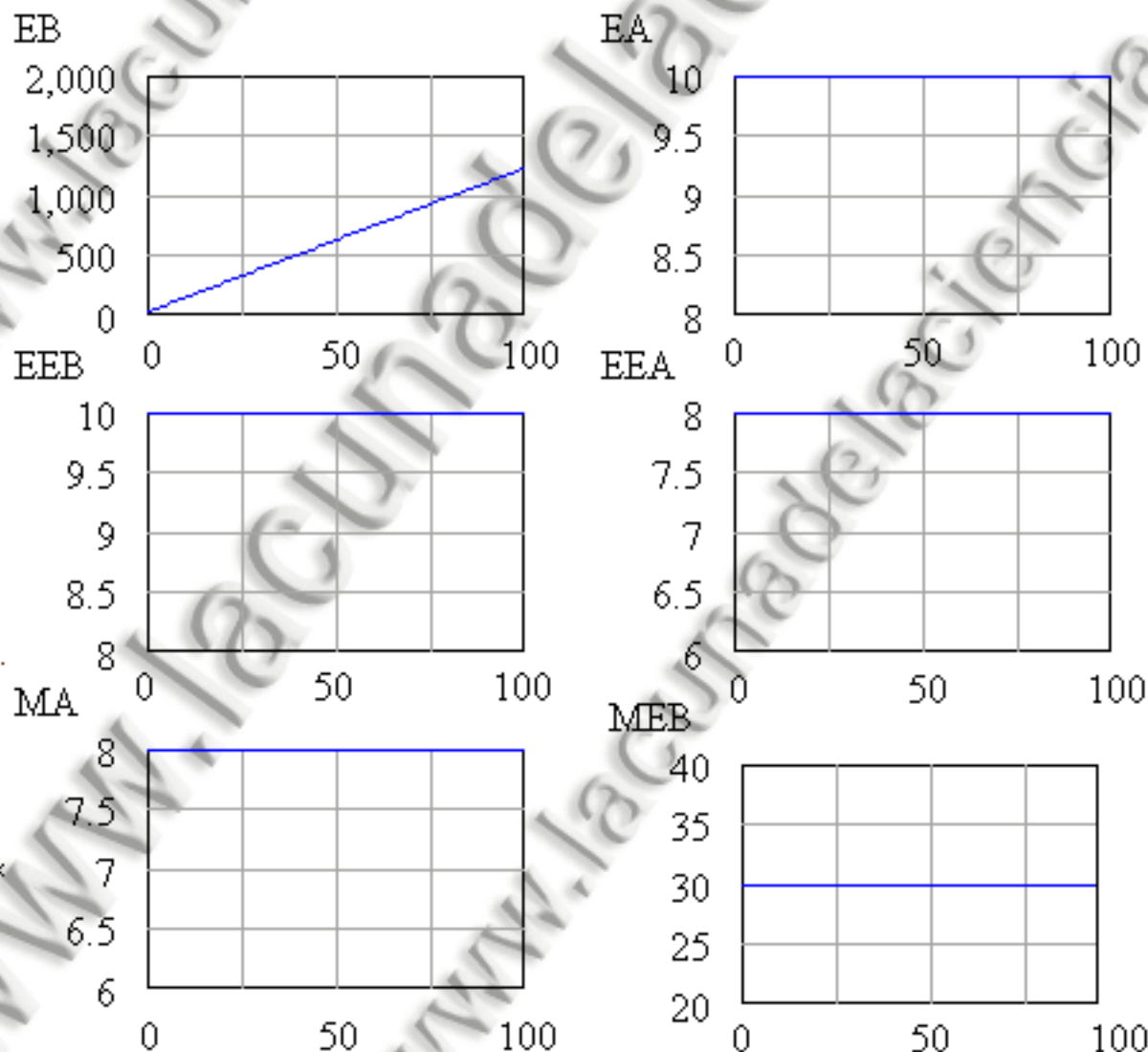
Sin que se produzcan alteraciones en el stock quiere decir que las derivadas se anulan porque no hay variación. Para comprobarlo simplemente sustituimos en las ecuaciones:

- $MEB = 4 \cdot 6 + 1,5 \cdot 4 = 30$
- $EEB = \min(10, 25) = 10$
- $10 + 4 \cdot 2 \leq 25 \Rightarrow 18 \leq 25 \Rightarrow MA = 4 \cdot 2 = 8$
- $EEA = \min(8, 10) = 8$
- $dEB/dt = 30 - 10 - 8 = 12 \neq 0$
- $dEA/dt = 8 - 8 = 0$

Comprobamos que cuando la empresa trabaja en estas condiciones, aumenta el número de quipos básicos en stock en 12. El número de equipos con ampliación sí permanece constante.

d) Simulación

$$\begin{aligned} TMEBEF &= 4 & TMET &= 1,5 & TMA &= 4 \\ PEB &= 10 & PEA &= 8 & EFMEB &= 6 & EFMA &= 2 & ET &= 4 \\ EB(0) &= 25 & EA(0) &= 10 \end{aligned}$$



$\Delta t = 1$ día

Tabla con valores sin aproximar obtenida con Vensim.

t	EB	EA	MEB	EEB	MA	EEA
0	25	10	30	10	8	8
1	37	10	30	10	8	8
2	49	10	22	10	8	8
3	53	10	22	10	8	8
4	57	10	22	10	8	8
5	61	10	22	10	8	8
6	65	10	22	10	8	8
7	69	10	22	10	8	8
8	73	10	22	10	8	8
9	77	10	22	10	8	8
10	81	10	22	10	8	8

La empresa logra atender todos los pedidos tanto de equipos básicos como de ampliados. El stock de equipos ampliados se mantiene constante, mientras que el de equipos básicos va creciendo.

e) Justificación

- Se destinan tantos empleados fijos a la producción de equipos ampliados como sean necesarios para atender la demanda.
- El resto de los empleados fijos se destinan al montaje básico.
- El número de empleados fijos se decidirá en función de las necesidades de dos instantes de tiempo anteriores.

1. Para analizar la demanda de un modelo concreto de videoconsolas, así como el plazo de entrega de las mismas a sus clientes, se ha construido el siguiente diagrama de influencias en el que se han errado intencionadamente ciertos signos. Se pide:

- a) Justificar de forma cualitativa cada una de las relaciones y sus signos, corrigiendo aquellos con los que no esté de acuerdo.
b) ¿Qué arquetipo de los que ha estudiado contempla el modelo? Justifique su respuesta.



2. Con el siguiente conjunto de ecuaciones se ha modelado el funcionamiento de una cadena de montaje. La cadena pertenece a una pequeña empresa que monta dos tipos de equipos electrónicos bajo pedidos; el modelo básico y el modelo ampliado. El modelo ampliado se fabrica a partir del modelo básico, incorporando las correspondientes ampliaciones. Para esta tarea la empresa cuenta con una plantilla de empleados fijos y varios empleados contratados temporalmente a una empresa de servicios. Los primeros están capacitados para montar tanto los equipos básicos como las ampliaciones, pero los empleados temporales sólo están preparados para montar los equipos básicos. La plantilla de montaje está dimensionada considerando que los empleados temporales suelen tener una tasa de montaje algo menor que la de los empleados fijos y que es muy importante atender todos los pedidos recibidos. Con el fin de soportar cualquier eventualidad (aumento de pedidos o enfermedad de los empleados, etc...) la empresa dispone de un cierto stock de ambos equipos.

$$(1) \text{MEB}(t) = \text{TMEBEF} \cdot \text{EFMB}(t) + \text{TMET} \cdot \text{ET}(t)$$

$$(2) \text{EEB}(t) = \min(\text{PEB}(t), \text{EB}(t))$$

$$(3) \text{MA}(t) = \begin{cases} \text{TMA} \cdot \text{EFMA}(t) & \text{si } (\text{PEB}(t) + \text{TMA} \cdot \text{EFMA}(t)) \leq \text{EB}(t) \\ \text{EB}(t) - \min(\text{PEB}(t), \text{EB}(t)) & \text{si } (\text{PEB}(t) + \text{TMA} \cdot \text{EFMA}(t)) > \text{EB}(t) \end{cases}$$

$$(4) \text{EEA}(t) = \min(\text{PEA}(t), \text{EA}(t))$$

$$(5) \frac{d\text{EB}(t)}{dt} = \text{MEB}(t) - \text{EEB}(t) - \text{MA}(t)$$

$$(6) \frac{d\text{EA}(t)}{dt} = \text{MA}(t) - \text{EEA}(t)$$

Siendo:

EA: Stock de equipos con ampliación

EB: Stock de equipos básicos

EEA: Entregas de equipos con ampliación

EEB: Entregas de equipos básicos

EFMA: Empleados fijos en el montaje de ampliaciones

EFMB: Empleados fijos en el montaje básico

ET: Empleados temporales

MA: Montaje de ampliaciones

MEB: Montaje de equipos básicos

min: La función mínimo

PEA: Pedidos de equipos con ampliación

PEB: Pedidos de equipos básicos

TMA: Tasa de montaje de las ampliaciones

TMEBEF: Tasa de montaje de los equipos básicos por empleados fijos

TMET: Tasa de montaje de los empleados temporales

Clasificar las variables, indicando sus unidades, y resumir en el correspondiente diagrama de Forrester el conjunto total de ecuaciones del modelo.

3. Modelo de "Propagación de enfermedades".

En el siguiente modelo matemático aparecen, con sus correspondientes abreviaturas, las variables población sana (PS), población enferma (PE), tasa de contagio (TC) entre ambas poblaciones, duración media de la enfermedad (DME), tasa de mortalidad (TM) en la población enferma, flujo de contagio (FC) entre ambas poblaciones, flujo de población enferma que supera la enfermedad (FES), flujo de población que muere (FEM) como consecuencia de la enfermedad.

$$FC(t) = TC \cdot PE(t) \cdot PS(t)$$

$$FES(t) = \frac{PE(t)}{DME}$$

$$FEM(t) = TM \cdot PE(t)$$

$$\frac{d PE(t)}{dt} = FC(t) - FES(t) - FEM(t)$$

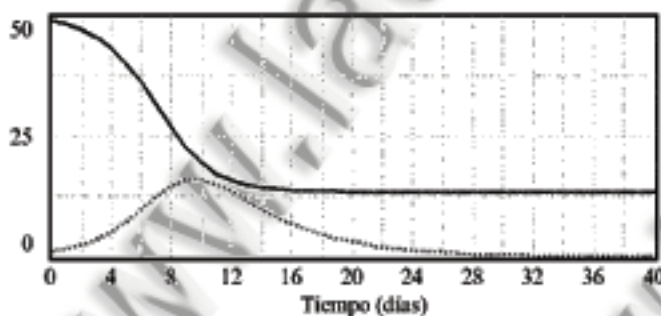
$$\frac{d PS(t)}{dt} = FES(t) - FC(t)$$

a) Enumerar, de forma justificada, qué hipótesis se han utilizado para elaborar el modelo y comentar si se está o no de acuerdo con ellas.

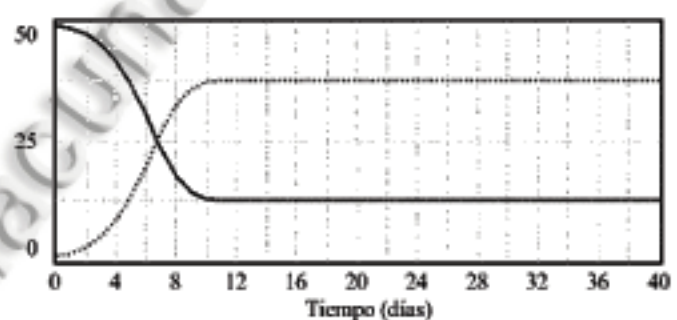
b) Suponiendo que los parámetros del modelo tienen los valores ($TC=0.02$, $DME=4$, $TM=0.2$) y que la población inicial es de 50 mil personas, de las que sólo mil personas están enfermas. Simular al menos los quince primeros días de propagación de la enfermedad para comprobar que las poblaciones evolucionan como se muestra en la figura (b). Se recomienda utilizar la aproximación de Euler con intervalo de simulación de 1 día y redondear al entero más próximo en los tres flujos.

c) Los resultados del apartado (b) admiten la siguiente lectura: la enfermedad queda erradicada en aproximadamente un mes pero sólo sobrevive algo más del 25% de la población inicial. Comprobar que si se dispone de la medicación adecuada para que no se produzcan muertes por la enfermedad, es decir, que si $TM=0$, las poblaciones evolucionan como en la figura (c). ¿Qué lectura haría de estos resultados? ¿Podría justificar con ellos una situación endémica?

d) ¿Qué ocurrirá si el tipo de enfermedad no es mortal ($TM=0$), ni existe posibilidad de curación ($DME=\text{valor muy grande}$)? ¿Podría justificar con ellos una situación epidémica? Observación: no es necesario que realice ninguna simulación, conteste buscando la analogía o similitud con algún modelo del libro de texto o de la colección de ejercicios.



Población sana (miles de personas) —————
Población enferma (miles de personas) ·········



Población sana (miles de personas) —————
Población enferma (miles de personas) ·········

Fig(b). Simulación en las condiciones del apartado (b)

Fig(c). Simulación en las condiciones del apartado (c)

a) Modificaciones realizadas en las relaciones:

Órdenes pendientes \rightarrow + Plazo medio de entregas

Órdenes pendientes \rightarrow - Entregas

Plazo medio de entregas \rightarrow - \rightarrow + Inversiones

Demanda de videoconsolas \rightarrow - Disipación de la demanda

Disipación de la demanda \rightarrow - Demanda de videoconsolas

Por un lado disponemos de dos bucles de realimentación positiva que influyen en la demanda de videoconsolas:

A un aumento/disminución de marketing mayor/menor demanda de videoconsolas y a un aumento/disminución de demanda de videoconsolas mayor/menor marketing. A este bucle de realimentación positiva le denominaremos BUCLE DE PROMOCIÓN.

A un aumento/disminución de la disipación de la demanda menor/mayor demanda de videoconsolas y a un aumento/disminución de demanda de videoconsolas menor/mayor disipación de la demanda.

Por otro lado un aumento/disminución en la demanda de videoconsolas más/menos nuevas órdenes (influencia positiva), las nuevas órdenes a su vez influyen positivamente en las órdenes pendientes y éstas negativamente en las entregas que a su vez influyen negativamente en el plazo medio de entregas, ejerciendo éstas una influencia positiva en el descontento de los clientes que afectan positivamente en la disipación de la demanda y ésta última negativamente en la demanda de videoconsolas, cerrándose así un bucle de realimentación negativa (4 + y 3 -) a este bucle le denominaremos BUCLE DE RETRASO SUMINISTRO.

Las Órdenes pendientes también influyen positivamente en el plazo medio de las entregas.

En tercer lugar las entregas influyen negativamente en el plazo medio de las entregas que con un cierto retraso incluyen positivamente en las inversiones, éstas positivamente en la capacidad de producción y ésta última nuevamente positivamente sobre las entregas cerrando un bucle de realimentación negativa (3 + 1 -) que denominaremos BUCLE DE CAPACIDAD DE PRODUCCIÓN.

b) El tipo de situación contemplado en el presente modelo corresponde al ARQUETIPO DEL CRECIMIENTO CON INVERSIÓN INSUFICIENTE.

Por un lado disponemos de la combinación de un bucle de realimentación positiva (BUCLE DE PROMOCIÓN) con otro de realimentación negativa (BUCLE DE RETRASO DE SUMINISTRO) lo que da lugar a un crecimiento sigmoide. Al incrementarse las órdenes pendientes, con relación a la capacidad de producción, el plazo medio de las entregas aumenta, se produce así un descontento de los clientes, por lo que aumenta la disipación de la demanda. Ante un aumento de la disipación de la demanda (menos clientes) la empresa podría actuar aumentando su política de marketing para incentivar nuevas ventas, pero ésta no sería una buena actuación, pues las nuevas ventas provocarían un nuevo aumento en el plazo medio de entregas debido a que no se dispone de la suficiente capacidad de producción. La actuación sobre esta estructura debe hacerse sobre el bucle positivo CAPACIDAD DE PRODUCCIÓN incrementando así la capacidad de producción. Una vez detectado el problema de que el retraso del plazo medio de entregas es debido a la insuficiente capacidad de producción, se actúa sobre ésta muy cautelarmente. Podemos interpretar la combinación de los bucles retraso suministro y capacidad de producción como arquetipo de adicción.

La combinación de ambos arquetipos: sigmoide y adicción da lugar al de crecimiento con inversión insuficiente cuya mejor política sería la de actuación sobre el bucle de capacidad de producción.

Modelo cadena de montaje.

a) Justificación.

- (1) El montaje de equipos básicos depende de los empleados fijos y temporales dedicados a esta función (tasa de montaje).
- (2) Sólo se hace una entrega de equipo básico si hay un pedido y además hay equipos en stock.
- (3) Si los pedidos de equipos básicos más la producción de equipos con ampliación es menor o igual que el stock de equipos básicos, se montan ampliaciones al 100% de las posibilidades de la empresa. En caso contrario sólo se montarán ampliaciones en los equipos básicos que queden después de atender los pedido de equipos básicos.
- (4) Sólo se hace una entrega de equipo ampliado si hay un pedido y además hay equipos ampliados en stock.
- (5) El número de equipos básicos en stock aumenta al montar equipos básicos y disminuye al hacer una entrega de equipo básico o al montar un equipo ampliado.
- (6) El número de equipos ampliados en stock aumenta al montar equipos ampliados y disminuye al entregarlos.

DEFINICIÓN DE VARIABLES:

EA: Stock de equipos con ampliación

EB: Stock de equipos básicos

EEA: Entregas de equipos con ampliación

EEB: Entregas de equipos básicos

EFMA: Empleados fijos en el montaje de ampliaciones

EFMB: Empleados fijos en el montaje básico

ET: Empleados temporales

MA: Montaje de ampliaciones

MEB: Montaje de equipos básicos

min: La función mínimo

PEA: Pedidos de equipos con ampliación

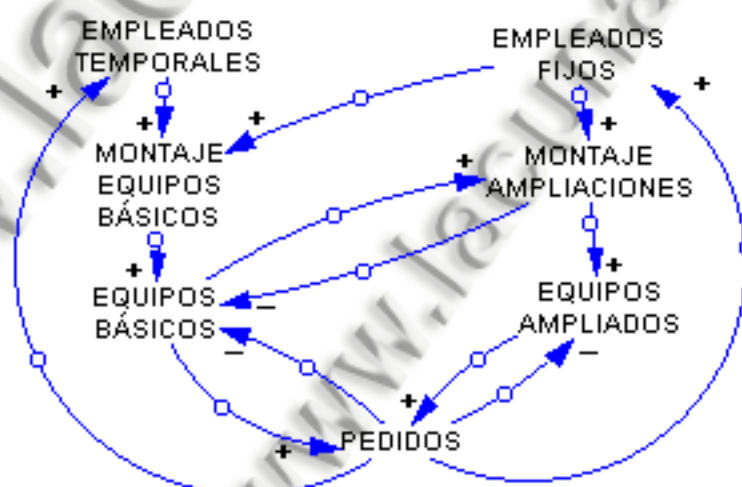
PEB: Pedidos de equipos básicos

TMA: Tasa de montaje de las ampliaciones

TMEBEF: Tasa de montaje de los equipos básicos por empelados fijos

TMET: Tasa de montaje de los empleados temporales

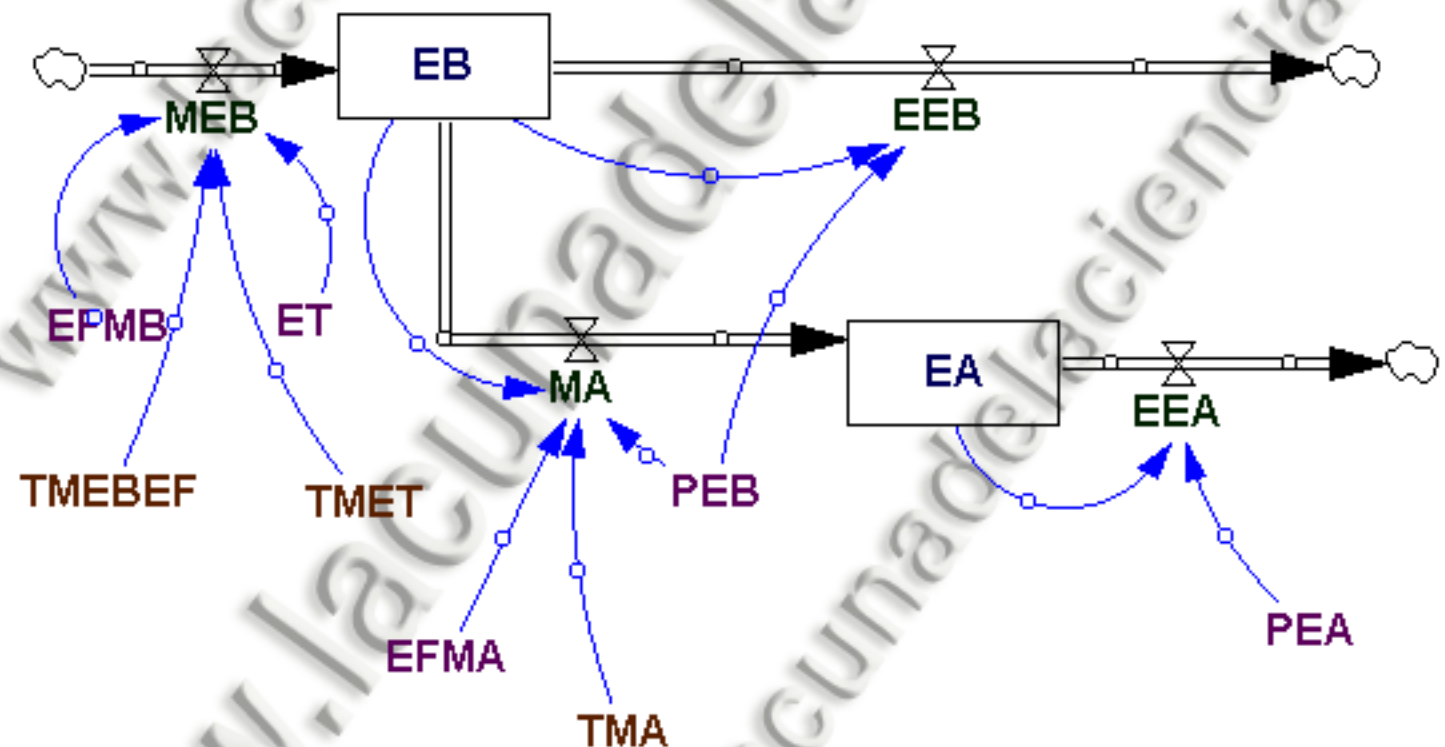
DIAGRAMA DE INFLUENCIAS



b) CLASIFICACIÓN DE LAS VARIABLES Y UNIDADES:

- Variables de estado:
EA: equipos ampliados
EB: equipos básicos
- Variables de flujo:
MEB: equipos / día
EEB: equipos / día
MA: equipos / día
EEA: equipos / día
- Constantes:
TMEBEF: equipos básicos / (día x empleado fijo)
TMA: equipos ampliados / (día x empleado fijo)
TMET: equipos básicos / (día x empleado temporal)
- Variables exógenas:
PEB: equipos básicos / día
PEA: equipos ampliados / día
EFMA: empleados fijos
EFMB: empleados fijos
ET: empleados temporales

DIAGRAMA DE FORRESTER:



Modelo de propagación de enfermedades.

DEFINICIÓN DE VARIABLES:

PS: Población Sana.

PE: Población Enferma.

TC: Tasa de contagio.

DME: Duración Media de la Enfermedad.

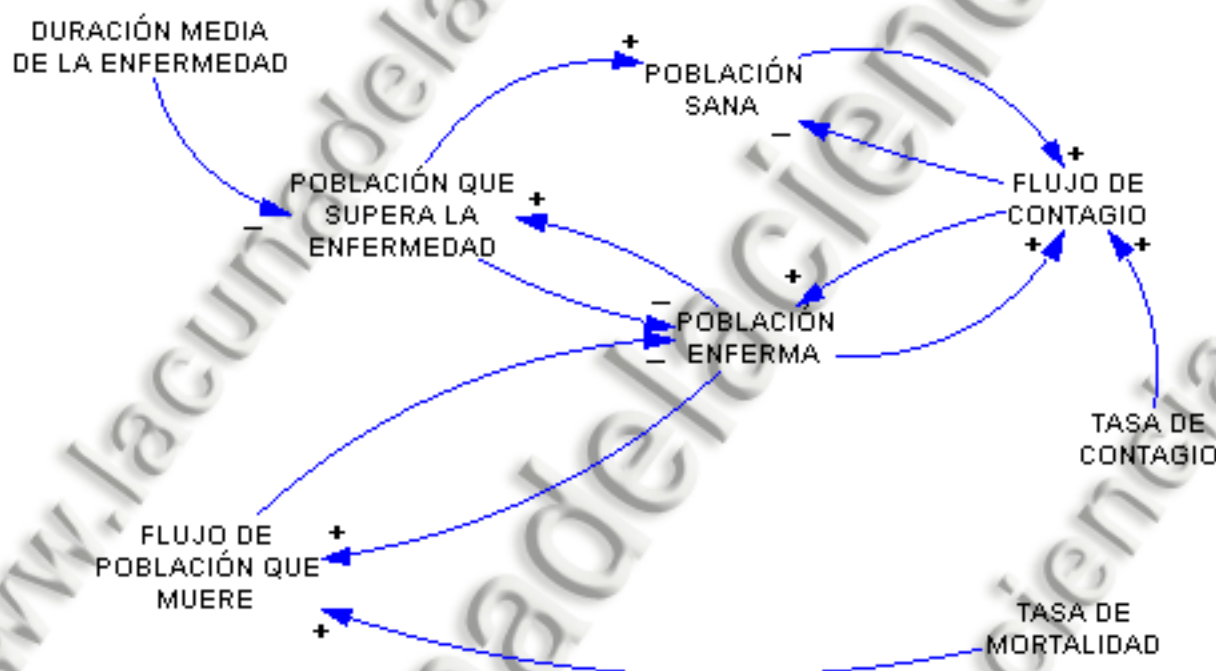
TM: Tasa de mortalidad.

FC: Flujo de Contagio.

FES: Flujo de PE que supera el Enfermedad.

FEM: Flujo de PE que muere a causa de la Enfermedad.

DIAGRAMA DE INFLUENCIAS



CLASIFICACIÓN DE LAS VARIABLES Y UNIDADES:

- Variables de estado:

PE: personas

PS: personas

- Variables de flujo:

FC: personas/día

FES: personas/día

FEM: personas/día

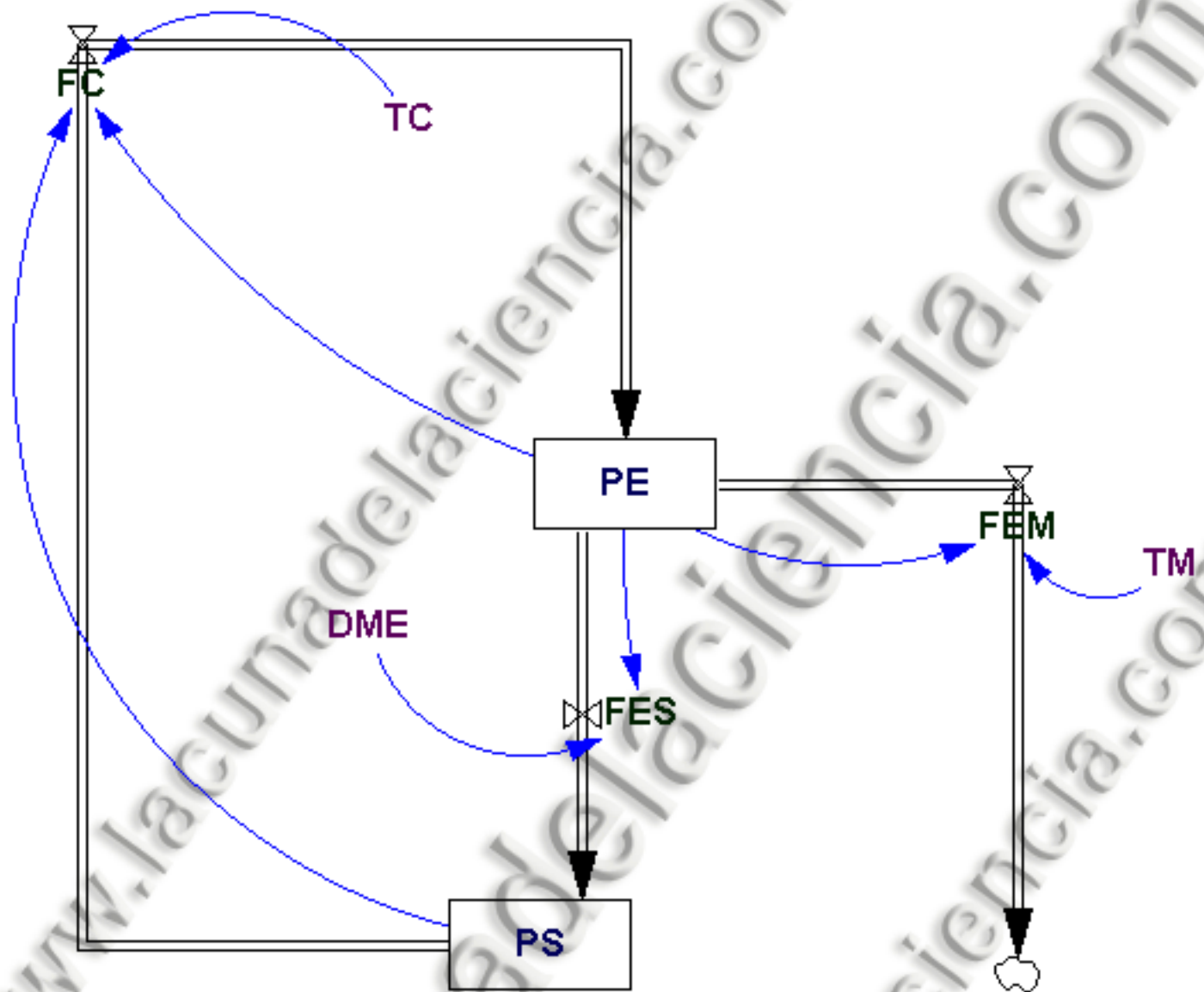
- Constantes:

TC: $(\text{personas} \times \text{día})^{-1}$

DME: días

TM: días^{-1}

DIAGRAMA DE FORRESTER:



a) Hipótesis.

El flujo de contagio depende de la población sana y de la población enferma y de la tasa de contagio. Suponemos que ambas poblaciones están uniformemente distribuidas.

El flujo de población enferma que muere depende de la población enferma y de la tasa de mortalidad de la enfermedad.

La población que supera la enfermedad depende de la población enferma y la duración media de la enfermedad.

La población sana aumenta con la población enferma que supera la enfermedad y disminuye con el contagio.

La población enferma aumenta con el contagio y disminuye con la población enferma que supera la enfermedad y la que muere.

ECUACIONES PARA LA SIMULACIÓN

$$FC(t) = TC \cdot PE(t) \cdot PS(t)$$

$$FES(t) = PE(t) / DME$$

$$FEM(t) = TM \cdot PE(t)$$

Haciendo la aproximación de Euler, las dos últimas ecuaciones quedan:

$$PE(t + \Delta t) = PE(t) + \Delta t \cdot (FC(t) - FES(t) - FEM(t))$$

$$PS(t + \Delta t) = PS(t) + \Delta t \cdot (FES(t) - FC(t))$$

b) Simulación

$$TC = 0.02$$

$$DME = 4$$

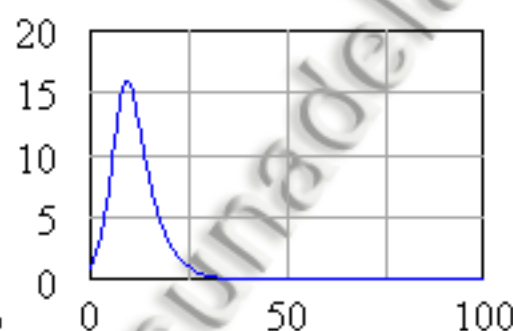
$$TM = 0.2$$

$$PE(0) = 1$$

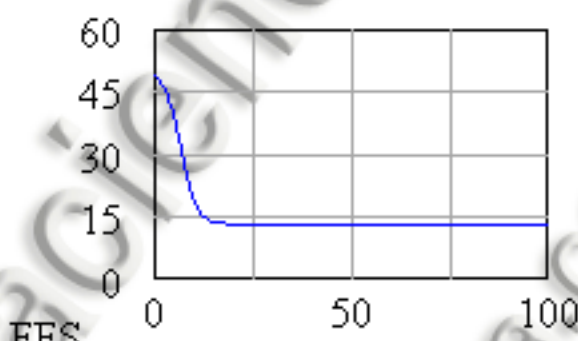
$$PS(0) = 49$$

$$\Delta t = 1 \text{ día}$$

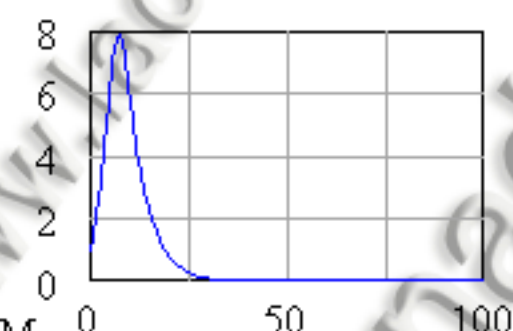
PE



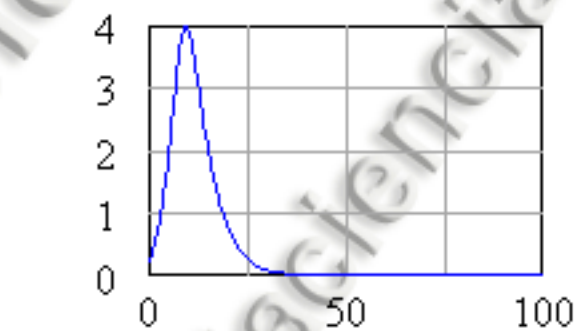
PS



FC



FES



FEM

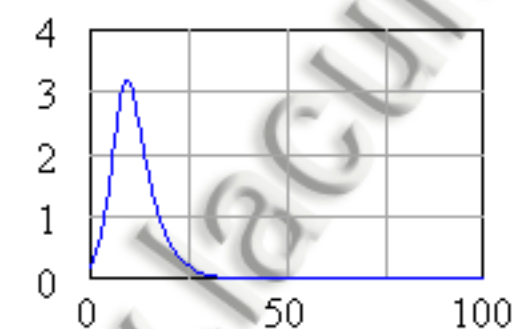


Tabla con valores sin aproximar obtenida con Vensim.

t	PS	PE	FC	FEM	FES
0	49	1	0.98	0.2	0.25
1	48.27	1.53	1.47706	0.306	0.3825
2	47.1754	2.31856	2.18758	0.463712	0.579641
3	45.5675	3.46279	3.15582	0.692558	0.865698
4	43.2774	5.06035	4.37997	1.01207	1.26509
5	40.1625	7.16317	5.75381	1.43263	1.79079
6	36.1995	9.69355	7.01803	1.93871	2.42339
7	31.6048	12.3495	7.80607	2.4699	3.08737
8	26.8861	14.5983	7.84983	2.91966	3.64957
9	22.6859	15.8789	7.20453	3.17578	3.96972
10	19.4511	15.9379	6.20019	3.18758	3.98448
11	17.2354	14.966	5.1589	2.99321	3.74151
12	15.818	13.3902	4.23612	2.67805	3.34756
13	14.9294	11.6007	3.46384	2.32015	2.90019
14	14.3657	9.84425	2.8284	1.96885	2.46106
15	13.9984	8.24274	2.3077	1.64855	2.06069

Si redondeamos al entero más próximo(0,50 aproxima a 0 y las aproximaciones se van haciendo a medida que se hacen los cálculos), la tabla queda:

t	PS	PE	FC	FEM	FES
0	49,00	1,00	1,00	0,00	0,00
1	48,00	2,00	2,00	0,00	0,00
2	46,00	4,00	4,00	1,00	0,00
3	43,00	7,00	6,00	2,00	1,00
4	39,00	10,00	8,00	2,00	2,00
5	33,00	14,00	9,00	3,00	3,00
6	27,00	17,00	9,00	4,00	3,00
7	22,00	19,00	8,00	5,00	4,00
8	19,00	18,00	7,00	4,00	4,00
9	16,00	17,00	5,00	4,00	3,00
10	15,00	15,00	4,00	4,00	3,00
11	15,00	12,00	4,00	3,00	2,00
12	14,00	11,00	3,00	3,00	2,00
13	14,00	9,00	3,00	2,00	2,00
14	13,00	8,00	2,00	2,00	2,00
15	13,00	6,00	2,00	1,00	1,00

c) Simulación

TC = 0.02 DME = 4 TM = 0

PE(0) = 1 PS(0) = 49

$\Delta t = 1$ día

Tabla con valores sin aproximar obtenida con Vensim.

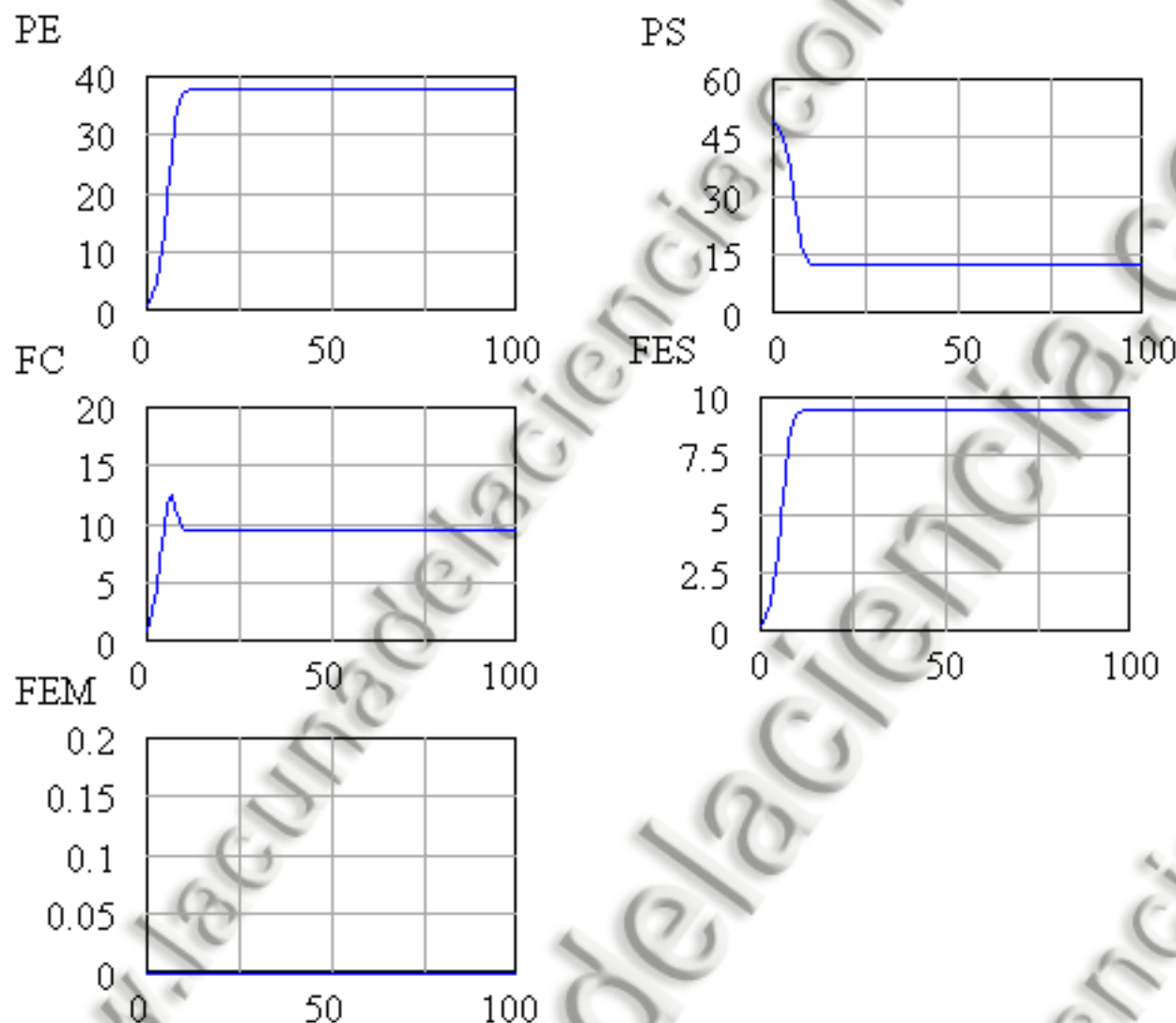


Tabla con valores sin aproximar obtenida con Vensim.

t	PS	PE	FC	FEM	FES
0	49	1	0.98	0	0.25
1	48.27	1.73	1.67014	0	0.4325
2	47.0324	2.96764	2.7915	0	0.741911
3	44.9828	5.01724	4.51378	0	1.25431
4	41.7233	8.27671	6.90663	0	2.06918
5	36.8858	13.1142	9.67454	0	3.27854
6	30.4898	19.5102	11.8972	0	4.87754
7	23.4701	26.5299	12.4532	0	6.63246
8	17.6494	32.3506	11.4194	0	8.08765
9	14.3177	35.6823	10.2178	0	8.92058
10	13.0205	36.9795	9.62983	0	9.24488
11	12.6355	37.3645	9.4424	0	9.34111
12	12.5343	37.4658	9.39211	0	9.36644
13	12.5086	37.4914	9.37929	0	9.37285
14	12.5021	37.4979	9.37607	0	9.37446
15	12.5005	37.4995	9.37527	0	9.37487

Si redondeamos al entero más próximo (0,50 aproxima a 0 y las aproximaciones se van haciendo a medida que se hacen los cálculos), en el segundo día PS pasa a 50 y PE a 0 y se mantiene así indefinidamente.

La lectura de los resultados de este apartado sería: la enfermedad no se erradica, pero se estabiliza en un equilibrio dinámico con 12,5 personas sanas y 37,5 personas enfermas. El equilibrio dinámico implica situación endémica.

d) Simulación

TC = 0.02 DME = ∞ TM = 0
PE(0) = 1 PS(0) = 49
 $\Delta t = 1$ día



Tabla con valores sin aproximar obtenida con Vensim.

t	PS	PE	FC	FEM	FES
0	49	1	0.98	0	0
1	48.02	1.98	1.90159	0	0
2	46.1184	3.88159	3.58026	0	0
3	42.5382	7.46185	6.34827	0	0
4	36.1899	13.8101	9.99573	0	0
5	26.1942	23.8058	12.4715	0	0
6	13.7227	36.2773	9.95644	0	0
7	3.76624	46.2338	3.48255	0	0
8	0.283691	49.7163	0.282082	0	0
9	0.00160962	49.9984	0.00160957	0	0
10	5.19212e-008	50	5.19212e-008	0	0
11	0	50	0	0	0
12	0	50	0	0	0
13	0	50	0	0	0
14	0	50	0	0	0
15	0	50	0	0	0

Si no existe posibilidad de curación, $DME = \infty$. Según esto FES será 0 y la variable de estado PS sólo tendrá flujo de salida, con lo que disminuirá indefinidamente (hasta que no haya personas sanas. Todas las personas estarán enfermas. Se trata de una situación de epidemia.

1. Se pretende analizar la evolución de una determinada población de palomas mediante un modelo que incluya la menos las siguientes variables (ordenadas alfabéticamente):

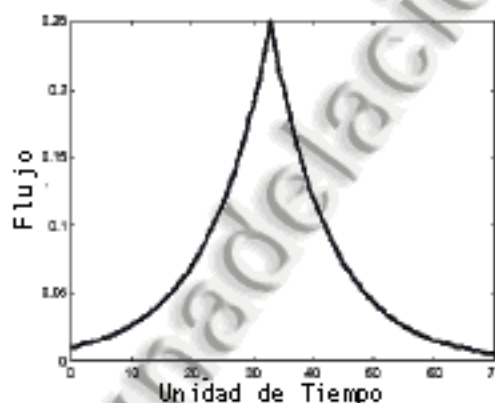
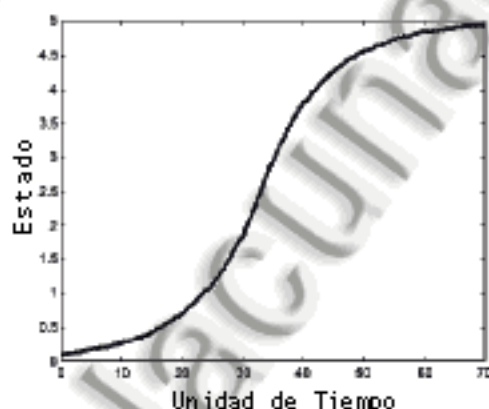
- Mortalidad de palomas adultas (MPA)
- Mortalidad de palomas jóvenes (MPJ)
- Nuevas palomas (NP)
- Palomas adultas (PA)
- Palomas jóvenes (PJ)
- Paso de palomas jóvenes a adultas (PJA)
- Porcentaje de población con capacidad de reproducción (PPR)
- Palomas reproductoras (PR)
- Población total de palomas (PTP)
- Tasa de maduración de las palomas jóvenes (TMJ)
- Tasa de mortalidad de las palomas jóvenes (TMPJ)
- Tasa de mortalidad de las palomas adultas (TMPA)
- Tasa de reproducción de las palomas (TRP)

Proponer un conjunto de ecuaciones para este modelo y dibujar el correspondiente diagrama de Forrester, justificando el tipo y unidades de todas las variables.

2. Las figuras muestran la evolución temporal de las variables (estado y flujo) de un bucle elemental de realimentación.

a) ¿Qué tipo de relación debe existir entre el estado y el flujo para que el estado presente el crecimiento en S de la izquierda?

b) Razonar sobre la estructura que tendría el modelo completo, trazando el correspondiente diagrama de Forrester.



3. Modelo simplificado "flujo migratorio".

En este ejercicio se presenta un modelo simplificado del flujo migratorio entre dos comunidades (países, ciudades, etc...) debido a factores económicos. El modelo quiere representar que: a) la calidad de vida se mide en términos de un reparto equitativo de los recursos económicos de cada comunidad entre sus miembros, b) el flujo entre comunidades está provocado por la diferencia entre las calidades de vida de ambas poblaciones.

El modelo está descrito por las siguientes ecuaciones:

$$(1) \frac{d P_1(t)}{dt} = -FN_{12}(t)$$

$$(2) \frac{d P_2(t)}{dt} = FN_{12}(t)$$

$$(3) CV_1(t) = \frac{RE_1}{P_1(t)}$$

$$(4) CV_2(t) = \frac{RE_2}{P_2(t)}$$

$$(5) FN_{12}(t) = TM (CV_2(t) - CV_1(t))$$

Siendo:

CV₁, calidad de vida de la comunidad 1

CV₂, calidad de vida de la comunidad 2

FN₁₂, flujo migratorio neto de la comunidad 1 hacia la 2

P₁, población de la comunidad 1

P₂, población de la comunidad 2

RE₁, recursos económicos mensuales de la comunidad 1

RE₂, recursos económicos mensuales de la comunidad 2

TM, la tasa migratoria entre las dos comunidades

a) Justificar que el modelo propuesto es coherente con el enunciado y recoge bastante bien la interacción entre las dos comunidades.

b) Clasificar las variables y resumir en el correspondiente diagrama de Forrester el conjunto total de ecuaciones del modelo.

c) Suponiendo que: RE₁ = RE₂ = 1 millón de euros/mes, TM=1000 personas/euro, la comunidad 1 está constituida por 100 mil personas y la comunidad 2 por 50 mil personas. Simular la evolución de las variables del modelo, durante al menos 15 meses, utilizando la aproximación de Euler con Δt=1 mes como intervalo de simulación y redondeo a un decimal en las calidades de vida.

Modelo población de palomas.

DEFINICIÓN DE VARIABLES:

- Mortalidad de palomas adultas (MPA)
- Mortalidad de palomas jóvenes (MPJ)
- Nuevas palomas (NP)
- Palomas adultas (PA)
- Palomas jóvenes (PJ)
- Paso de palomas jóvenes a adultas (PJA)
- Porcentaje de población con capacidad de reproducción (PPR)
- Palomas reproductoras (PR)
- Población total de palomas (PTP)
- Tasa de maduración de las palomas jóvenes (TMJ)
- Tasa de mortalidad de las palomas jóvenes (TMPJ)
- Tasa de mortalidad de las palomas adultas (TMPA)
- Tasa de reproducción de las palomas (TRP)

CLASIFICACIÓN DE LAS VARIABLES Y UNIDADES:

- Variables de estado:

PJ: palomas

PA: palomas

- Variables de flujo:

MPJ: palomas / mes

MPA: palomas / mes

PJA: palomas / mes

NP: palomas / mes

- Constantes:

TRP: mes^{-1}

PPR: %

TMPJ: mes^{-1}

TMJ: mes^{-1}

TMA: mes^{-1}

- Variable auxiliar:

PR: palomas

ECUACIONES

$$(1) \frac{dPJ}{dt} = NP(t) - MPJ(t) - PJA(t)$$

$$(2) \frac{dPA}{dt} = PJA(t) - MPA(t)$$

$$(3) NP(t) = TRP \cdot PR(t)$$

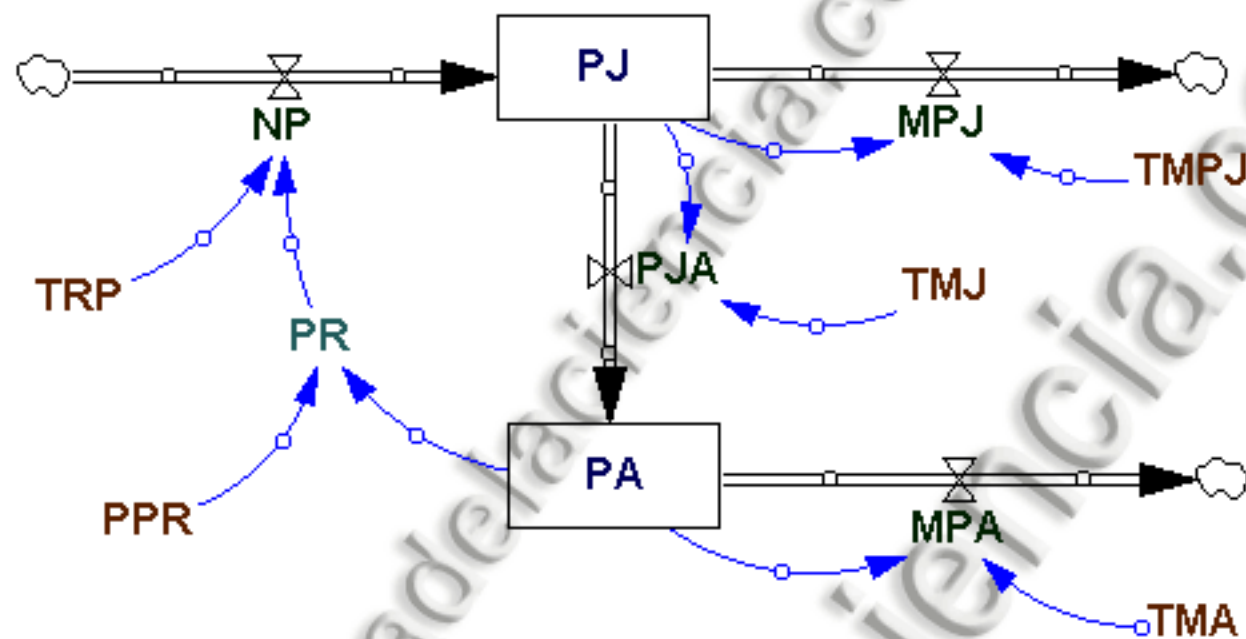
$$(4) PR(t) = PPR \cdot PA(t)$$

$$(5) MPJ(t) = TMPJ \cdot PJ(t)$$

$$(6) PJA(t) = TMJ \cdot PJ(t)$$

$$(7) MPA(t) = TMA \cdot PA(t)$$

DIAGRAMA DE FORRESTER:



- a) Para que en un sistema de primer orden presente un crecimiento en S es necesario que exista una función no lineal en la realimentación de nivel, es decir, el estado x variará en función del Flujo que a su vez es función no lineal del estado x .

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(t) ; F(t) = k R(x(t))$$

donde $R(t)$ es la función no lineal tal que
 $R(t) = x(t)$ si $x(t) \leq x_d/2$
 $R(t) = x_d - x(t)$ si $x(t) > x_d/2$

La expresión matemática que relaciona el flujo con el estado se puede expresar:

$$F(t) = k x(t) \quad \text{si } x(t) \leq x_d/2$$

$$F(t) = k (x_d - x(t)) \quad \text{si } x(t) > x_d/2$$

- b) Echemos un vistazo a las gráficas del enunciado.

En un instante de tiempo $t=10$ $x(10)=0,25$ (dato extraído de la gráfica de la izq)

$F(10)=0,0025$ (dato extraído gráfica derecha)

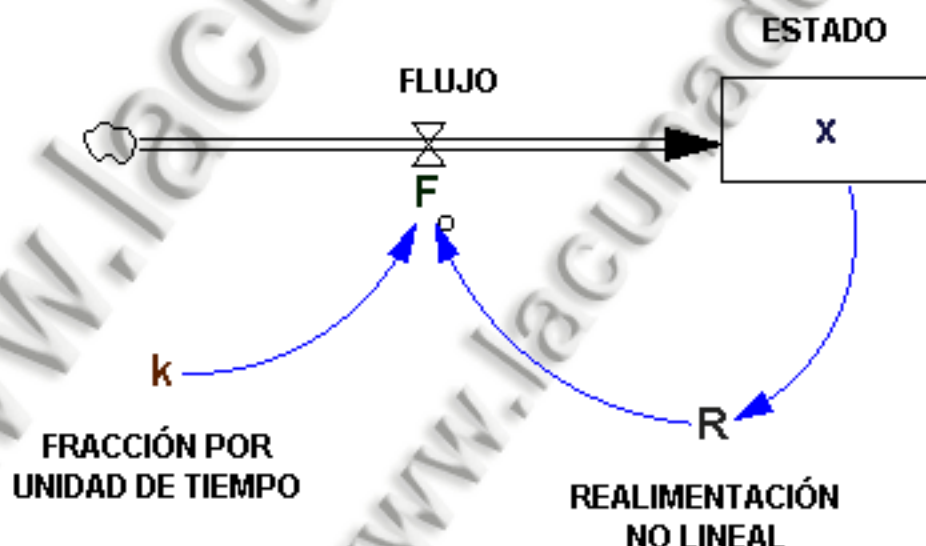
Por tanto si $F(10) = k x(10)$; $0,0025 = k 0,05$; $k=0,1$

Por otra parte de la gráfica de la izq obtenemos dato $x_d=5$

En nuestro modelo $F(t) = 0,1 x(t)$ si $x(t) \leq 2,5$

$F(t) = 0,1 (5 - x(t))$ si $x(t) > 2,5$

El sistema presentará un crecimiento exponencial hasta el estado medio (2,5) y flujo máximo (0,25), la relación entre el flujo y el estado, en este tramo, es la de un bucle elemental de realimentación positiva, y a partir de este instante el sistema evolucionará al estado deseado (5) de forma asintótica siendo la relación entre el flujo y el estado, en este otro tramo, la de un bucle elemental de realimentación negativa. La no linealidad hace que la realimentación sea positiva o negativa en función de que el nivel esté por debajo o por encima del valor al que corresponde el flujo máximo. El comportamiento del sistema será similar al crecimiento SIGMOIDAL.



Modelo flujo migratorio.

a) Justificación.

- La población de la comunidad 1 disminuye si hay flujo de la comunidad 1 a la comunidad 2.
- La población de la comunidad 2 aumenta si hay flujo de la comunidad 1 a la 2.
- y (4) las calidades de vida respectivas en ambas comunidades dependen directamente de los recursos existentes por persona de cada comunidad.

(5) El flujo migratorio neto de la comunidad 1 hacia la 2 es función de una tasa migratoria y las calidades de vida respectivas de ambas comunidades.

DEFINICIÓN DE VARIABLES:

CV1, calidad de vida de la comunidad 1

CV2, calidad de vida de la comunidad 2

FN12, flujo migratorio neto de la comunidad 1 hacia la 2

P1, población de la comunidad 1

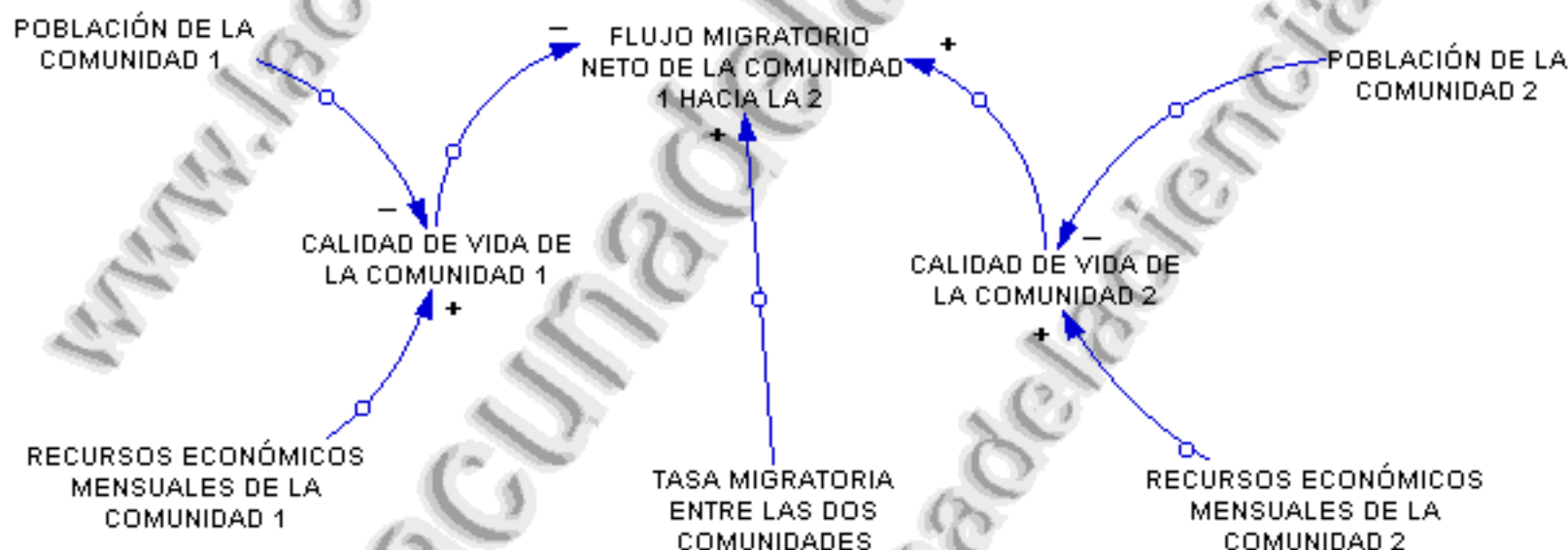
P2, población de la comunidad 2

RE1, recursos económicos mensuales de la comunidad 1

RE2, recursos económicos mensuales de la comunidad 2

TM, la tasa migratoria entre las dos comunidades

DIAGRAMA DE INFLUENCIAS



b) CLASIFICACIÓN DE LAS VARIABLES Y UNIDADES:

- Variables de estado:

P1: personas

P2: personas

- Variables de flujo:

FN12: personas / mes

- Constantes:

RE1: euros

RE2: euros

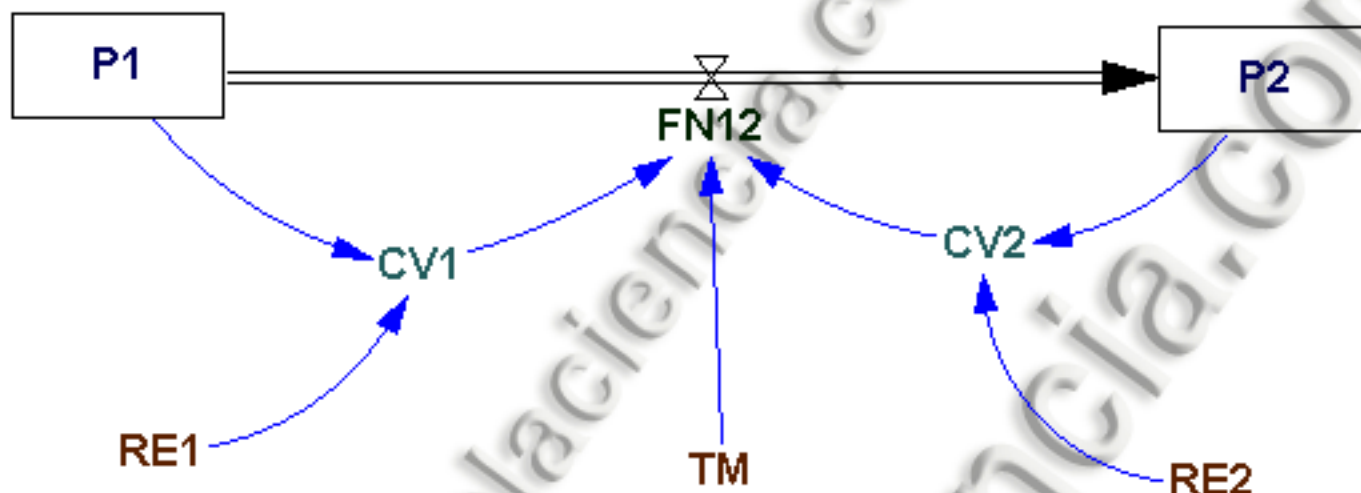
TM: personas² / mes-euro

- Variable auxiliar:

CV1: euros / persona

CV2: euros / persona

DIAGRAMA DE FORRESTER:



ECUACIONES PARA LA SIMULACIÓN

$$(1) P1(t + \Delta t) = P1(t) - \Delta t \cdot FN12(t)$$

$$(2) P2(t + \Delta t) = P2(t) + \Delta t \cdot FN12(t)$$

$$(3) CV1(t) = RE1 / P1(t)$$

$$(4) CV2(t) = RE2 / P2(t)$$

$$(5) FN12(t) = TM \cdot (CV2(t) - CV1(t))$$

c) Simulación

RE1 = RE2 = 1 millón de euros / mes

TM = 1000 personas / euro

P1(0) = 100 mil personas

P2(0) = 50 mil personas

$\Delta t = 1$ mes

Tabla con valores redondeados a un decimal en las calidades de vida.

t	P1	P2	FN12	CV1	CV2
0	100000	50000	10000	10	20
1	90000	60000	5600	11,1	16,7
2	84400	65600	3400	11,8	15,2
3	81000	69000	2200	12,3	14,5
4	78800	71200	1300	12,7	14
5	77500	72500	900	12,9	13,8
6	76600	73400	500	13,1	13,6
7	76100	73900	400	13,1	13,5
8	75700	74300	300	13,2	13,5
9	75400	74600	100	13,3	13,4
10	75300	74700	100	13,3	13,4
11	75200	74800	100	13,3	13,4
12	75100	74900	100	13,3	13,4
13	75000	75000	0	13,3	13,3
14	75000	75000	0	13,3	13,3
15	75000	75000	0	13,3	13,3

1. Un grupo de antropólogos ha decidido realizar el siguiente experimento: "Confinar 10 personas en una isla de pequeñas dimensiones, con una cantidad finita de alimentos y facilitarles los medios para que puedan cultivar la tierra y producir nuevos alimentos. Además piensan poner unas normas de cumplimiento muy estrictas: el número de individuos no podrá superar la cantidad de 200, la máxima tasa de natalidad será del 10%, el consumo de alimentos se limitará siempre al 10% del alimento total disponible, la población dedicada a la producción de alimentos nunca superará el 50% de la población total". Pero antes de llevarlo a cabo el grupo de antropólogos ha solicitado asesoramiento para analizar las posibilidades de supervivencia de la población inicial, bajo el supuesto que la tasa de mortalidad dependerá del número de alimentos per capita.

a) Dibujar un diagrama de influencias que recoja todas las variables y relaciones implícitas en el enunciado, y aquellas que considere propias del comportamiento humano. Acompañelo de las correspondientes justificaciones.

b) Proponer un conjunto mínimo de ecuaciones para simular la evolución de la población, dejando indicadas como funciones no lineales aquellas que crea necesarias.

2. La siguiente ecuación diferencial describe el proceso de enfriamiento (pérdida de calor) de cualquier cuerpo (previamente calentado). Representa que la pérdida instantánea de calor es directamente proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo {TEMP(t)} y la temperatura ambiente {TAMB}

$$\frac{d \text{TEMP}(t)}{dt} = - \frac{1}{\text{FPT}} (\text{TEMP}(t) - \text{TAMB})$$

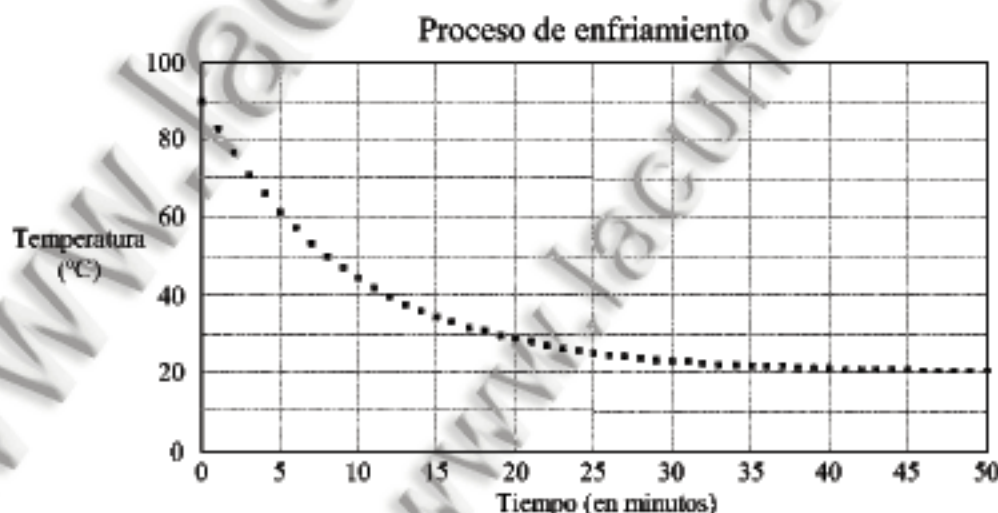
a) En la figura se muestra el comportamiento temporal que experimentó la temperatura de un cuerpo. Utilice la información gráfica para determinar:

La temperatura a la que se calentó el cuerpo.

El valor de la temperatura ambiente.

El factor de pérdidas térmicas FPT que tiene este cuerpo.

b) ¿Qué estructura elemental de las que usted conoce puede reflejar este comportamiento? Justifique su respuesta.



3. Modelo "Sistema inmunológico".

En este ejercicio se pretende modelar el principio básico del sistema inmunológico de los seres humanos. Se sabe que cuando el sistema inmunológico detecta microorganismo extraños (bacterias o virus), ordena la producción de anticuerpos que se encargan de localizarlos y destruirlos. El sistema inmunológico de un individuo se considera eficaz cuando produce en poco tiempo suficiente anticuerpos para destruir a todos los microorganismos extraños, evitando que el individuo desarrolle la enfermedad y dejándolo protegido (inmune) para otro futuro contagio. Por el contrario, el sistema inmunológico es ineficaz cuando no produce suficientes anticuerpos, los microorganismos extraños se hacen fuertes y el individuo desarrolla la enfermedad en poco tiempo. El modelo viene descrito por las siguientes seis ecuaciones:

- Siendo: AC, el número de anticuerpos en la sangre
DMI, la destrucción de microorganismos invasores
MI, el número de microorganismo invasores en el cuerpo humano
min, la función mínimo
PAC, la producción de anticuerpos
RMI, la reproducción de microorganismo invasores
SSI, la sensibilidad del sistema inmunológico
TD, la tasa de destrucción de los anticuerpos
TMR, el tiempo medio de reproducción de los microorganismo invasores
TPA, la tasa de producción de anticuerpos
- (1) $RMI(t) = \frac{MI(t)}{TMR}$
 - (2) $DMI(t) = \min(MI(t), TD \cdot AC(t))$
 - (3) $TPA(t) = SSI \cdot MI(t)$
 - (4) $PAC(t) = TPA(t) \cdot AC(t)$
 - (5) $\frac{dAC(t)}{dt} = PAC(t)$
 - (6) $\frac{dMI(t)}{dt} = RMI(t) - DMI(t)$

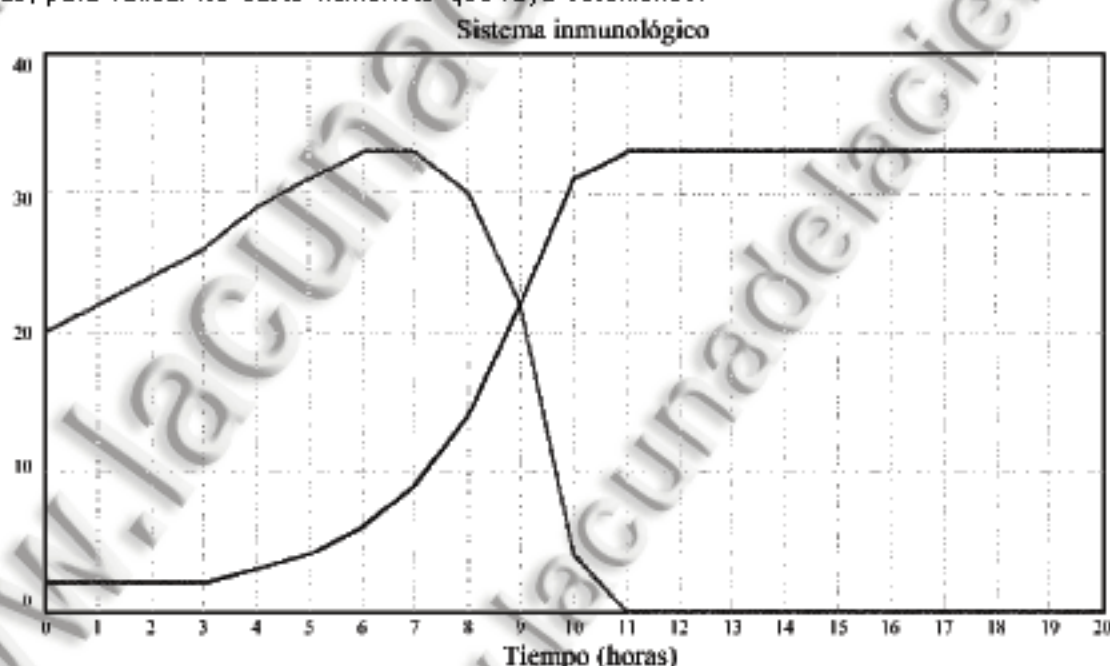
a) Dibujar el correspondiente diagrama de influencias (recuerde que no es preciso incluir todas las variables y que puede ayudarse de las ecuaciones modelo), razonando todas y cada una de las relaciones. ¿Una simple ojeada al diagrama de influencias valdría para justificar que el modelo permite contemplar las dos arquetipos comentados en el enunciado: sistema inmunológico eficaz y sistema inmunológico ineficaz? Razone la respuesta.

b) Dibujar el correspondiente diagrama de Forrester. ¿Encuentra algún símil con alguno de los ejemplos del libro, de la colección de ejercicios o de exámenes anteriores?

c) Iterar al menos 12 horas (con intervalo de simulación de 1 hora) para comprobar que el sistema inmunológico de un individuo con sensibilidad $SSI = 0.02$ es eficaz en las siguientes condiciones de simulación:

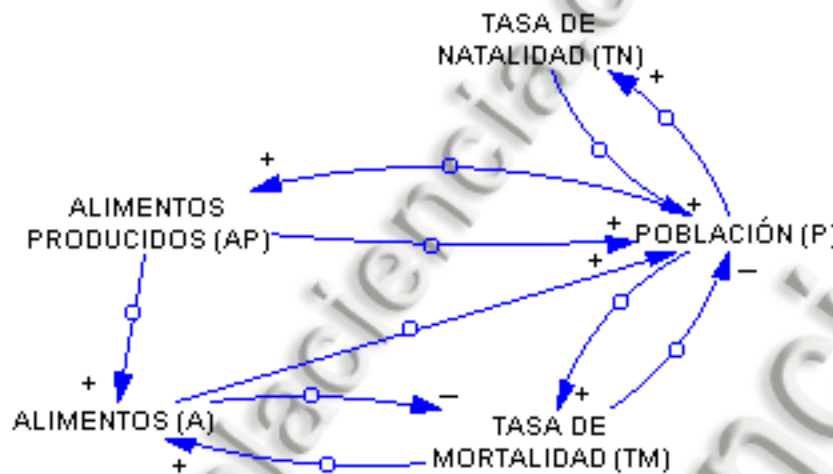
1. Inicialmente posee 2 anticuerpos, con tasa de destrucción $TD = 1$, y se ve infectado por 20 microorganismos que se reproducen por término medio cada 5 horas.
2. Todos los flujos se redondean al entero menor.

Se recomienda utilizar la siguiente figura, que muestra la evolución de los anticuerpos y de los microorganismos durante 20 horas, para validar los datos numéricos que vaya obteniendo.



d) Se sabe que el virus del SIDA no sólo es capaz de engañar al sistema inmunológico, haciendo que éste no lo considere como microorganismo extraño, sino que también disminuye su sensibilidad, es decir la capacidad del sistema inmunológico de producir defensas para otras enfermedades. De ahí que estas enfermedades, aún siendo leves, sean las principales causas de muerte en enfermos de SIDA. ¿Qué ampliaciones se deberían acometer en el modelo básico para contemplar esta situación?

a) DIAGRAMA DE INFLUENCIAS



- La cantidad de población influye tanto en la tasa de natalidad (bucle realimentación positiva) como en la tasa de mortalidad (bucle realimentación negativa) y ambas tasas influyen en la cantidad de población.
- La tasa de mortalidad depende del número de alimentos per cápita.
- La cantidad de alimentos producidos influye en la población (positiva) y la cantidad de población determina la población productora de alimentos.
- La cantidad de alimentos producidos determina la de alimentos a consumir (10% del alimento disponible), y a más alimentos, mayor población.

b) Flujo de población ($P(0) = 10$ personas).

$$\frac{dP}{dt} = [TN(t) - TM(t)] \cdot P(t)$$

f: función no lineal que depende de la población. Máximo de un 10% anual y no puede superar el número de individuos de 200. (Cercano a este número se limitará la tasa de natalidad).

$$TN(t) = f(P(t))$$

g: función no lineal que depende el alimento per cápita

$$TM(t) = g(A(t)/P(t))$$

Flujo de alimentos

$$\frac{dA(t)}{dt} = AP(t) - 0,1 \cdot A(t)$$

Los alimentos producidos son una función no lineal que depende de la población productora que nunca superará el 50% de $P(t)$.

$$AP(t) = h(P(t))$$

a) La gráfica muestra la evolución del estado a lo largo del tiempo. Se parte de un estado inicial $x(0) = 90^\circ$ y se tiende a un objetivo $x(50) = 20^\circ = x_d$. En este caso se trata de una función monótona decreciente.

NOTA: si hubiésemos partido de un estado inicial 20° y el estado deseado hubiera sido 90° , sería una función creciente. Ambas, monótona creciente y monótona decreciente corresponden a un comportamiento de BUCLE DE REALIMENTACIÓN NEGATIVA, a diferencia el bucle de realimentación positiva que se trata de una función exponencial.

La formulación matemática de un bucle de realimentación negativa es:

$$F = k (x_d - x)$$

Observemos la ecuación diferencial del enunciado que describe el flujo de nuestro proceso de enfriamiento:

$$\frac{d \text{TEMP}(t)}{dt} = - \frac{1}{\text{FPT}} (\text{TEMP}(t) - \text{TAMB})$$

De una simple comparación deducimos que $k = 1/\text{FPT}$.

Para calcular usamos la fórmula de la trayectoria de este tipo de sistemas:

$$x(t) = x_d + [x(0) - x_d] \cdot e^{-kt}$$

En la gráfica vemos que en el instante $t = 5$, el valor de la temperatura es 60° . Sustituimos:

$$60 = 20 + [90 - 20] \cdot e^{-k5}$$

$$60 - 20 = [90 - 20] \cdot e^{-k5}$$

$$40 = 70 \cdot e^{-k5}$$

$$40 / 70 = e^{-k5}$$

$$0.57 = e^{-k5}$$

$$\ln 0.57 = -5k$$

$$-0.56 = -5k$$

$$k = 0.56/5 \approx 0.1$$

Como lo que nos piden es el valor de FPT:

$$\text{FPT} = 1/k = 1/0.1 = 10$$

Respuestas:

Valor de la temperatura a la que se calentó el cuerpo: 90°

Valor de la temperatura ambiente: 20°

Factor de pérdidas térmicas: 10

b) Siempre que se trate de un sistema con un comportamiento que tiende a un objetivo se trata de un bucle de realimentación negativa.

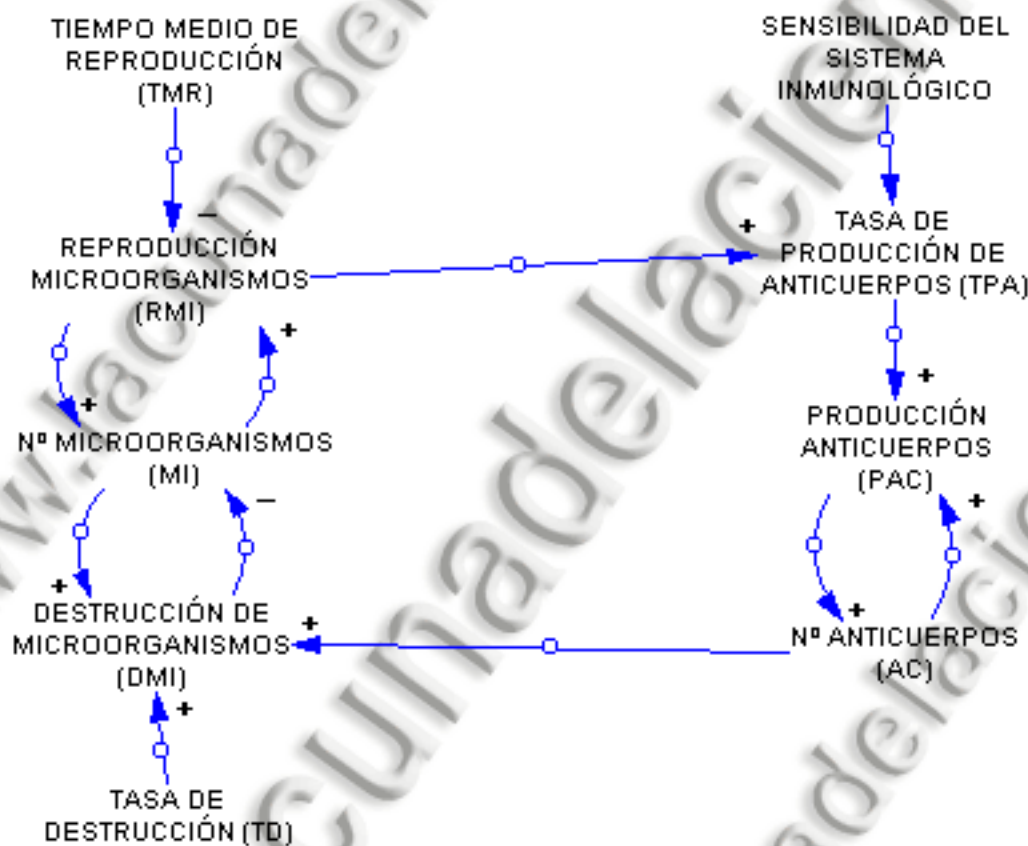
Ejercicios relacionados: 7,8,9,10 de la colección de ejercicios resueltos del Equipo docente. En ellos para los cálculos de k se utilizan las gráficas de las trayectorias de las cuales no disponemos en el presente ejercicio de examen (se nos da la evolución de estado).

Modelo sistema inmunológico.

DEFINICIÓN DE VARIABLES:

AC, el número de anticuerpos en la sangre
DMI, la destrucción de microorganismos invasores
MI, el número de microorganismo invasores en el cuerpo humano
min, la función mínimo
PAC, la producción de anticuerpos
RMI, la reproducción de microorganismo invasores
SSI, la sensibilidad del sistema inmunológico
TD, la tasa de destrucción de los anticuerpos
TMR, el tiempo medio de reproducción de los microorganismo inv asores
TPA, la tasa de producción de anticuerpos

DIAGRAMA DE INFLUENCIAS



Microorganismos: Tenemos un bucle de realimentación positiva: a mayor reproducción de microorganismos mayor número de microorganismos. El tiempo medio de reproducción influye negativamente en la reproducción de microorganismos.

Tenemos también un bucle de realimentación negativa: a menor destrucción de microorganismos mayor número de microorganismos. La tasa de destrucción influye en la destrucción de microorganismos positivamente.

Anticuerpos: Observamos un bucle de realimentación positiva: a menor producción de anticuerpos, menor número de anticuerpos. La tasa de producción influye positivamente en la producción del número de anticuerpos.

Bucle que relaciona microorganismos y anticuerpos: el número de microorganismos influye positivamente en la tasa de producción de anticuerpos y el aumento del número de anticuerpos influye positivamente en la destrucción de microorganismos, que actúa negativamente en la destrucción de microorganismos. La combinación de ambos bucles corresponde al arquetipo de CRECIMIENTO SIGMOIDAL.

Sistema inmunológico eficaz: la producción y destrucción de microorganismos está equilibrada.

Sistema inmunológico ineficaz: el número de anticuerpos no es suficiente para la regulación del sistema.

El bucle de los microorganismos crece exponencialmente al no estar limitado por la regulación del bucle responsable de la producción de anticuerpos y de la destrucción de microorganismos.

CLASIFICACIÓN DE LAS VARIABLES Y UNIDADES:

- Variables de estado:

MI: microorganismos

AC: anticuerpos

- Variables de flujo:

PAC: anticuerpos/hora

RMI: microorganismos/hora

DMI: microorganismos/hora

- Constantes:

SSI: hora⁻²

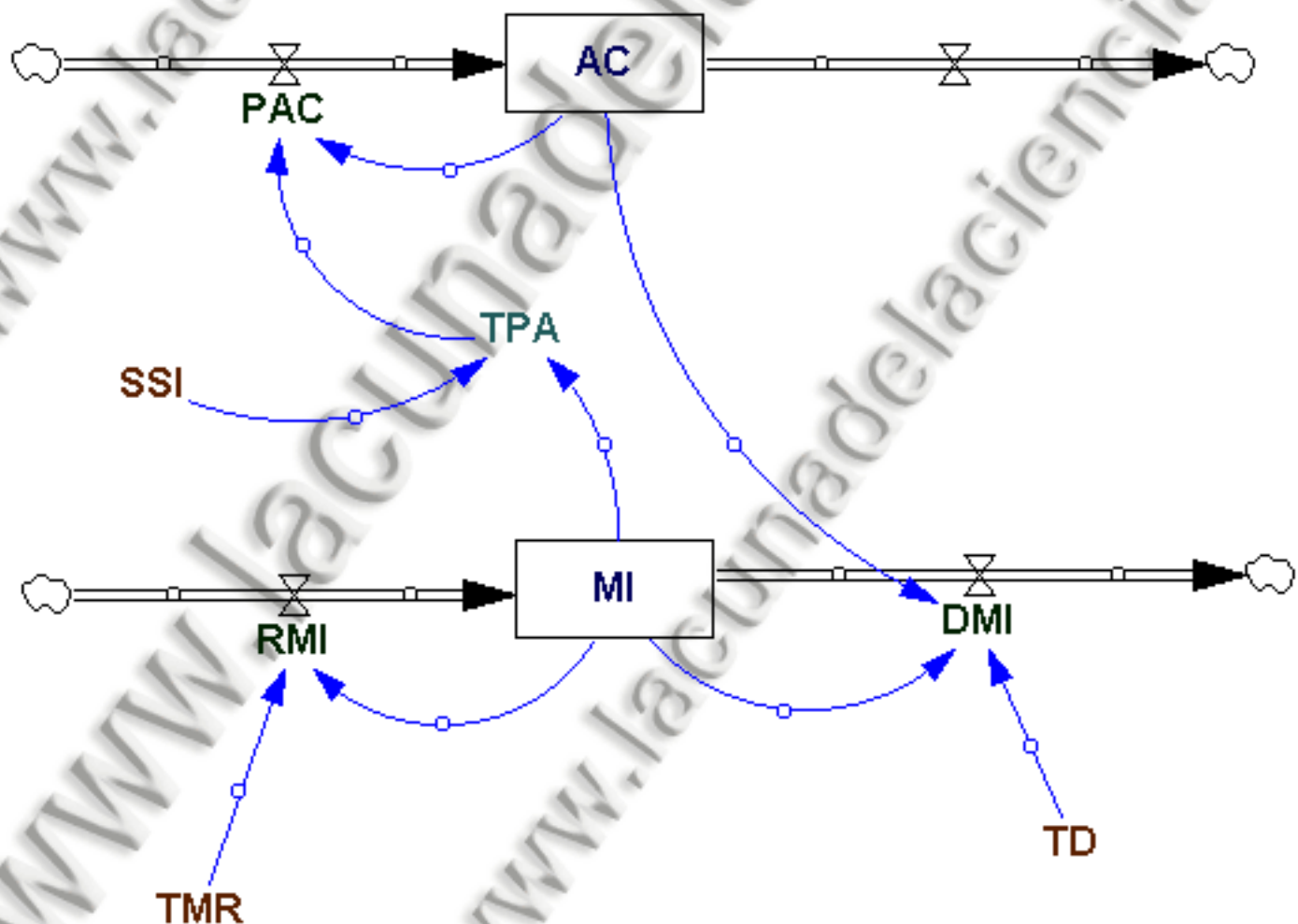
TMR: horas

TD: microorganismo/anticuerpo

- Variables auxiliares:

TPA: hora⁻¹

DIAGRAMA DE FORRESTER:



Encontramos un símil con el modelo de propagación de enfermedades infecciosa propuesto en el capítulo 4 de Ejemplos Elementales de Modelos. Apartado 4.4. Crecimiento sigmoidal.

ECUACIONES PARA LA SIMULACIÓN

- (1) $RMI(t) = MI(t) / TMR$
- (2) $DMI(t) = \min (MI(t), TD \cdot AC(t))$
- (3) $TPA(t) = SSI \cdot MI(t)$
- (4) $PAC(t) = TPA(t) \cdot AC(t)$
- (5) $AC(t + \Delta t) = AC(t) + \Delta t \cdot PAC(t)$
- (6) $MI(t + \Delta t) = MI(t) + \Delta t \cdot [RMI(t) - DMI(t)]$

c) Simulación

SSI = 0.02 TD = 1 TMR = 5
AC(0) = 2 MI(0) = 20

$\Delta t = 1$ HORA

Tabla con valores aproximados al entero menor al final de cada iteración.

t	AC	MI	RMI	DMI	TPA	PAC
0	2	20	4	2	0.4	0.8
1	2	22	4.4 = 4	2	0.44	0.88
2	2	24	4.8 = 4	2	0.48	0.96
3	2	26	5.2 = 5	2	0.52	1.04
4	3	29	5.8 = 5	3	0.58	1.74
5	4	31	6.2 = 6	4	0.62	2.48
6	6	33	6.6 = 6	6	0.66	3.96
7	9	33	6.6 = 6	9	0.66	5.94
8	14	30	6	14	0.60	8.40
9	22	22	4.40 = 4	22	0.44	9.68
10	31	4	0.8 = 0	4	0.08	2.48
11	33	0	0	0	0	0
12	33	0	0	0	0	0

d) Se podría establecer un sistema de discrepancia que controle que la sensibilidad del sistema inmunológico (SSI) no baja de un valor mínimo, seguro y necesario, y que daría lugar a que el sistema inmunológico se volviera ineficaz, incrementando en este caso su valor e influyendo positivamente en la tasa de producción de anticuerpos (TPA) lo que provocaría un aumento de las defensas; pues la reproducción de microorganismos (RMI) no influiría en la tasa de producción de anticuerpos (TPA) al no considerar el sistema inmunológico a los microorganismos del virus de SIDA como microorganismos extraños.

1. Se pretende analizar la evolución de una determinada población de conejos y zorros, confinados en una zona común, mediante un modelo que incluya al menos las siguientes seis variables:

- C, el número de conejos
- NC, el nacimiento de conejos
- MCP, la muerte de conejos por predación
- Z, el número de zorros
- NZ, el nacimiento de zorros
- MZFP, la muerte de zorros por falta de presas

a) Proponer un diagrama de influencias para el modelo, justificando de forma cualitativa cada una de las relaciones y sus signos.

b) Analizar todos los bucles del diagrama y razonar si este modelo simple de la población podría reproducir los siguientes tipos de comportamiento:

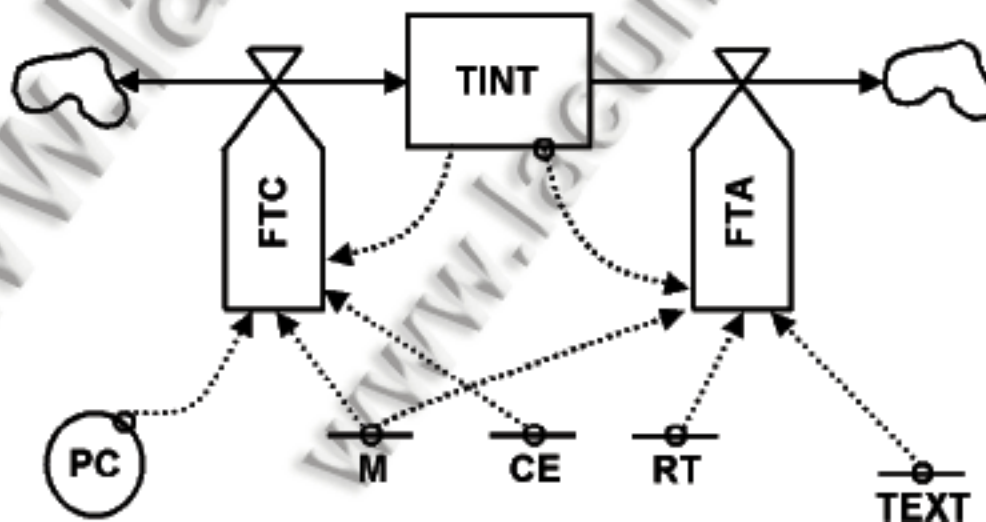
- Equilibrio perfecto entre los conejos y los zorros.
- Fluctuaciones continuas del número de conejos y de zorros
- Predominio de un tipo de animal sobre el otro, con la desaparición de este último
- Desaparición de toda la población

2. La siguiente ecuación diferencial describe la dinámica de la temperatura TINT(t) en el interior de una casa que alberga una masa de aire M con calor específico CE prácticamente constante. La casa posee un sistema de climatización con una potencia variable PC(t) que se emplea en aumentar o disminuir la temperatura interior y en vencer las pérdidas debidas a que el aislamiento térmico de la casa no es perfecto. Estas pérdidas son directamente proporcionales a la diferencia con la temperatura exterior TEXT(t) e inversamente proporcionales a la resistencia térmica RT de la casa.

$$\frac{dTINT(t)}{dt} = \frac{1}{M CE} PC(t) - \frac{1}{M CE RT} (TINT(t) - TEXT(t))$$

a) Tomando como referencia el siguiente diagrama de Forrester (intencionadamente erróneo), donde las siglas FTC y FTA corresponden respectivamente a los flujos térmicos debidos al sistema de climatización y al aislamiento de la casa, haga las correcciones que estime oportunas para que represente fielmente al modelo matemático. Razone todos los cambios que introduzca.

b) Completar el diagrama corregido del apartado (b) con un sistema automático capaz de llevar y mantener la temperatura en el interior de la casa a un valor deseado TD(t), ya sea por encima (calefacción) de la temperatura exterior o por debajo de ésta (aire acondicionado).



3. Modelo "Departamento de control de calidad"

Con el siguiente conjunto de ecuaciones se pretende modelar el movimiento de personal en el departamento de control de calidad de una pequeña empresa dedicada a la fabricación de circuitos integrados. El departamento se encarga de realizar los controles de calidad, pero únicamente los que la dirección considera estrictamente necesarios para mantener su mercado. El departamento está constituido por dos tipos de empleados: los aprendices y los controladores. Los primeros, tras una breve etapa de aprendizaje en la que no están autorizados a firmar los controles de calidad, siempre acaban como controladores. Los controladores están obligados a realizar los controles de calidad y a formar individualmente a los aprendices, todo ello a cambio de un sueldo poco atractivo por lo que su tiempo de permanencia en la empresa es pequeño. La empresa es consciente de esta realidad y que la formación de cada aprendiz reduce la jornada de un controlador al 50%, pero prefiere contratar nuevos aprendices antes que aumentar el sueldo de los controladores. La contratación de aprendices, aunque no es inmediata, se decide en base a dos objetivos: cubrir los abandonos esperados y adecuar la capacidad efectiva del departamento a las necesidades reales de la empresa.

$$(1) \text{CED}(t) = C(t) - 0.5 A(t)$$

Siendo: A, el número de aprendices

$$(2) \text{AC}(t) = \max\left(0, \frac{\text{MCA} + \text{CN} - \text{CED}(t)}{\text{TMI}}\right)$$

$$(3) \text{NC}(t) = \frac{A(t)}{\text{TMA}}$$

$$(4) \text{CA}(t) = \frac{C(t)}{\text{TMP}}$$

$$(5) \frac{dA(t)}{dt} = \text{AC}(t) - \text{NC}(t)$$

$$(6) \frac{dC(t)}{dt} = \text{NC}(t) - \text{CA}(t)$$

AC, los aprendices que se contratan

C, el número de controladores

CA, los controladores que abandonan

CED, la capacidad efectiva del departamento

CN, la capacidad necesaria para mantener el mercado

MCA, la media de controladores que abandonan

NC, los nuevos controladores

TMA, el tiempo medio de aprendizaje

TMI, el tiempo medio de incorporación de los aprendices

TMP, el tiempo medio de permanencia de los controladores

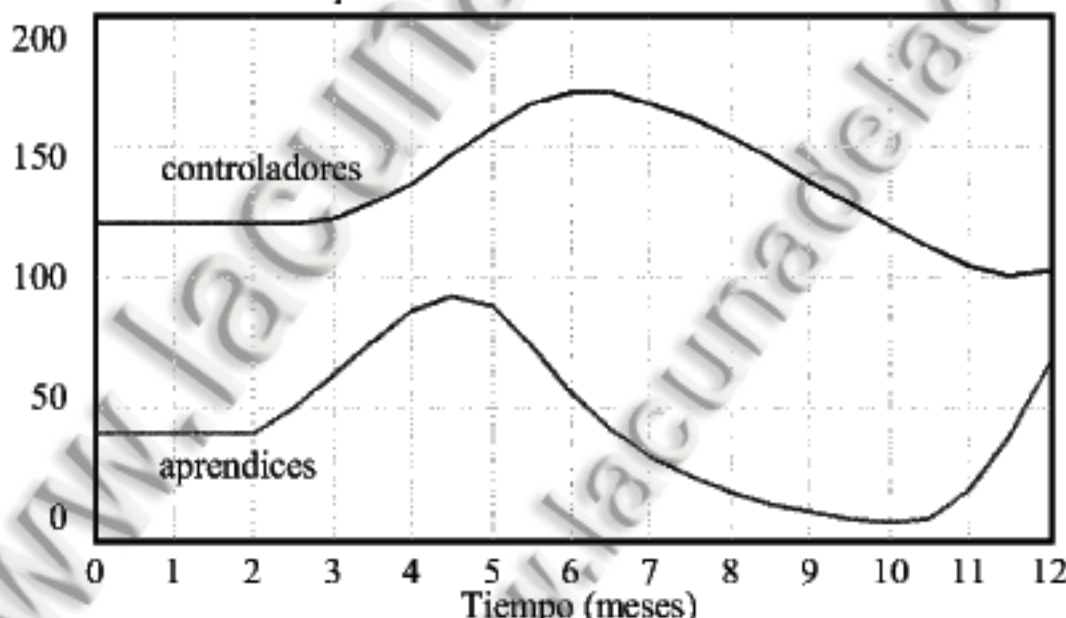
a) Justificar razonadamente que el modelo propuesto es coherente con el enunciado.

b) Clasificar las variables y resumir en el correspondiente diagrama de Forrester el conjunto total de ecuaciones del modelo.

c) Comprobar que si $\text{TMI} = 1$ mes, $\text{TMA} = 2$ meses, $\text{TMP} = 6$ meses; con un departamento de 40 aprendices y 120 controladores la empresa consigue una capacidad efectiva igual a la necesaria $\text{CN} = 100$, pero para mantenerla está obligada a seguir contratando 20 aprendices cada mes que cubran los abandonos que se irán produciendo.

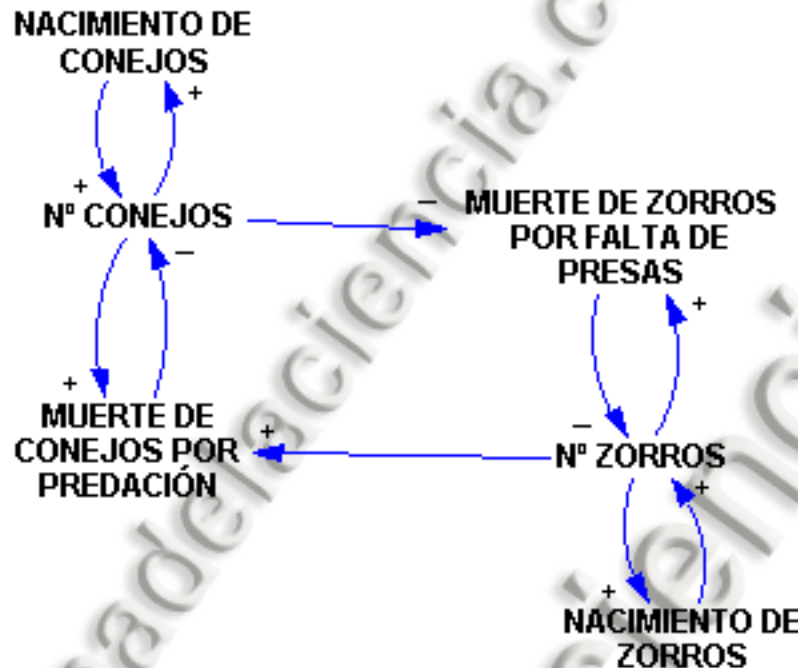
d) Partiendo de las condiciones del apartado c) comprobar mediante la simulación que si dentro de 2 meses, debido al descontento de los clientes, la empresa decide que hay que aumentar la capacidad del departamento un 10% pero sigue suponiendo que los abandonos se van a mantener en la media anterior $\text{MCA} = 20$ controladores/mes, se desencadenará una situación de inestabilidad como la mostrada en la figura. Se recomienda utilizar la aproximación de Euler con $t = 0.5$ meses (aproximadamente 2 semanas) como intervalo de simulación y redondear al menor entero en todos los flujos.

Departamento de control de calidad



e) En el modelo se ha incluido la variable TMI para englobar el tiempo medio transcurrido desde que la empresa decide contratar a un aprendiz y éste se incorpora al departamento. ¿Qué modificaciones haría en el modelo para contemplar que la decisión y la incorporación son inmediatas, pero entre ambas está el acto administrativo de contratar al aprendiz que no se puede eliminar y que consume siempre el mismo tiempo 0.1 meses (aproximadamente 3 días)? ¿Qué intervalo de simulación tendría que utilizar para que las simulaciones con el nuevo modelo fueran representativas de lo que va a ocurrir?

a) DIAGRAMA DE INFLUENCIAS



Nacimiento de conejos/nacimiento de zorros: se trata de bucles de realimentación positiva, a más nacimientos mayor número de conejos/zorros y a más número de conejos/zorros, más nacimientos. Se trata de un bucle con carácter reforzador.

Muerte de conejos por predación/muerte de zorros por falta de presas: El número de zorros influye positivamente en la muerte de conejos por predación y la muerte de conejos por predación influye positivamente en la muerte de zorros por falta de presas (a más conejos muertos, más muerte de zorros por falta de presas). A su vez, la muerte de zorros por falta de presas influye negativamente en el número de zorros y la muerte de conejos por predación, negativamente en el número de conejos. Los bucles de muertes tienen carácter regulador de la población.

b) El crecimiento en la población de zorros depende del número de conejos disponibles en un momento dado. A mayor número de conejos crecerá la población de zorros, que comenzará a matar más y más conejos. Cuando los conejos se agoten, la población de zorros se verá fuertemente afectada y comienza a morir permitiendo a los pocos conejos supervivientes reproducirse. En este punto, la población de conejos comienza a incrementarse y también la de zorros aumenta (Fluctuaciones continuas entre el número de conejos y zorros).

El equilibrio perfecto sería: población de conejos suficientemente grande para sobrevivir a los ataques de los zorros y el número de zorros no muy alto para no agotar la población de conejos.

Si el número de zorros fuera alto comparado con el de conejos no podrían ser mantenidos por ellos. Si los zorros continúan devorando los pocos conejos que quedan podría conducir a la desaparición de la población de conejos por el predominio de zorros.

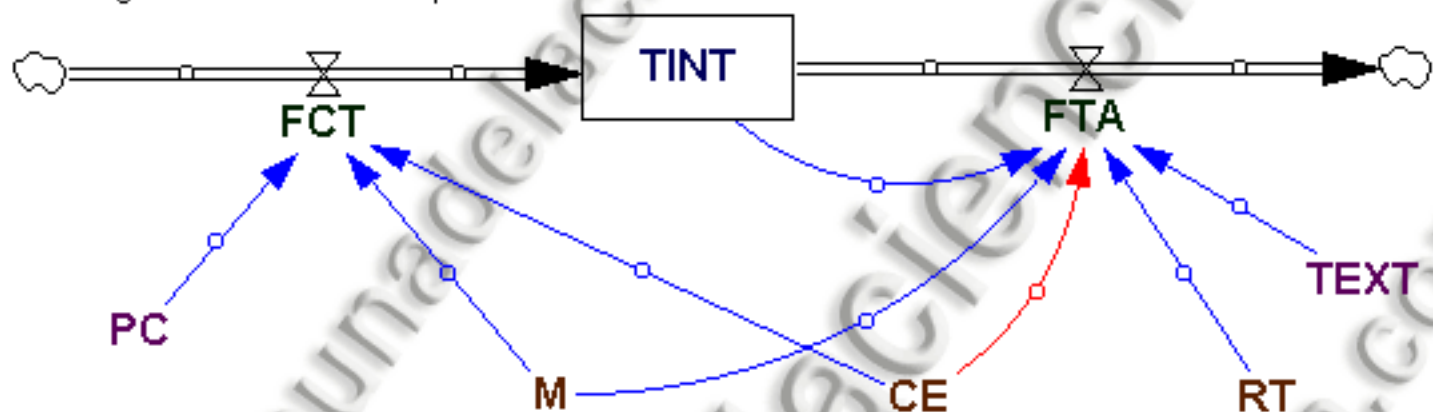
Sin conejos, el hambre conduciría a la disminución de la población de zorros, produciéndose así la desaparición de toda la población.

a) El flujo de la temperatura interior aumenta con los flujos térmicos debidos al sistema de climatización y disminuye con el flujo térmico debido al aislamiento de la casa.
El flujo térmico debido al sistema de climatización depende de una variable exógena que es la potencia variable y de dos constantes: la masa de aire y el calor específico.
El flujo térmico debido al aislamiento de la casa depende de la variable de flujo temperatura interna, de la variable exógena temperatura exterior; y de las constantes: masa de aire, calor específico y resistencia térmica de la casa.

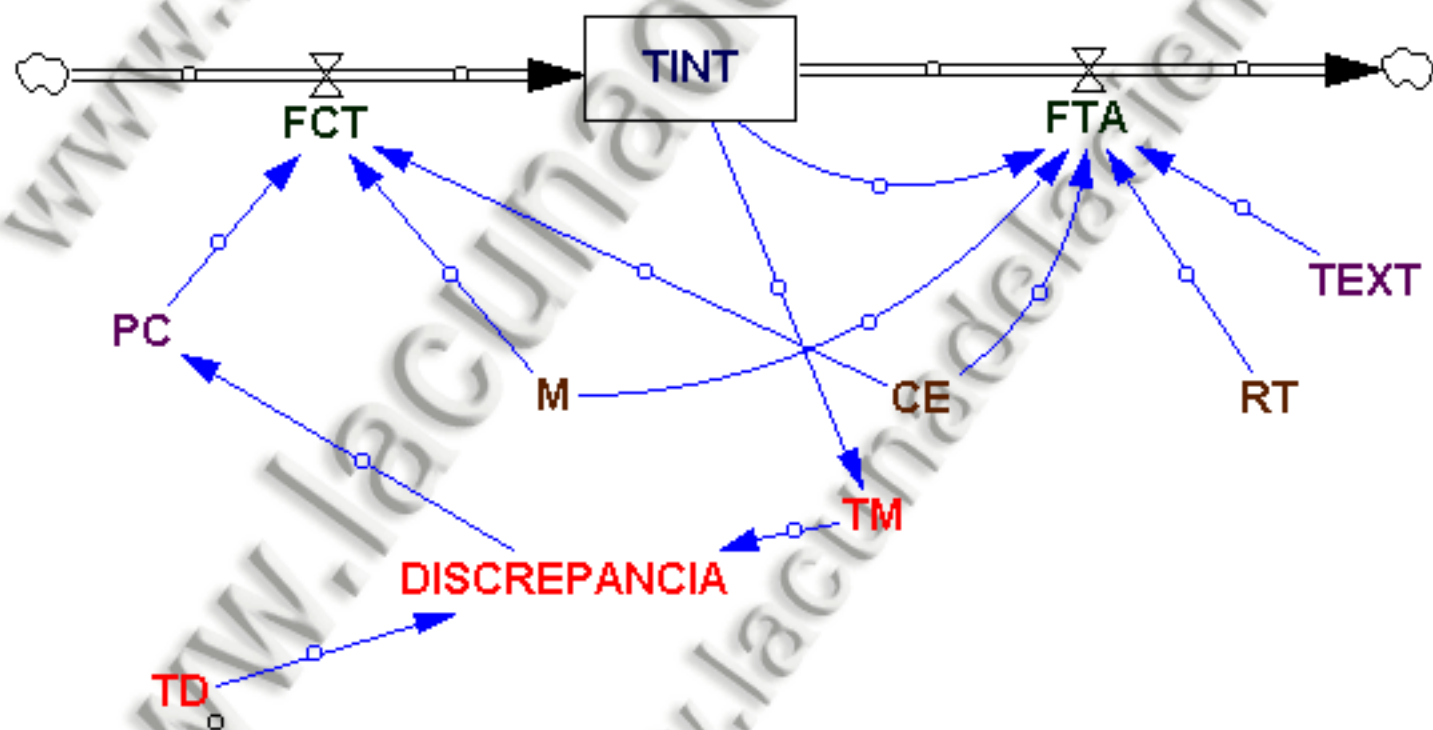
Las correcciones hechas en el diagrama de Forrester son:

- No debe haber enlace entre TINT y FTC,
- Debe haber enlace entre CE Y FTA,
- TEXT es una variable exógena.

El diagrama de Forrester queda así:



a) El sistema automático necesita dos variables exógenas (TD: temperatura deseada y TM: temperatura medida) y una variable auxiliar más (Disc: discrepancia).
El sistema quedaría así:



El sistema automático incluye la medición de la temperatura interior de la casa: TM, que se comparará con TD: temperatura deseada y si existe una discrepancia entre ambas se produce un aumento o disminución de la potencia PC del sistema de climatización que posee la casa.

Modelo departamento de control de calidad.

a) Justificación.

El flujo de aprendices "se llena" con los aprendices que se contratan y "se vacía" con el número de nuevos controladores (tras una breve etapa de aprendizaje los aprendices acaban como controladores) (5)

El flujo de controladores "se llena" con el número de nuevos controladores después de la etapa de aprendizaje y tiene como salida los controladores que abandonan pues tienen un sueldo poco atractivo y permanecen poco tiempo en la empresa. (6)

Las ecuaciones de estado son coherentes con el enunciado

DEFINICIÓN DE VARIABLES:

A, el número de aprendices

AC, los aprendices que se contratan

C, el número de controladores

CA, los controladores que abandonan

CED, la capacidad efectiva del departamento

CN, la capacidad necesaria para mantener el mercado

MCA, la media de controladores que abandonan

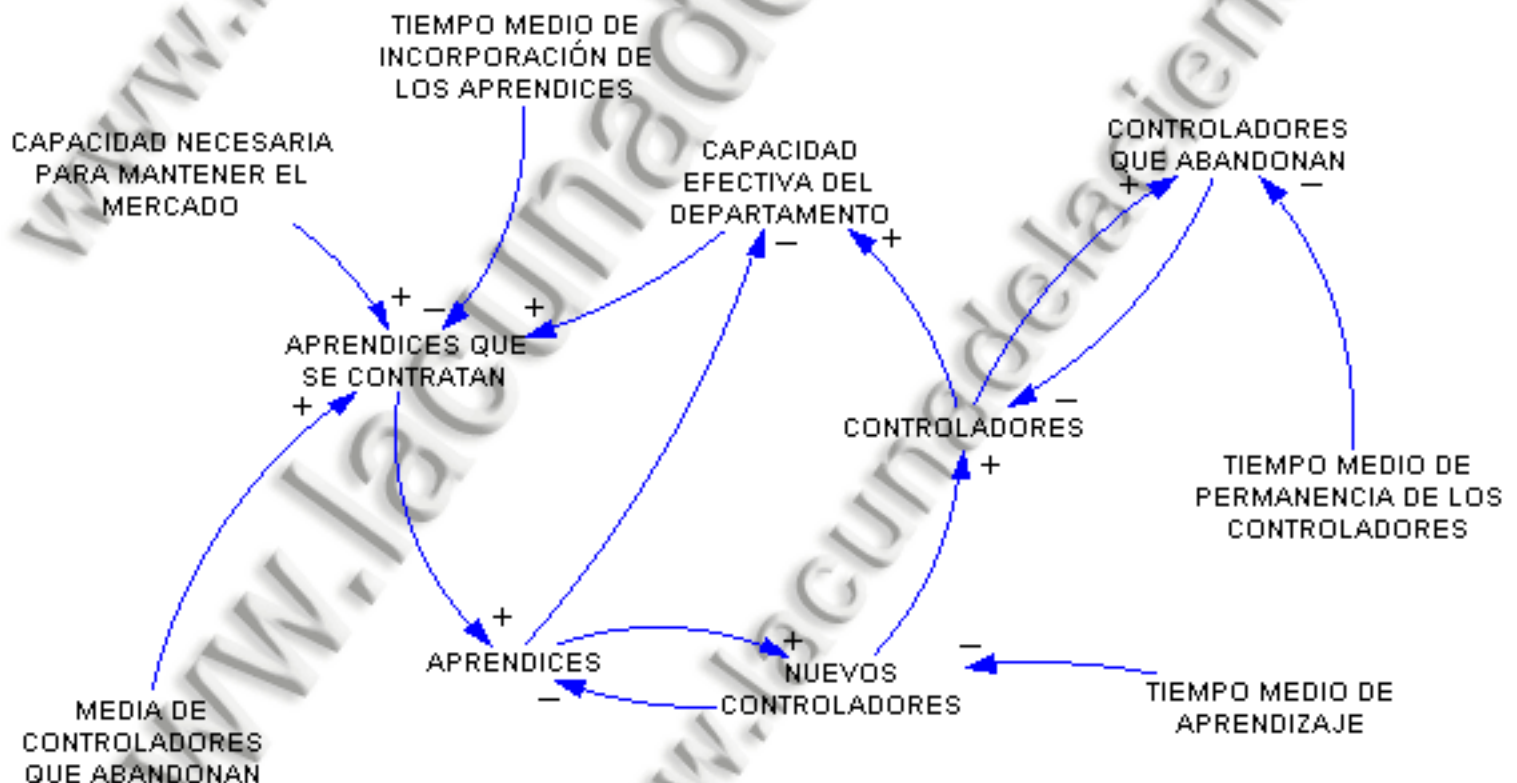
NC, los nuevos controladores

TMA, el tiempo medio de aprendizaje

TMI, el tiempo medio de incorporación de los aprendices

TMP, el tiempo medio de permanencia de los controladores

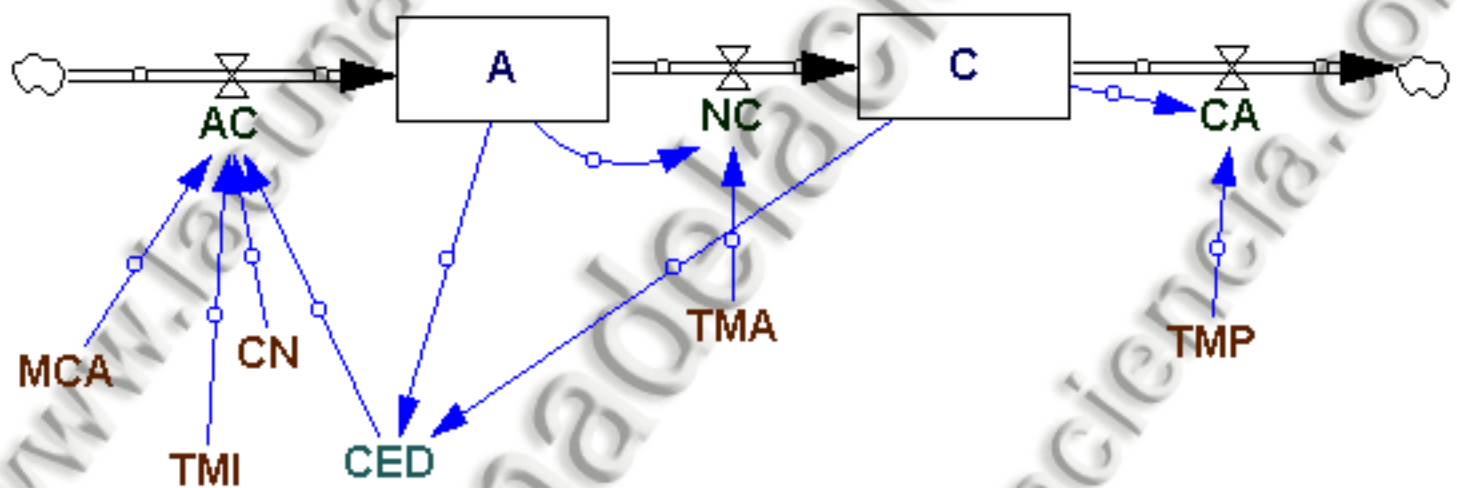
DIAGRAMA DE INFLUENCIAS



b) CLASIFICACIÓN DE LAS VARIABLES Y UNIDADES:

- Variables de estado:
A: aprendices
C: controladores
- Variables de flujo:
AC: aprendices/mes
NC: controladores/mes
CA: controladores/mes
- Constantes:
TMA: meses
TMI: meses
TMP: meses
CN: controladores
MCA: controladores
- Variable auxiliar:
CED: controladores

DIAGRAMA DE FORRESTER:



ECUACIONES PARA LA SIMULACIÓN

- (1) $CED(t) = C(t) - 0.5 A(t)$
- (2) $AC(t) = \max(0, \frac{MCA + CN - CED(t)}{TMI})$
- (3) $NC(t) = A(t) / TMA$
- (4) $CA(t) = C(t) / TMP$
- (5) $A(t + \Delta t) = A(t) + \Delta t \cdot (AC(t) - NC(t))$
- (6) $C(t + \Delta t) = C(t) + \Delta t \cdot (NC(t) - CA(t))$

c) El ejercicio habla de tener una capacidad efectiva igual a la necesaria. Esto implica estabilidad. Para que el sistema tenga estabilidad, los incrementos, es decir, las derivadas temporales deben ser nulas. Esto implica:

$$AC - NC = 0$$

$$NC - CA = 0$$

Si calculamos NC y CA en las condiciones del enunciado, comprobamos que ambas variables toman un valor 20 con lo cual la segunda ecuación se cumple sin más. La primera ecuación se cumplirá si $AC = 20$: hay que seguir contratando 20 aprendices cada mes.

d) Simulación

$TMI = 0.5$ $TMA = 2$ $TMP = 6$ $CN = 100$ $MCA = 10$

NOTA: MCA lo obtenemos con $AC = 20$, $CN = 100$, $CED = 100$ y $TMI = 1$

$TMI \cdot AC = MCA + CN - CED$

$1 \cdot 20 = MCA + 100 - 100$

$MCA = 20$

$A(0) = 40$ $C(0) = 120$

$\Delta t = 1$ mes

Hay que tener en cuenta que para la simulación tenemos las condiciones del apartado anterior hasta $t = 2$. A partir de ahí, $MCA = 20$ y CN aumenta 10%.

t	A	C	CED	AC	NC	CA
0	40	120	100	20	20	20
0,5	40	120	100	20	20	20
1	40	120	100	20	20	20
1,5	40	120	100	20	20	20
2	40	120	100	30	20	20
2,5	45	120	97,5	32,5	22,5	20
3	50	121	96	34	25	20,16
3,5	54,5 (54)	123,5 (123)	96,25	33,75	27,25	20,58
4	57	126,5 (126)	98	32	28,5	21,08
4,5	59	129,5 (129)	100	30	29,5	21,58
5	59,5 (59)	133	103,5	26,5	29,75	22,16
5,5	57,5 (57)	137	108,25	21,75	28,75	22,83
6	53,5 (53)	140	113,25	16,75	26,75	23,3
6,5	48	141,5 (141)	117,5	12,5	24	23,58
7	42	141,5 (141)	120,5	9,5	21	23,58
7,5	36	140	122	8	18	23,3
8	31	137,5 (137)	122	8	15,5	22,91
8,5	27,5 (27)	133,5 (133)	119,75	10,25	13,75	22,25
9	25,5 (25)	128,5 (128)	115,75	14,25	12,75	21,41
9,5	26	123,5 (123)	110,5	19,5	13	20,58
10	29	119,5 (119)	105	25	14,5	19,91
10,5	34,5 (34)	116,5 (116)	99,25	30,75	17,25	19,41
11	40,5 (40)	115	94,75	35,25	20,25	19,16
11,5	47,5 (47)	115,5 (115)	91,75	38,25	23,75	19,25
12	54,5 (54)	117	89,75	40,25	27,25	19,5

En la presente simulación sólo se muestran redondeados los valores de A y C pues son los valores representados en la figura del enunciado y los que hay que ir comprobando que están bien calculados. En lo que respecta a los cálculos de las ecuaciones: en el cálculo del siguiente t los valores del t anterior se truncan (Se redondean todos los flujos al menor entero).

e) Para contemplar que la decisión y la incorporación son inmediatas, pero entre ambas está el acto administrativo de contratar al aprendiz que consume un tiempo fijo eliminaremos la variable TMI, e incluiremos un retraso haciendo los siguientes cambios:

$$(1) \text{CED}(t) = C(t) - 0.5 \text{AI}(t)$$

$$(3) \text{NC}(t) = \text{AI}(t) / \text{TMA}$$

$$(5) \frac{dA(t)}{dt} = AC(t) - \text{IA}(t) \quad \text{y} \quad \frac{d\text{AI}(t)}{dt} = \text{IA}(t) - \text{NC}(t)$$

Donde AI es una variable de estado que representa los aprendices ya incorporados e IA es una variable de flujo que representa los aprendices que se incorporan.

Además tendríamos que añadir la siguiente ecuación:

$$\text{AI}(t) = \text{delay}(A(t), 0.1)$$

Cuando hay un retraso, el intervalo de simulación debe ser mayor que el retraso. En este caso el intervalo de simulación debe ser mayor que 0,1 meses.

1. Modelo "Política de precio para el kg de jamón". Con el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$(1) \text{CEJ}(t) = \text{CMJ} \cdot P$$

$$(2) \text{EMPJ}(t) = f\left(\frac{\text{JA}(t)}{\text{ut} \cdot \text{CEJ}(t)}\right)$$

$$(3) \text{PRJ}(t) = \text{FMPJ}(t) \cdot \text{PNRJ}$$

$$(4) \text{PFJ}(t) = \text{PRJ}(t) + \text{MPJ}$$

$$(5) \text{FMCJ}(t) = g\left(\frac{\text{PFJ}(t)}{\text{PEJ}(t)}\right)$$

$$(6) \text{CJ}(t) = \text{FMCJ}(t) \cdot \text{CEJ}(t)$$

$$(7) \frac{d \text{JA}(t)}{dt} = \text{PJ}(t) - \text{CJ}(t)$$

En el que intervienen las siguientes variables:

CEJ: Consumo estimado de jamón

CJ: Consumo de jamón

CMJ: Consumo medio de jamón por persona

f: Función no lineal monótona decreciente que pasa por el punto (0.5,1), por tanto servirá para: a) no cambiar el precio del jamón si hay jamones para atender el consumo de la población durante medio mes, d) aumentarlo si no hay suficientes jamones para atender ese consumo y c) disminuirlo si hay exceso de jamones para atender ese consumo.

FMCJ: Factor multiplicativo del consumo de jamón

FMPJ: Factor multiplicativo del precio del jamón

g: Función no lineal monótona decreciente que pasa por el punto (1,1), por tanto servirá para determinar el consumo de jamones: a) igual al consumo habitual si el precio final coincide con el precio esperado por la población, b) inferior al consumo habitual si el precio final está por encima del precio esperado por la población y c) superior al consumo habitual si el precio final está por debajo del precio esperado por la población.

JA: Jamón almacenado

MPJ: Margen para las charcuterías

P: Población consumidora de jamón

PEJ: Precio esperado por los consumidores de jamón

PFJ: Precio final del kilo de jamón

PJ: Producción de jamón

PNRJ: Precio normalmente recomendado para el kilo de jamón

PRJ: Precio recomendado para el kilo de jamón

ut: La unidad de tiempo

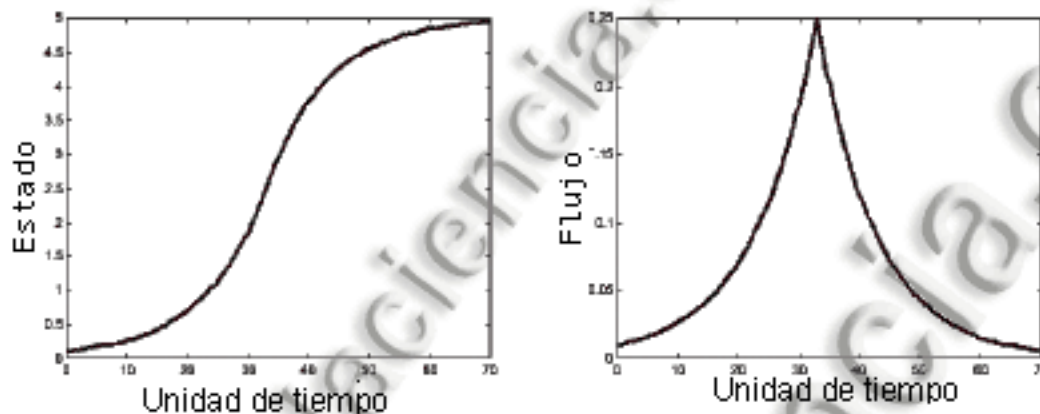
Se pretende modelar la política que sigue una empresa productora de jamones serranos para fijar el precio (en euros) del kilo de jamón. La política de precios consiste en hacer pequeñas variaciones sobre el precio habitual con el fin de favorecer un mayor o menor consumo mensual de jamón y por tanto que el exceso o defecto de producción no produzcan un desbordamiento o vaciado del almacén de jamones. En el modelo están implícitas las siguientes hipótesis: la población consumidora se considera prácticamente constante y con un hábito de consumo marcado principalmente por el precio esperado del jamón, las charcuterías tienen un margen fijo sobre el precio.

a) Dibujar el diagrama de influencias, justificando todas y cada una de las relaciones y los correspondientes signos. Se recomienda utilizar el nombre abreviado en las variables.

b) Analizar de forma cualitativa la presencia de bucles de realimentación, justificando si el diagrama reproduce fielmente la política de precio comentada en el enunciado, y si está garantizada la estabilidad. Se recomienda hacer el análisis suponiendo una fluctuación (aumento o disminución) en la producción de jamones.

2. Las figuras muestran la evolución temporal de las variables (estado y flujo) de un bucle elemental de realimentación.

- a) ¿Qué tipo de relación debe existir entre el estado y el flujo para que se produzca ese comportamiento?
b) Razonar sobre la estructura que tendría el modelo completo, trazando el correspondiente diagrama de Forrester.



3. Modelo de "ventas de una vídeo consola".

Las siguientes ecuaciones pretenden modelar el proceso de venta de una video consola en una determinada población. Inicialmente sólo un subconjunto de la población la tiene y a partir de la propaganda que éste realiza del producto, el resto de vecinos la empiezan a comprar.

$$(1) \frac{dPSVC(t)}{dt} = -FP(t)$$

$$(2) \frac{dPCVC(t)}{dt} = FP(t)$$

$$(3) FP(t) = \frac{PCVC(t) PSVC(t) NED EPV}{PT}$$

Siendo:

EPV: Porcentaje de encuentros diarios que propagan la venta de la vídeo consola

FP: Flujo de propagación de la venta de la vídeo consola

NED: Número de encuentros diarios entre personas que tienen la vídeo consola y personas que no la tienen

PCVC: Población que tiene la vídeo consola

PSVC: Población que no tiene la vídeo consola

PT: Población total

a) Hacer una clasificación razonada de las variables que describen el modelo, especificando las unidades de cada una de ellas.

b) Dibujar el correspondiente diagrama de Forrester.

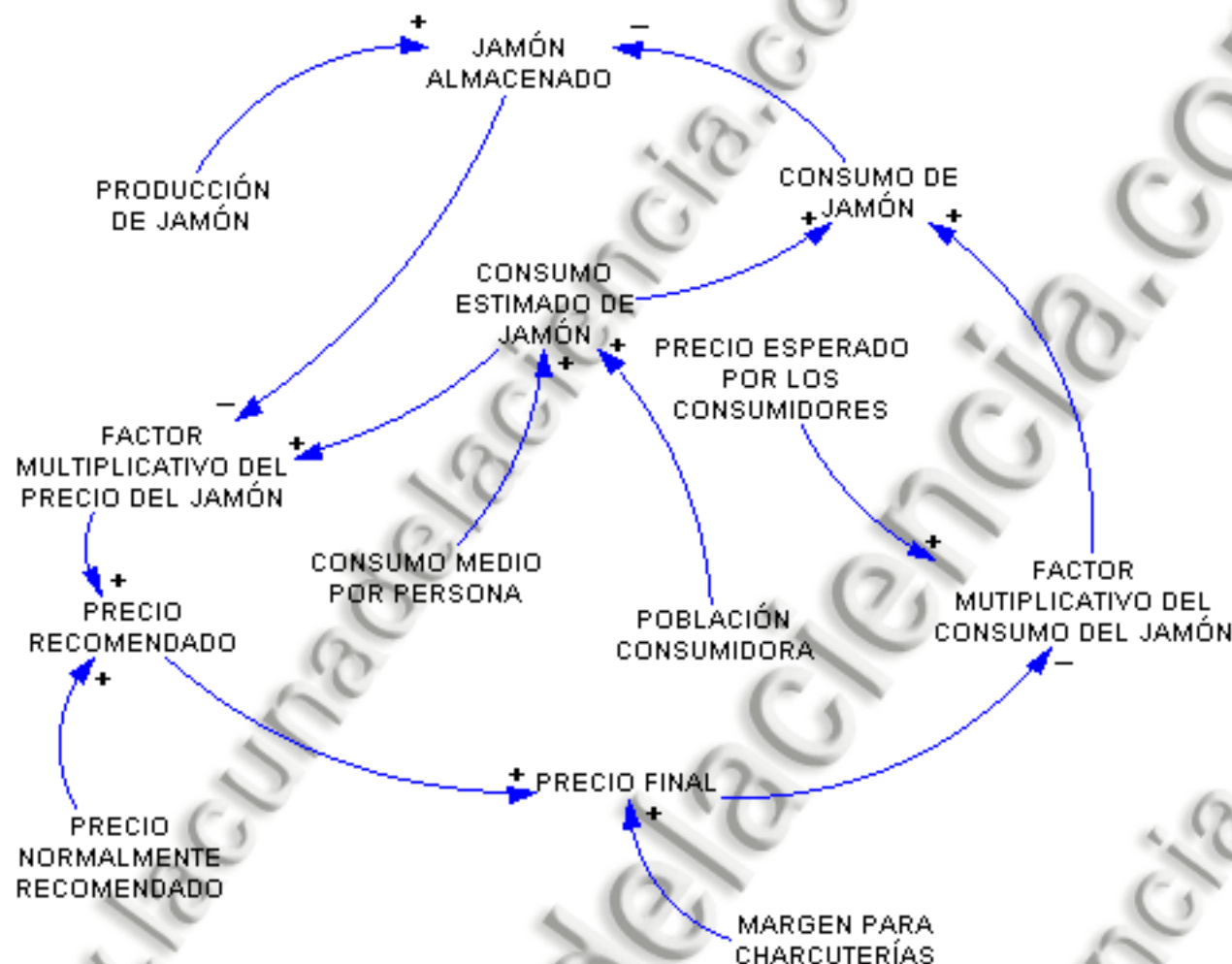
c) Obtener los valores de las variables más significativas del modelo durante al menos 15 días, considerando que:

- La unidad de tiempo es el día
- La población total se mantiene constante, $PT = 500$, durante todo el tiempo que dura la simulación.
- El número de encuentros diarios (NED) es igual a 10.
- Un 5% de los encuentros diarios provocan la compra del producto ($EPV = 0.05$).
- Inicialmente sólo un vecino tiene la vídeo consola.
- El flujo de propagación de la venta de la vídeo consola puede tomar valores reales.

d) ¿Qué ocurre si se modifica la última de las condiciones del apartado anterior, considerando en su lugar que el número de personas que compran la vídeo consola tiene que ser un número entero? ¿Se obtienen resultados realistas? ¿Serviría esta hipótesis en otras condiciones iniciales, por ejemplo con $PCVC(0) = 5$?

e) Considerando los mismo parámetros que en el apartado (c), determinar el número mínimo de personas que deberían tener la vídeo consola en el instante inicial, $PCVC(0)$, para que la venta se propague.

DIAGRAMA DE INFLUENCIAS



a) Con respecto a las relaciones y sus respectivos signos, resulta muy sencillo su deducción a partir de las ecuaciones del modelo, así si se trata de una variable de estado si el flujo es positivo (de entrada) su influencia en la variable será positiva y el que esté restando (de salida) negativa.

En las variables de flujo o auxiliares las que se encuentren en el numerador o estén multiplicando representarán una influencia positiva y las que estén dividiendo una influencia negativa.

La producción de jamón **influye positivamente** en el jamón almacenado (un aumento/disminución de producción provoca un aumento/disminución de jamón almacenado). El consumo de jamón por el contrario **influye negativamente** en el jamón almacenado mayor/menor consumo menor/mayor jamón almacenado.

El consumo de jamón está **influido positivamente** tanto por el consumo estimado de jamón como del factor multiplicativo del consumo del jamón. Y el consumo estimado de jamón se ve **influido positivamente** por el consumo medio por persona y por la población consumidora.

El factor multiplicativo del precio del jamón está **influido negativamente** por la cantidad de jamón almacenado y **positivamente** por el consumo estimado de jamón ambas influencias harán que este factor multiplicativo **influya positivamente** en el precio recomendado aumentando éste si hay jamones para atender el consumo o disminuyendolo si no la hay.

A su vez el precio normalmente recomendado **influye positivamente** en el precio recomendado y éste influye, junto con el margen para charcuterías, **positivamente** en el precio final que **influye negativamente** en el factor multiplicativo del consumo del jamón que además de esta influencia positiva se ve **influenciado positivamente** por el precio esperado por los consumidores lo que determinará el consumo de jamón.

b) El bucle existente en el diagrama de influencias es un bucle de realimentación negativa y por tanto garantiza la estabilidad del sistema.

Jamón almacenado \rightarrow factor multiplicativo del precio del jamón \rightarrow precio recomendado \rightarrow precio final \rightarrow factor multiplicativo del consumo del jamón \rightarrow consumo de jamón \rightarrow jamón almacenado

La cantidad de jamón almacenado determina el precio del kilo del jamón y este precio es el que influye en el consumo, favoreciendo un mayor o menor consumo de jamón.

Si hay un aumento de producción de jamón aumenta la cantidad de jamón almacenado lo que provocará (factor multiplicativo del precio del jamón) una disminución en el precio del jamón y esta disminución de precio provocará un aumento del consumo de jamón lo que provocará eliminar el exceso de producción de jamón inicial.

Si por el contrario hubiese una disminución en la producción de jamón disminuirá la cantidad de jamón almacenado aumentará el precio del jamón y por tanto el consumo será menor lo que evitará el vaciado del almacén de jamones.

- a) Para que en un sistema de primer orden presente un crecimiento en S es necesario que exista una función no lineal en la realimentación de nivel, es decir, el estado x variará en función del Flujo que a su vez es función no lineal del estado x .

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(t) ; F(t) = k R(x(t))$$

donde $R(t)$ es la función no lineal tal que

$$R(t) = x(t) \quad \text{si } x(t) < \text{ó} = x_d/2$$

$$R(t) = x_d - x(t) \quad \text{si } x(t) > x_d/2$$

La expresión matemática que relaciona el flujo con el estado se puede expresar:

$$F(t) = k x(t) \quad \text{si } x(t) < \text{ó} = x_d/2$$

$$F(t) = k (x_d - x(t)) \quad \text{si } x(t) > x_d/2$$

- b) Echemos un vistazo a las gráficas del enunciado.

En un instante de tiempo $t=10$ $x(10)=0,25$ (dato extraído de la gráfica de la izq)

$F(10)=0,0025$ (dato extraído gráfica derecha)

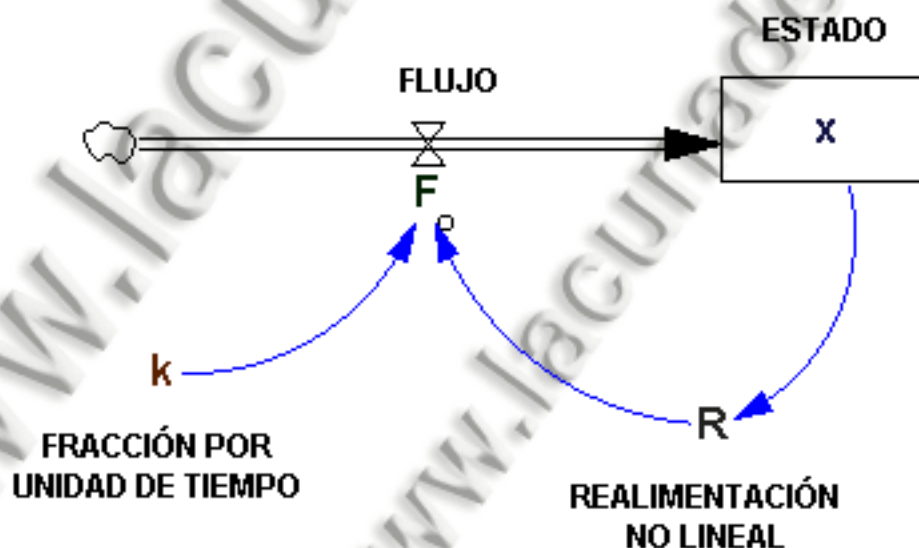
Por tanto si $F(10) = k x(10)$; $0,0025 = k 0,05$; $k=0,1$

Por otra parte de la gráfica de la izq obtenemos dato $x_d=5$

En nuestro modelo $F(t) = 0,1 x(t)$ si $x(t) < \text{ó} = 2,5$

$F(t) = 0,1 (5 - x(t))$ si $x(t) > 2,5$

El sistema presentará un crecimiento exponencial hasta el estado medio (2,5) y flujo máximo (0,25), la relación entre el flujo y el estado, en este tramo, es la de un bucle elemental de realimentación positiva, y a partir de este instante el sistema evolucionará al estado deseado (5) de forma asintótica siendo la relación entre el flujo y el estado, en este otro tramo, la de un bucle elemental de realimentación negativa. La no linealidad hace que la realimentación sea positiva o negativa en función de que el nivel esté por debajo o por encima del valor al que corresponde el flujo máximo. El comportamiento del sistema será similar al crecimiento SIGMOIDAL.



Modelo ventas de una video consola.

a) DEFINICIÓN DE VARIABLES:

EPV: Porcentaje de encuentros diarios que propagan la venta de la vídeo consola

FP: Flujo de propagación de la venta de la vídeo consola

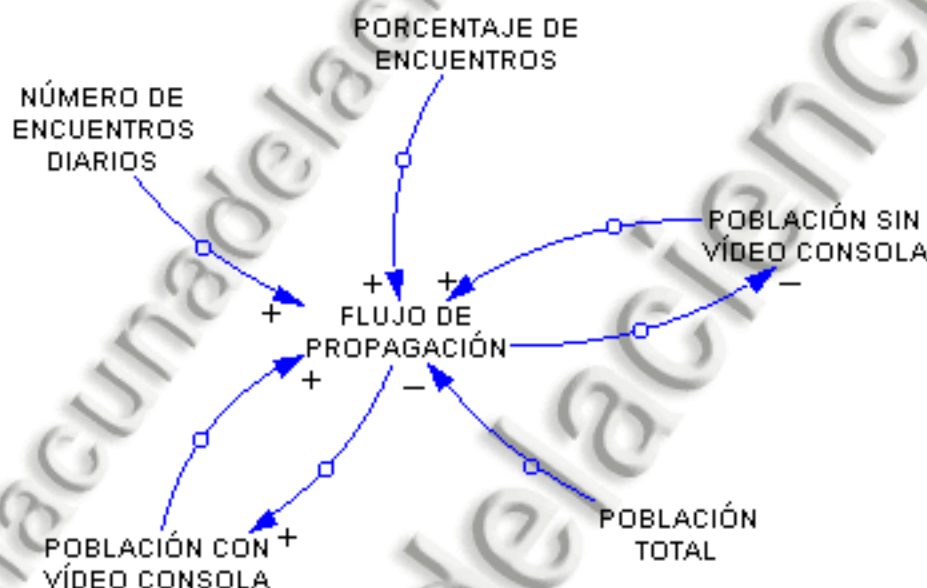
NED: Número de encuentros diarios entre personas que tienen la vídeo consola y personas que no la tienen

PCVC: Población que tiene la vídeo consola

PSVC: Población que no tiene la vídeo consola

PT: Población total

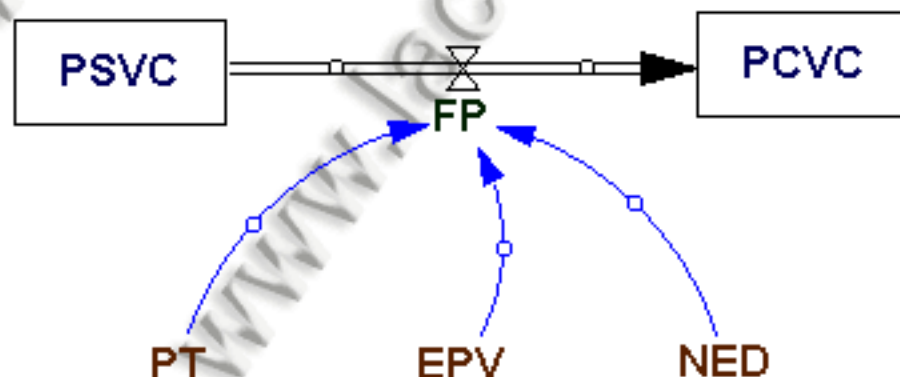
DIAGRAMA DE INFLUENCIAS



CLASIFICACIÓN DE LAS VARIABLES Y UNIDADES:

- Variables de estado:
PSVC: personas
PCVC: personas
- Variables de flujo:
FP: personas · encuentros / días
- Constantes:
PT: personas
EPV: adimensional
NED: encuentros / día

DIAGRAMA DE FORRESTER:



ECUACIONES PARA LA SIMULACIÓN

- (1) $PSVC(t + \Delta t) = PSVC(t) - \Delta t \cdot FP(t)$
 (2) $PCVC(t + \Delta t) = PCVC(t) + \Delta t \cdot FP(t)$
 (3) $FP(t) = PCVC(t) \cdot PSVC(t) \cdot NED \cdot EPV / PT$

c) Simulación

PT = 500 NED = 10 EPV = 0.05

PCVC(0) = 1

$\Delta t = 1$ día

Tabla con valores sin aproximar (valores reales).

t	PCVC	PSVC	FP
0	1	499	0.499
1	1.499	498.501	0.747
2	2.246	497.754	1.118
3	3.364	496.636	1.671
4	5.035	494.965	2.492
5	7.527	492.473	3.707
6	11.234	488.766	5.491
7	16.725	483.275	8.083
8	24.808	475.192	11.789
9	36.597	463.403	16.959
10	53.556	446.440	23.910
11	77.466	422.534	32.732
12	110.198	389.802	42.955
13	153.153	346.847	53.121
14	206.274	293.726	60.588
15	266.862	233.138	62.216

d) Si consideramos que el número de personas sólo puede tomar valores enteros, tendremos que aproximar al entero más próximo (para que el número de persona total se mantenga constante) al final de cada iteración:

t	PCVC	PSVC	FP
0	1	499	0.499
1	1.499 \approx 1	498.5 \approx 499	0.747
2	1.747 \approx 2	498.3 \approx 498	0.870
3	1.870 \approx 2	491.1 \approx 498	0.932
4	1.932 \approx 2	498.1 \approx 498	0.962
5	1.962 \approx 2	498.0 \approx 498	0.977
6	1.977 \approx 2	498.0 \approx 498	0.985
7	1.985 \approx 2	498.0 \approx 498	0.989
8	1.989 \approx 2	498.0 \approx 498	0.991
9	1.991 \approx 2	498.0 \approx 498	0.992
10	1.992 \approx 2	498.0 \approx 498	0.992

Según esta simulación, sólo una persona compra al vídeo consola. Los resultados no son realistas.

Si hacemos la aproximación con la condición inicial $PCVC(0) = 5$:

t	PCVC	PSVC	FP
0	5	495	2.475
1	7.4 \approx 7	492.5 \approx 493	3.682
2	10.6 \approx 11	489.3 \approx 489	5.227
3	15.2 \approx 15	484.7 \approx 485	7.382
4	22.3 \approx 22	477.6 \approx 478	10.690
5	32.6 \approx 33	467.3 \approx 467	15.276
6	47.2 \approx 47	452.7 \approx 453	21.399
7	68.3 \approx 68	431.6 \approx 432	29.521
8	97.5 \approx 98	402.4 \approx 402	39.250
9	136.2 \approx 136	363.7 \approx 364	49.561
10	185.5 \approx 186	314.4 \approx 314	58.348
11	243.3 \approx 243	256.6 \approx 257	62.456
12	305.4 \approx 305	194.5 \approx 195	59.425
13	364.4 \approx 364	135.5 \approx 136	49.407
14	413.4 \approx 413	86.5 \approx 87	35.798
15	448.7 \approx 449	51.2 \approx 51	22.979

Los resultados son aparentemente más realistas y la población con videoconsola aumenta rápidamente.

e) Suponemos que este apartado se refiere a que consideremos el número de personas como un entero. En ese caso para que haya propagación, debe cumplirse que $FP > 1$.

El número mínimo será con:

$$FP = 1$$

$$\frac{PCVC (500 - PCVC) 10 \cdot 0.05}{500} = 1$$

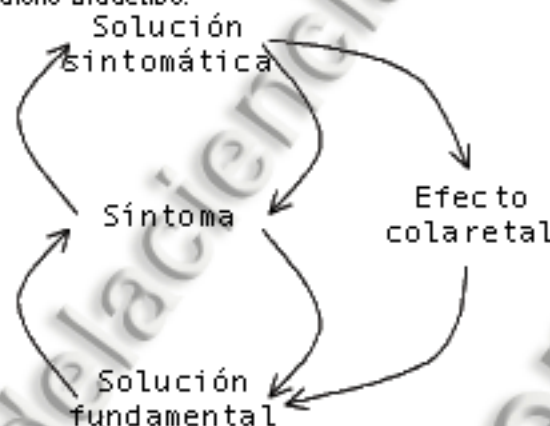
$$250 PCVC - 0.5 PCVC^2 = 500$$

Que es una ecuación de segundo grado cuyas raíces son: 497.99 y 2.008

El número mínimo de personas para que se propague la venta de la videoconsola será 3. (>2.008)

1. La figura muestra el diagrama de influencias genérico del arquetipo de la adicción. En el que se han omitido intencionadamente los signos de todas las influencias y los retardos asociados a ciertas influencias. Se pide:

- Completar el diagrama, justificando de forma cualitativa las influencias, los signos y los retardos que considere necesarios.
- Analizar brevemente los diferentes bucles que intervienen en el diagrama.
- Poner un ejemplo concreto de dicho arquetipo.



2. Modelo "Política de precio para el kg de jamón". Con el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$(1) \text{CEJ}(t) = \text{CMJ} \cdot P$$

$$(2) \text{FMPJ}(t) = f\left(\frac{\text{JA}(t)}{\text{ut} \cdot \text{CEJ}(t)}\right)$$

$$(3) \text{PRJ}(t) = \text{FMPJ}(t) \cdot \text{PNRJ}$$

$$(4) \text{PFJ}(t) = \text{PRJ}(t) + \text{MPJ}$$

$$(5) \text{FMCJ}(t) = g\left(\frac{\text{PFJ}(t)}{\text{PEJ}(t)}\right)$$

$$(6) \text{CJ}(t) = \text{FMCJ}(t) \cdot \text{CEJ}(t)$$

$$(7) \frac{d \text{JA}(t)}{dt} = \text{PJ}(t) - \text{CJ}(t)$$

En el que intervienen las siguientes variables:

CEJ: Consumo estimado de jamón

CJ: Consumo de jamón

CMJ: Consumo medio de jamón por persona

f: Función no lineal monótona decreciente que pasa por el punto (0.5,1), por tanto servirá para: a) no cambiar el precio del jamón si hay jamones para atender el consumo de la población durante medio mes, d) aumentarlo si no hay suficientes jamones para atender ese consumo y c) disminuirlo si hay exceso de jamones para atender ese consumo.

FMCJ: Factor multiplicativo del consumo de jamón

FMPJ: Factor multiplicativo del precio del jamón

g: Función no lineal monótona decreciente que pasa por el punto (1,1), por tanto servirá para determinar el consumo de jamones: a) igual al consumo habitual si el precio final coincide con el precio esperado por la población, b) inferior al consumo habitual si el precio final está por encima del precio esperado por la población y c) superior al consumo habitual si el precio final está por debajo del precio esperado por la población.

JA: Jamón almacenado

MPJ: Margen para las charcuterías

P: Población consumidora de jamón

PEJ: Precio esperado por los consumidores de jamón

PFJ: Precio final del kilo de jamón

PJ: Producción de jamón

PNRJ: Precio normalmente recomendado para el kilo de jamón

PRJ: Precio recomendado para el kilo de jamón

ut: La unidad de tiempo

Se pretende modelar la política que sigue una empresa productora de jamones serranos para fijar el precio (en euros) del kilo de jamón. La política de precios consiste en hacer pequeñas variaciones sobre el precio habitual con el fin de favorecer un mayor o menor consumo mensual de jamón y por tanto que el exceso o defecto de producción no produzcan un desbordamiento o vaciado del almacén de jamones. En el modelo están implícitas las siguientes hipótesis: la población consumidora se considera prácticamente constante y con un hábito de consumo marcado principalmente por el precio esperado del jamón, las charcuterías tienen un margen fijo sobre el precio.

a) Clasificar las variables, indicando sus unidades, resumir en el correspondiente diagrama de Forrester todas las ecuaciones del modelo.

b) Comprobar que los siguientes valores provocan una situación estacionaria en el modelo:

CMJ = 1; JA(0) = 500; MPJ = 3; P = 1000; PEJ = 21; PJ(0) = 1000; PNRJ = 18; ut = 1

3. Modelo "Gripe"

En este ejercicio se pretende modelar la difusión de una gripe en una población cerrada, es decir en la que la población total se mantiene constante todo el tiempo que dura la enfermedad. Por simplificación se ha supuesto que los síntomas de la gripe duran tres días (en lugar de los siete días habituales), que la probabilidad de transmisión de la enfermedad sólo es significativa en los dos primeros días, siendo mayor en el segundo que en el primero, y que el flujo de contagio es directamente proporcional a la virulencia del agente que ha causado la enfermedad. También se ha supuesto que la duración de la enfermedad es tan corta que no da tiempo a que una persona sane totalmente y pueda volver a contagiarse.

El modelo viene descrito por las siguientes cinco ecuaciones:

$$(1) \text{NEE}(t) = \frac{TV \cdot \text{NE}(t) (\text{PT1D} \cdot \text{E1D}(t) + \text{PT2D} \cdot \text{E2D}(t))}{NP}$$

$$(2) \frac{d \text{NE}(t)}{dt} = - \text{NEE}(t)$$

$$(3) \frac{d \text{E1D}(t)}{dt} = \text{NEE}(t) - \text{E1D}(t)$$

$$(4) \frac{d \text{E2D}(t)}{dt} = \text{E1D}(t) - \text{E2D}(t)$$

$$(5) \frac{d \text{E3DOM}(t)}{dt} = \text{E2D}(t)$$

En el que intervienen las siguientes variables:

E1D: Personas enfermas de 1 día

E2D: Personas enfermas de 2 días

E3DOM: Personas enfermas de 3 días o más

NP: Número total de personas

NE: Personas no enfermas

NEE: Personas no enfermas que contraen la enfermedad

PT1D: Probabilidad de transmisión de la enfermedad de los enfermos de 1 día

PT2D: Probabilidad de transmisión de la enfermedad de los enfermos de 2 días

TV: Tasa de virulencia de la enfermedad

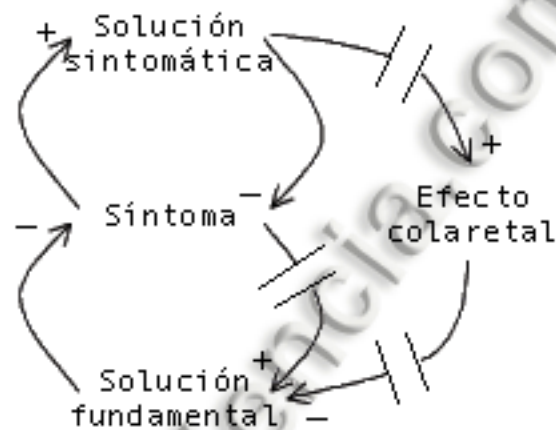
a) Interpretar brevemente todas las ecuaciones del modelo; justificando si están o no en consonancia con el enunciado. Razonar si serían suficientes para modelar cualquier tipo de enfermedad con tres estadios o habría que incluir algún cambio y/o nuevas variables.

b) Dibujar el correspondiente diagrama de Forrester.

c) Obtener los valores de las cuatro variables más significativas del modelo durante al menos 12 días, considerando que;

- La unidad de tiempo es el día.
- La población total NP, que se mantiene constante, se distribuye inicialmente de la siguiente forma: $\text{NE}(0) = 460$, $\text{E1D}(0) = 20$, $\text{E2D}(0) = 10$ y $\text{E3DOM}(0) = 10$.
- La enfermedad tiene una tasa de virulencia $TV = 1.5$.
- Las probabilidades de transmisión de la enfermedad son mayores en el 2º día que en el primero, concretamente $PT1D = 0.5$ y $PT2D = 0.9$.
- Los flujos de enfermos sólo pueden tomar valores enteros.

d) Comentar los resultados obtenidos en el apartado (c). Si no ha sido capaz de obtenerlos numéricamente, describa cualitativamente lo que cree que pasará.

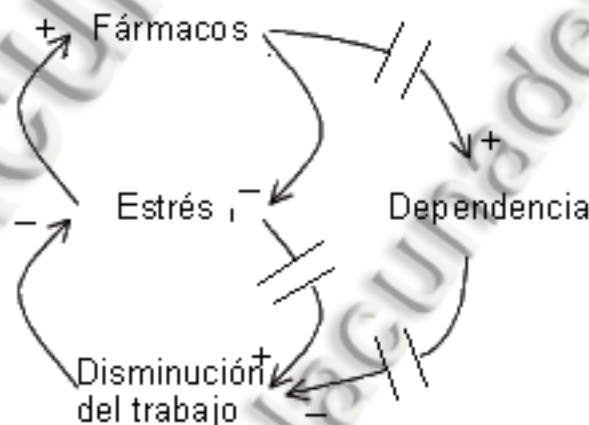


a) Tenemos dos procesos de realimentación negativa. El superior representa la solución sintomática que trata de dar una solución rápida y superficial al problema. Esta solución es sólo temporal. El inferior tiene un retraso y sus efectos tardan más en hacerse evidentes. A veces se presenta un proceso adicional de realimentación positiva que genera efectos colaterales.

b) En el diagrama de influencias genérico del arquetipo de adicción se observan dos bucles de realimentación negativa. Los dos tratan de corregir (debido a su carácter regulador) el mismo síntoma problemático. El superior representa la actuación ante el síntoma en sí, mediante la que se persigue una solución rápida y superficial, resolviendo así el problema con rapidez, pero sólo temporalmente. En bucle inferior se observa un retraso pues la actuación ante la base del problema que causa el síntoma es más lenta y sus efectos tardan más tiempo en hacerse notar.

Además de los dos bucles de realimentación negativa se observa un bucle adicional de realimentación positiva que surge, en este tipo de arquetipo, con frecuencia, aunque no siempre y que es consecuencia de los efectos colaterales de la solución sintomática: el solucionar el síntoma induce a pensar que no es necesario buscar soluciones ante el problema que genera el síntoma, con el tiempo se confía más y más en la solución sintomática, que acaba por parecer la única solución posible, pero que desemboca en una situación de dependencia o adicción. "Las soluciones bien intencionadas a corto plazo empeoran las cosas a largo plazo".

c)



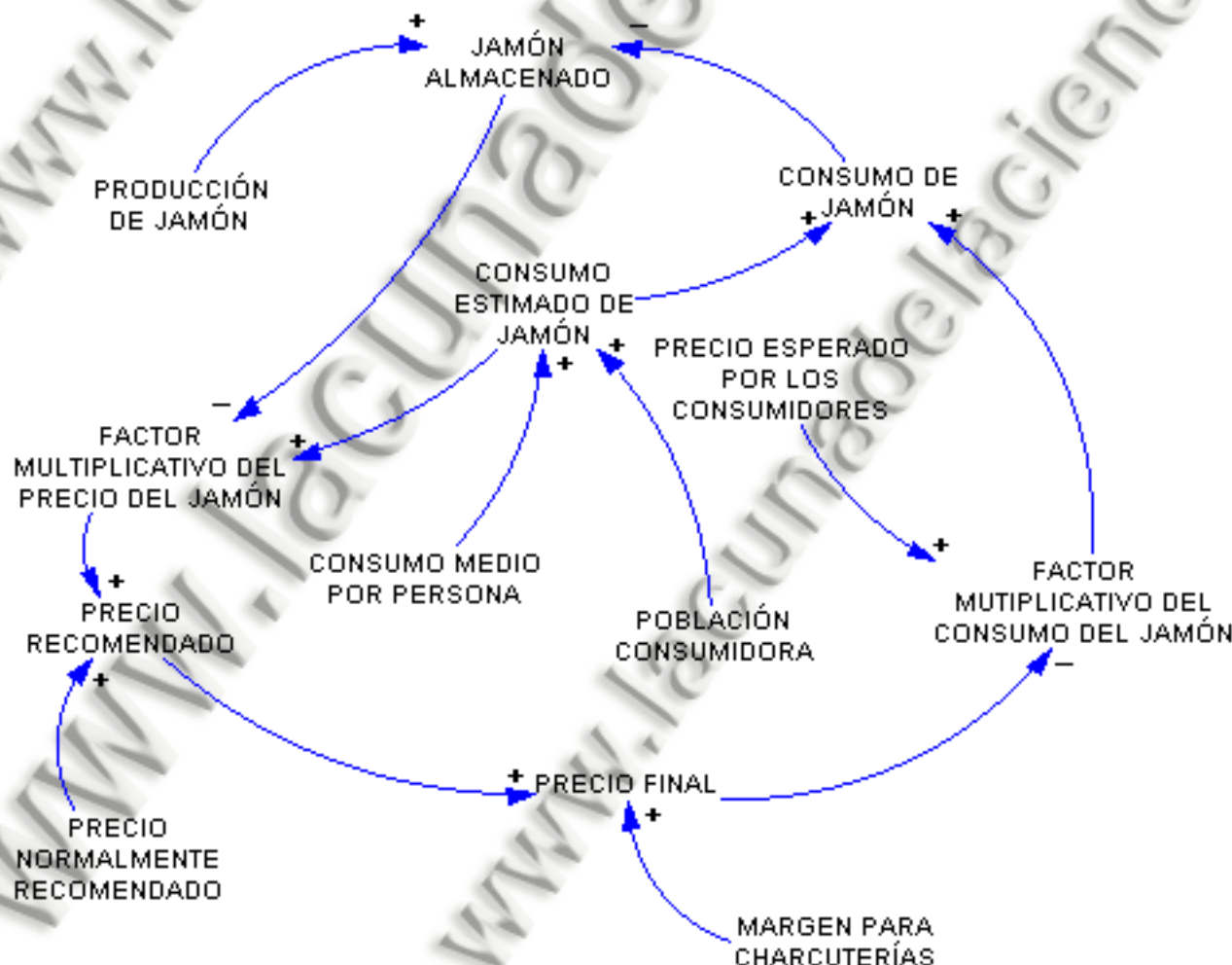
El exceso de trabajo conduce al estrés y éste es tratado con fármacos. Los fármacos que han aliviado mi estrés pueden producir, sin embargo, un aumento en la percepción de la capacidad de aceptar más trabajo, ya no estoy estresado puedo trabajar más y más, lo que me genera una nueva situación de estrés, el problema sigue latente y periódicamente reaparece, con lo que genera primero dependencia de los fármacos y luego adicción. Estoy resolviendo el síntoma (estrés) y no el problema de fondo: el exceso de trabajo.

Modelo de política del precio para el jamón.

DEFINICIÓN DE VARIABLES:

- CEJ: Consumo estimado de jamón
CJ: Consumo de jamón
CMJ: Consumo medio de jamón por persona
f: Función no lineal monótona decreciente que pasa por el punto (0.5,1), por tanto servirá para: a) no cambiar el precio del jamón si hay jamones para atender el consumo de la población durante medio mes, d) aumentarlo si no hay suficientes jamones para atender ese consumo y c) disminuirlo si hay exceso de jamones para atender ese consumo.
FMCJ: Factor multiplicativo del consumo de jamón
FMPJ: Factor multiplicativo del precio del jamón
g: Función no lineal monótona decreciente que pasa por el punto (1,1), por tanto servirá para determinar el consumo de jamones: a) igual al consumo habitual si el precio final coincide con el precio esperado por la población, b) inferior al consumo habitual si el precio final está por encima del precio esperado por la población y c) superior al consumo habitual si el precio final está por debajo del precio esperado por la población.
JA: Jamón almacenado
MPJ: Margen para las charcuterías
P: Población consumidora de jamón
PEJ: Precio esperado por los consumidores de jamón
PFJ: Precio final del kilo de jamón
PJ: Producción de jamón
PNRJ: Precio normalmente recomendado para el kilo de jamón
PRJ: Precio recomendado para el kilo de jamón

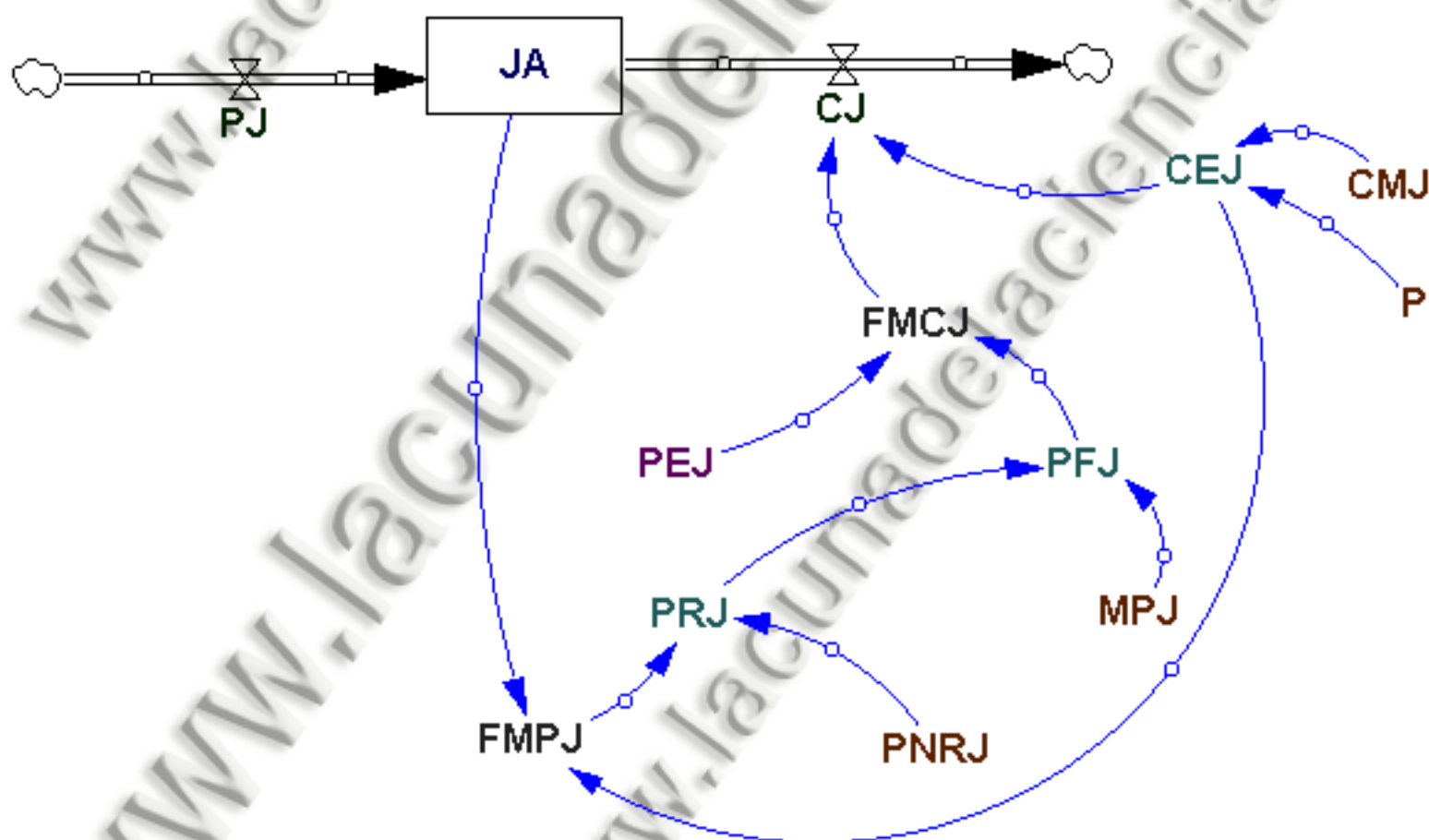
DIAGRAMA DE INFLUENCIAS



CLASIFICACIÓN DE LAS VARIABLES Y UNIDADES:

- Variables de estado:
JA: kg
- Variables de flujo:
PJ: kg / día
CJ: kg/día
- Constantes:
CMJ: kg / día persona
P: personas
MPJ: euros / kg
PNRJ: euros / kg
- Variables auxiliares:
CEJ: kg / día
FMCJ: adimensional
PFJ: euros / kg
PRJ: euros / kg
FMPJ: adimensional
- Variables exógenas:
PEJ: euros / kg

DIAGRAMA DE FORRESTER:



ECUACIONES PARA LA SIMULACIÓN

- (1) $CEJ(t) = CMJ \cdot P$
- (2) $FMPJ(t) = f(JA(t) / ut \cdot CEJ(t))$
- (3) $PRJ(t) = FMPJ(t) \cdot PNRJ$
- (4) $PFJ(t) = PRJ(t) + MPJ$
- (5) $FMCJ(t) = g(PFJ(t) / PEJ(t))$
- (6) $CJ(t) = FMCJ(t) \cdot CEJ(t)$
- (7) $JA(t + \Delta t) = JA(t) + \Delta t \cdot [PJ(t) - CJ(t)]$

b) Simulación

$CMJ = 1$ $MPJ = 3$ $P = 1000$ $PEJ = 21$ $PNRJ = 18$
 $JA(0) = 500$ $PJ(0) = 1000$

$\Delta t = 1$ día

La tabla siguiente está hecha para valores sin aproximar.

$CEJ = 1000$

Utilizando las ecuaciones de simulación obtenemos:

PJ	JA	FMPJ	PRJ	PFJ	FMCJ	CJ
1000	500	1	18	21	1	1000

En todas las iteraciones obtenemos los mismo resultados, con lo que estamos ante una situación estacionaria.

NOTA: Las funciones f y g no deben preocuparnos, porque con los valores que nos dan nos llegan: $f(0.5) = 1$ y $g(1) = 1$

Modelo gripe.

a) Justificación.

- (1) El número de personas no enfermas que contraen la enfermedad es función de la tasa de virulencia de la enfermedad, las personas no enfermas y las personas enfermas de primer y segundo día respectivamente, además del número total de personas.
- (2) El número de personas no enfermas disminuye con el de personas que contraen la enfermedad.
- (3) El número de personas enfermas el primer día aumenta con el número de personas no enfermas que contraen la enfermedad, y disminuye con el número de personas enfermas de un día que pasarán a ser de dos días.
- (4) El número de personas enfermas de segundo día aumenta con el número de personas enfermas de un día que pasan a ser de dos días y disminuye con el de dos días que pasa a ser de tres o más.
- (5) El número de enfermos de tres o más días crece con los enfermos de segundo día que pasan a ser de tercer día.

Para este tipo de enfermedades habría que tener en cuenta también que las personas enfermas se curan. En el caso de la gripe que se nos plantea, suponiendo que se curan después del tercer día, añadiríamos un sumando a la segunda ecuación: +E3DOM

En este ejercicio haremos otra consideración. Las variables E1D y E2D tienen función de estado y de flujo y además en cada uno de esos casos tendrán unidades diferentes, así que las consideraremos como dos variables distintas (cuatro en total).

DEFINICIÓN DE VARIABLES:

- E1D: Personas enfermas de 1 día
E2D: Personas enfermas de 2 días
E3DOM: Personas enfermas de 3 días o más
NP: Número total de personas
NE: Personas no enfermas
NEE: Personas no enfermas que contraen la enfermedad
PT1D: Probabilidad de transmisión de la enfermedad de los enfermos de 1 día
PT2D: Probabilidad de transmisión de la enfermedad de los enfermos de 2 días
TV: Tasa de virulencia de la enfermedad

b) CLASIFICACIÓN DE LAS VARIABLES Y UNIDADES:

- Variables de estado:

NE: personas
E1D: personas
E2D: personas
E3DOM: personas

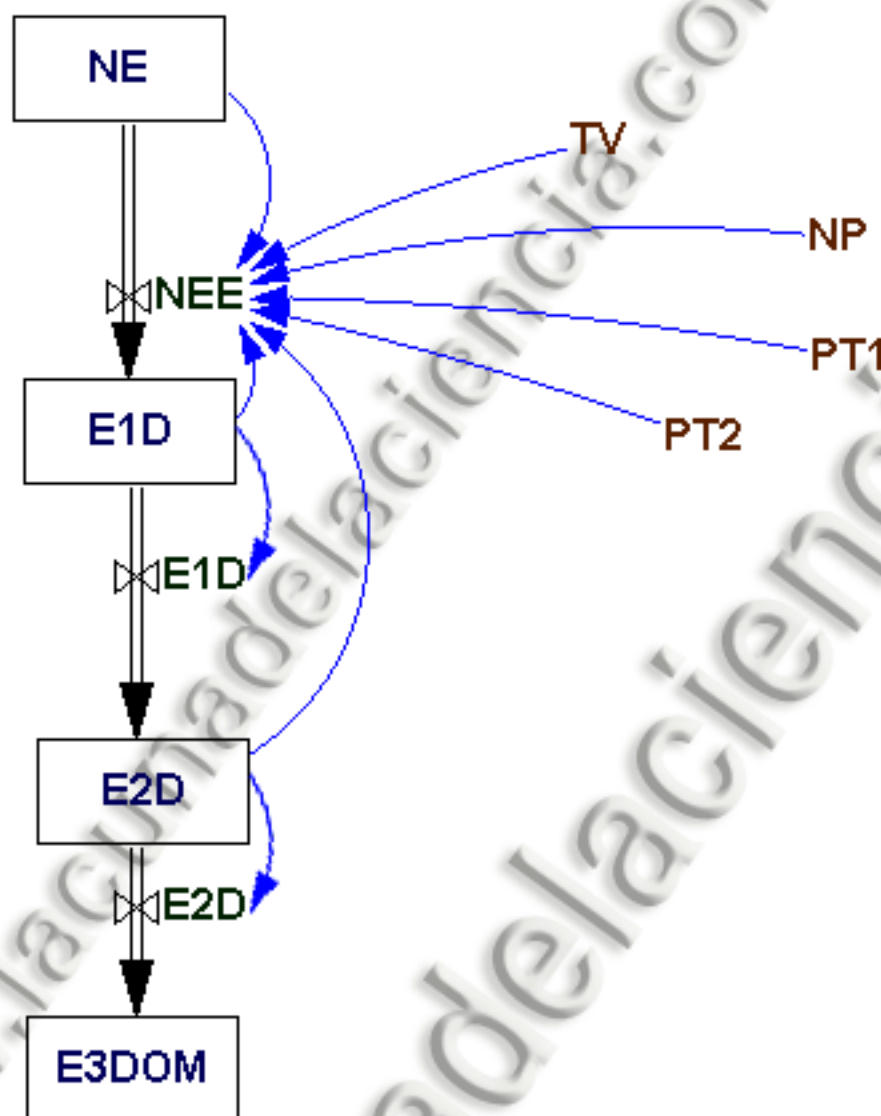
- Variables de flujo:

NEE: personas / día
E1D: personas / día
E2D: personas / día

- Constantes:

TV: adimensional
NP: personas
PT1D: adimensional
PT2D: adimensional

DIAGRAMA DE FORRESTER:



ECUACIONES PARA LA SIMULACIÓN

- (1) $NEE(t) = [TV \cdot NE(t) \cdot (PT1D \cdot E1D(t) + PT2D \cdot E2D(t))] / NP$
- (2) $NE(t + \Delta t) = NE(t) - \Delta t \cdot NEE(t)$
- (3) $E1D(t + \Delta t) = E1D(t) + \Delta t \cdot [NEE(t) - E1D(t)]$
- (4) $E2D(t + \Delta t) = E2D(t) + \Delta t \cdot [E1D(t) - E2D(t)]$
- (5) $E3DOM(t + \Delta t) = E3DOM(t) + \Delta t \cdot E2D(t)$

c) Simulación

TV = 1.5 PT1D = 0.5 PT2D = 0.9
NE(0) = 460 E1D(0) = 20 E2D(0) = 10 E3DOM(0) = 10

$\Delta t = 1$ día

Tabla con valores aproximados al entero más próximo.

t	NE	E1D	E2D	E3DOM	NEE
0	460	20	10	10	26
1	434	26	20	20	40
2	394	40	26	40	51
3	343	51	40	66	63
4	280	63	51	106	65
5	215	65	63	157	58
6	157	58	65	220	41
7	116	41	58	285	25
8	91	25	41	343	13
9	78	13	25	384	7
10	71	7	13	409	3
11	68	3	7	422	2
12	66	2	3	429	1
13	65	1	2	432	0
14	65	0	1	434	0

d) La enfermedad es finalmente erradicada ya que a partir del día 13 ya nadie contrae la enfermedad. 65 personas no han contraído la gripe en el proceso.

1. Modelo "Sistema inmunológico".

Se pretende modelar el principio básico del sistema inmunológico de los seres humanos. Se sabe que cuando el sistema inmunológico detecta microorganismo extraños (bacterias o virus), ordena la producción de anticuerpos que se encargan de localizarlos y destruirlos. Y también se sabe que determinados microorganismos son capaces de engañar al sistema inmunológico para que éste no los considere como microorganismos extraños. El debe incluir al menos las siguientes ocho variables:

- AC, el número de anticuerpos en la sangre
- DMI, la destrucción de microorganismos invasores
- MI, el número de microorganismo invasores en el cuerpo humano
- PAC, la producción de anticuerpos
- RMI, la reproducción de microorganismo invasores
- TD, la tasa de destrucción de los anticuerpos
- TMR, el tiempo medio de reproducción de los microorganismo invasores
- TPA, la tasa de producción de anticuerpos

- a) Proponer un diagrama de influencias para el modelo, justificando de forma cualitativa cada una de las relaciones y sus signos.
- b) Analizar todos los bucles del diagrama y razonar si este modelo simple serviría para simular la eficacia o no eficacia del sistema inmunológico. El sistema inmunológico de un individuo se considera eficaz cuando produce en poco tiempo suficiente anticuerpos para destruir a todos los microorganismos extraños, evitando que el individuo desarrolle la enfermedad y dejándolo protegido (inmune) para otro futuro contagio. Por el contrario, el sistema inmunológico es ineficaz cuando no produce suficientes anticuerpos, los microorganismos extraños se hacen fuertes y el individuo desarrolla la enfermedad en poco tiempo.

2. Modelo "Política de precio para el kg de jamón". Con el siguiente conjunto de ecuaciones:

En el que intervienen las siguientes variables:

- CEJ: Consumo estimado de jamón
- CJ: Consumo de jamón
- CMJ: Consumo medio de jamón por persona
- f: Función no lineal monótona decreciente que pasa por el punto (0.5,1), por tanto servirá para: a) no cambiar el precio del jamón si hay jamones para atender el consumo de la población durante medio mes, d) aumentarlo si no hay suficientes jamones para atender ese consumo y c) disminuirlo si hay exceso de jamones para atender ese consumo.
- FMCJ: Factor multiplicativo del consumo de jamón
- FMPJ: Factor multiplicativo del precio del jamón
- g: Función no lineal monótona decreciente que pasa por el punto (1,1), por tanto servirá para determinar el consumo de jamones: a) igual al consumo habitual si el precio final coincide con el precio esperado por la población, b) inferior al consumo habitual si el precio final está por encima del precio esperado por la población y c) superior al consumo habitual si el precio final está por debajo del precio esperado por la población.
- JA: Jamón almacenado
- MPJ: Margen para las charcuterías
- P: Población consumidora de jamón
- PEJ: Precio esperado por los consumidores de jamón
- PFJ: Precio final del kilo de jamón
- PJ: Producción de jamón
- PNRJ: Precio normalmente recomendado para el kilo de jamón
- PRJ: Precio recomendado para el kilo de jamón
- ut: La unidad de tiempo

$$\begin{aligned} (1) \quad & CEJ(t) = CMJ \cdot P \\ (2) \quad & EMPJ(t) = f\left(\frac{JA(t)}{ut \cdot CEJ(t)}\right) \\ (3) \quad & PRJ(t) = FMPJ(t) \cdot PNRJ \\ (4) \quad & PFJ(t) = PRJ(t) + MPJ \\ (5) \quad & FMCJ(t) = g\left(\frac{PFJ(t)}{PEJ(t)}\right) \\ (6) \quad & CJ(t) = FMCJ(t) \cdot CEJ(t) \\ (7) \quad & \frac{dJA(t)}{dt} = PJ(t) - CJ(t) \end{aligned}$$

Se pretende modelar la política que sigue una empresa productora de jamones serranos para fijar el precio (en euros) del kilo de jamón. La política de precios consiste en hacer pequeñas variaciones sobre el precio habitual con el fin de favorecer un mayor o menor consumo mensual de jamón y por tanto que el exceso o defecto de producción no produzcan un desbordamiento o vaciado del almacén de jamones. En el modelo están implícitas las siguientes hipótesis: la población consumidora se considera prácticamente constante y con un hábito de consumo marcado principalmente por el precio esperado del jamón, las charcuterías tienen un margen fijo sobre el precio.

- a) Clasificar las variables, indicando sus unidades, resumir en el correspondiente diagrama de Forrester todas las ecuaciones del modelo.
- b) En el modelo están implícitas las siguientes hipótesis: la población consumidora se considera prácticamente constante y con un hábito de consumo marcado principalmente por el precio esperado del jamón, las charcuterías tienen un margen fijo sobre el precio. Comprobar que los siguientes valores:

$$CMJ = 1; JA(0) = 500; MPJ = 3; P = 1000; PEJ = 21; PJ(0) = 1000; PNRJ = 18; ut = 1$$

Provocan una situación estacionaria en el modelo si además se supone que la población es constante $P(t) = 1000$ y es para que el precio del jamón se mantenga en los 21 euros, $PEJ(t) = 21$.

3. Modelo reducido "Política de precio para el kg de jamón".

En el modelo enunciado en el ejercicio 2, que permite analizar distintas políticas de precios y distintas reacciones de la población, juegan un papel muy importante los parámetros y la forma de las dos funciones no lineales. Por ejemplo las dos funciones siguientes, compuestas ambas de dos tramos lineales pueden servir como primera aproximación:

$$FMPJ(t) = \begin{cases} -\frac{JA(t)}{CEJ(t)} + 1.5 & \text{si } \frac{JA(t)}{CEJ(t)} \leq 1 \\ 0.5 & \text{si } \frac{JA(t)}{CEJ(t)} > 1 \end{cases} \quad FMCJ(t) = \begin{cases} -\frac{PFJ(t)}{PEJ(t)} + 2 & \text{si } \frac{PFJ(t)}{PEJ(t)} \leq 2 \\ 0 & \text{si } \frac{PFJ(t)}{PEJ(t)} > 2 \end{cases}$$

a) Comprobar que si sustituyen los factores multiplicativos por esas funciones y se consideran además las hipótesis restrictivas:

$$CMJ = 1; MPJ = 3; P(t) = 1000; PEJ(t) = 21; PNRJ = 18$$

El modelo puede describirse con el siguiente conjunto reducido de ecuaciones:

$$(1) PFJ(t) = \begin{cases} 3 + 18 \left(-\frac{JA(t)}{1000} + 1.5 \right) & \text{si } JA(t) \leq 1000 \\ 12 & \text{si } JA(t) > 1000 \end{cases}$$

$$(2) CJ(t) = \begin{cases} 1000 \left(-\frac{PFJ(t)}{21} + 2 \right) & \text{si } PFJ(t) \leq 42 \\ 0 & \text{si } PFJ(t) > 42 \end{cases}$$

$$(3) \frac{dJA(t)}{dt} = PJ(t) - CJ(t)$$

b) Dibujar el diagrama de influencias del nuevo modelo, justificando todas y cada una de las relaciones y los correspondientes signos. Y aprovechar el diagrama para analizar de forma cualitativa cómo evolucionará el precio del jamón si se produce una fluctuación (aumento o disminución en la producción de jamones).

c) Obtener los valores de las tres variables del nuevo modelo durante doce meses, considerando que;

- La unidad de tiempo es el mes.
- Inicialmente hay 500 kg de jamón en el almacén.
- La producción que comenzó siendo de 1000 kg/mes se ha resentido debido a una reestructuración de plantilla, pasando a valer 900 kg/mes el segundo mes, y así ha permanecido hasta el octavo mes, en el que se ha recuperado la producción habitual de 1000 kg/mes.

La siguiente figura, que muestra la evolución del precio final del jamón, le puede servir para comprobar si ha efectuado correctamente la simulación. Se recomienda redondear al céntimo en el precio y a los gramos en el peso.

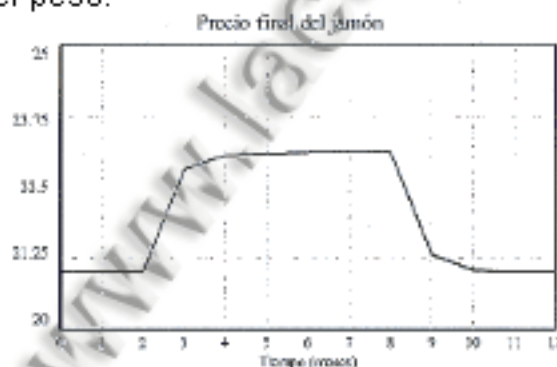
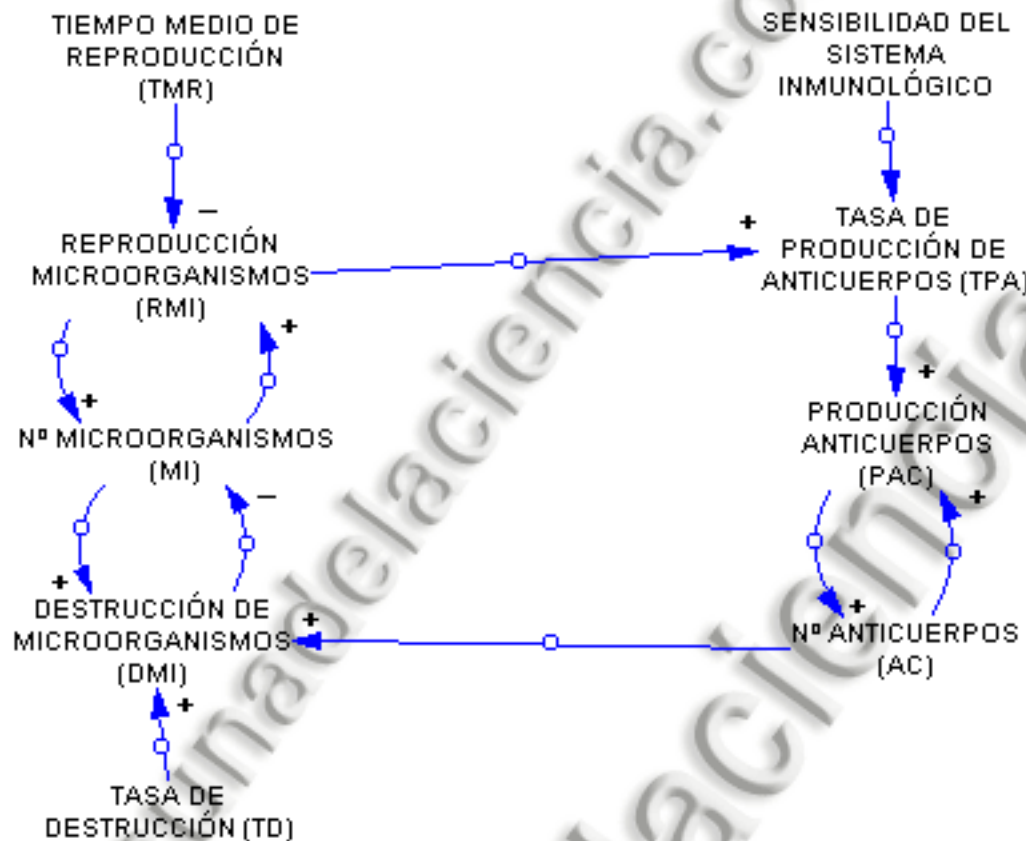


DIAGRAMA DE INFLUENCIAS



Microorganismos: Tenemos un bucle de realimentación positiva: a mayor reproducción de microorganismos mayor número de microorganismos. El tiempo medio de reproducción influye negativamente en la reproducción de microorganismos.

Tenemos también un bucle de realimentación negativa: a menor destrucción de microorganismos mayor número de microorganismos. La tasa de destrucción influye en la destrucción de microorganismos positivamente.

Anticuerpos: Observamos un bucle de realimentación positiva: a menor producción de anticuerpos, menor número de anticuerpos. La tasa de producción influye positivamente en la producción del número de anticuerpos.

Bucle que relaciona microorganismos y anticuerpos: el número de microorganismos influye positivamente en la tasa de producción de anticuerpos y el aumento del número de anticuerpos influye positivamente en la destrucción de microorganismos, que actúa negativamente en la destrucción de microorganismos. La combinación de ambos bucles corresponde al arquetipo de **CRECIMIENTO SIGMOIDAL**.

Sistema inmunológico eficaz: la producción y destrucción de microorganismos está equilibrada.

Sistema inmunológico ineficaz: el número de anticuerpos no es suficiente para la regulación del sistema.

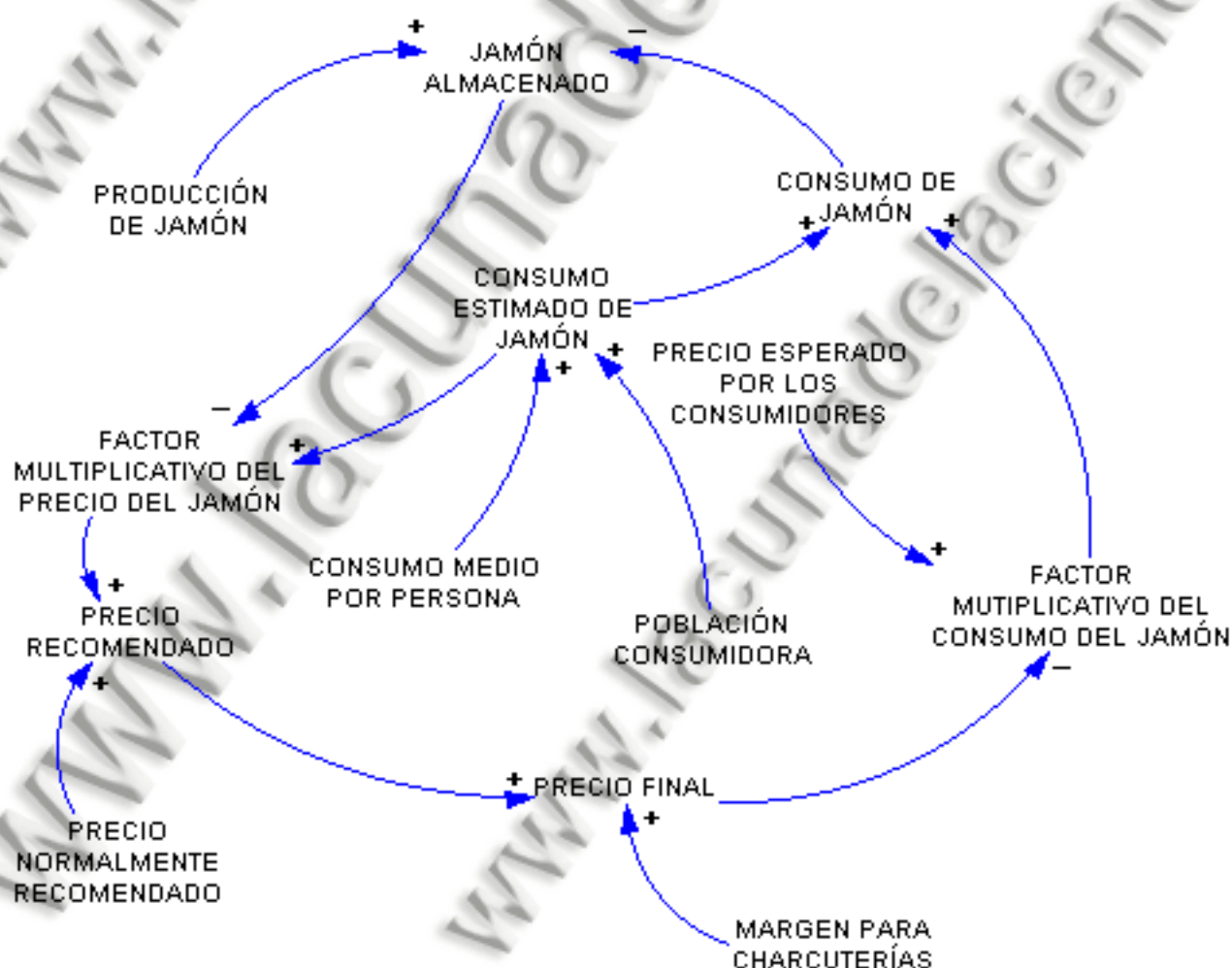
El bucle de los microorganismos crece exponencialmente al no estar limitado por la regulación del bucle responsable de la producción de anticuerpos y de la destrucción de microorganismos.

Modelo de política del precio para el jamón.

DEFINICIÓN DE VARIABLES:

- CEJ: Consumo estimado de jamón
CJ: Consumo de jamón
CMJ: Consumo medio de jamón por persona
f: Función no lineal monótona decreciente que pasa por el punto (0.5,1), por tanto servirá para: a) no cambiar el precio del jamón si hay jamones para atender el consumo de la población durante medio mes, d) aumentarlo si no hay suficientes jamones para atender ese consumo y c) disminuirlo si hay exceso de jamones para atender ese consumo.
FMCJ: Factor multiplicativo del consumo de jamón
FMPJ: Factor multiplicativo del precio del jamón
g: Función no lineal monótona decreciente que pasa por el punto (1,1), por tanto servirá para determinar el consumo de jamones: a) igual al consumo habitual si el precio final coincide con el precio esperado por la población, b) inferior al consumo habitual si el precio final está por encima del precio esperado por la población y c) superior al consumo habitual si el precio final está por debajo del precio esperado por la población.
JA: Jamón almacenado
MPJ: Margen para las charcuterías
P: Población consumidora de jamón
PEJ: Precio esperado por los consumidores de jamón
PFJ: Precio final del kilo de jamón
PJ: Producción de jamón
PNRJ: Precio normalmente recomendado para el kilo de jamón
PRJ: Precio recomendado para el kilo de jamón

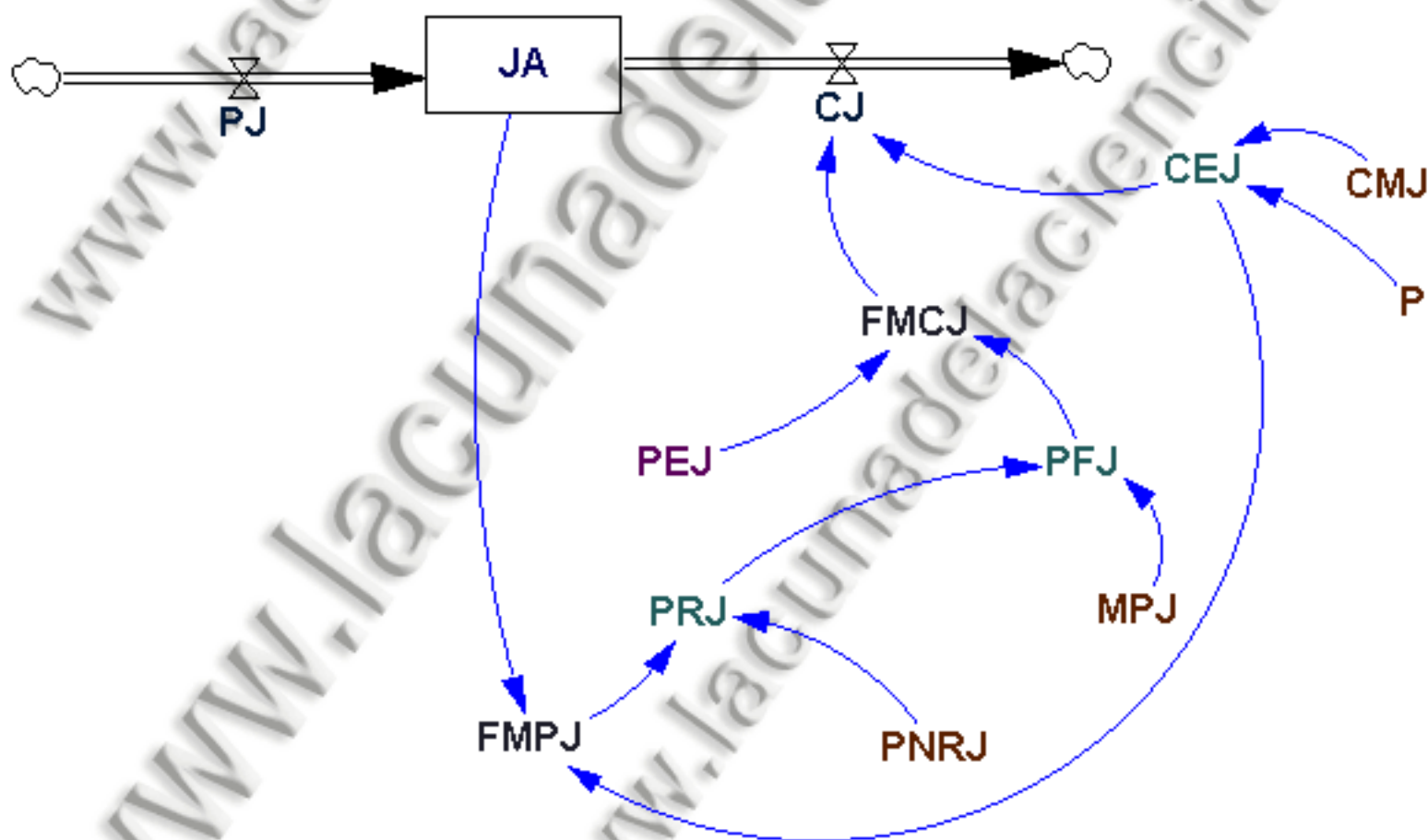
DIAGRAMA DE INFLUENCIAS



CLASIFICACIÓN DE LAS VARIABLES Y UNIDADES:

- Variables de estado:
JA: kg
- Variables de flujo:
PJ: kg / día
CJ: kg/día
- Constantes:
CMJ: kg / día persona
P: personas
MPJ: euros / kg
PNRJ: euros / kg
- Variables auxiliares:
CEJ: kg / día
FMCJ: adimensional
PFJ: euros / kg
PRJ: euros / kg
FMPJ: adimensional
- Variables exógenas:
PEJ: euros / kg

DIAGRAMA DE FORRESTER:



ECUACIONES PARA LA SIMULACIÓN

- (1) $CEJ(t) = CMJ \cdot P$
- (2) $FMPJ(t) = f(JA(t) / ut \cdot CEJ(t))$
- (3) $PRJ(t) = FMPJ(t) \cdot PNRJ$
- (4) $PFJ(t) = PRJ(t) + MPJ$
- (5) $FMCJ(t) = g(PFJ(t) / PEJ(t))$
- (6) $CJ(t) = FMCJ(t) \cdot CEJ(t)$
- (7) $JA(t + \Delta t) = JA(t) + \Delta t \cdot [PJ(t) - CJ(t)]$

b) Simulación

$CMJ = 1$ $MPJ = 3$ $P = 1000$ $PEJ = 21$ $PNRJ = 18$
 $JA(0) = 500$ $PJ(0) = 1000$

$\Delta t = 1$ día

La tabla siguiente está hecha para valores sin aproximar.

$CEJ = 1000$

Utilizando las ecuaciones de simulación obtenemos:

PJ	JA	FMPJ	PRJ	PFJ	FMCJ	CJ
1000	500	1	18	21	1	1000

En todas las iteraciones obtenemos los mismo resultados, con lo que estamos ante una situación estacionaria.

NOTA: Las funciones f y g no deben preocuparnos, porque con los valores que nos dan nos llegan: $f(0.5) = 1$ y $g(1) = 1$

a) Simplemente tenemos que sustituir las constantes en las ecuaciones del modelo de la política del precio del jamón sin simplificar:

$$CMJ = 1 \quad MPJ = 3 \quad P(t) = 1000 \quad PEJ(t) = 21 \quad PNRJ = 18$$

$$(1) CEJ(t) = 1 \cdot 1000 = 1000$$

$$(2) EMPJ(t) = f\left(\frac{JA(t)}{ut CEJ(t)}\right)$$

$$(3) PRJ(t) = FMPJ(t) \cdot 18$$

$$(4) PFJ(t) = PRJ(t) + 3$$

$$(5) FMCJ(t) = g\left(\frac{PFJ(t)}{21}\right)$$

$$(6) CJ(t) = FMCJ(t) \cdot CEJ(t)$$

$$(7) \frac{d JA(t)}{dt} = PJ(t) - CJ(t)$$

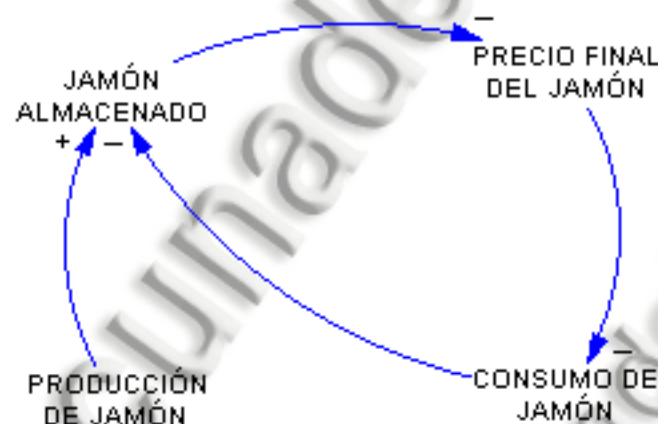
A continuación sustituimos FMPJ y FMCJ por las aproximaciones que nos da el enunciado en las ecuaciones (4) y (6). Empezamos con la ecuación (4). Sustituimos PRJ(t) por la ecuación (3). Por último sustituimos FMPJ(t) por la aproximación del enunciado con CEJ(t) = 1000 y despejamos JA(t) en las desigualdades:

$$PFJ(t) = PRJ(t) + 3 = FMPJ(t) \cdot 18 + 3 = \begin{cases} 3 + 18 \left(-\frac{JA(t)}{1000} + 1.5\right) & \text{si } JA(t) \leq 1000 \\ 12 & \text{si } JA(t) > 1000 \end{cases}$$

Con la ecuación (6) sustituimos directamente FMCJ(t) por la aproximación del enunciado, sustituimos CEJ(t) por 1000 y despejamos PFJ(t) de las desigualdades:

$$CJ(t) = FMCJ(t) \cdot CEJ(t) = \begin{cases} 1000 \left(-\frac{PFJ(t)}{21} + 2\right) & \text{si } PFJ(t) \leq 42 \\ 0 & \text{si } PFJ(t) > 42 \end{cases}$$

b) Diagrama de influencias.



Ahora sólo tenemos cuatro variables: JA, PJ, PFJ, CJ

Según la ecuación (3), la producción de jamón influye en el jamón almacenado positivamente y el consumo de jamón lo hace negativamente, ya que al consumir el jamón almacenado disminuye.

El precio final del jamón disminuye linealmente partiendo de 30 al aumentar el jamón almacenado hasta que el jamón almacenado alcanza el valor de 1000, en cuyo momento el precio final del jamón será 12.

El consumo de jamón disminuye linealmente partiendo de 2000 al aumentar el precio final del jamón hasta que el precio final alcanza el valor de 42, en cuyo momento no hay consumo de jamón.

El ciclo JA → PFJ → CJ → JA tiene tres signos negativos (número impar) con lo que podemos decir que se trata de un proceso con realimentación negativa. Estos procesos tienen carácter regulador, es decir, si introducimos una perturbación exterior (aumentamos el precio del jamón) el sistema reacciona contrarrestándolo: inicialmente aumenta el jamón almacenado, lo que hace que disminuya el precio final del jamón, aumente el consumo de jamón y finalmente disminuya el jamón almacenado.

Si la perturbación es en sentido contrario, también se contrarresta.

c) Para la simulación utilizamos la aproximación de Euler en la última ecuación:

$$JA(t + \Delta t) = JA(t) + \Delta t \cdot [PJ(t) - CJ(t)]$$

Aproximando en gramos el peso y en céntimos el precio nos queda:

t	JA	PJ	CJ
0	500	21	1000
1	500	21	1000
2	500	21	1000
3	400	22.80	914.720
4	385.28	23.10	900
5	385.28	23.10	900
6	385.28	23.10	900
7	385.28	23.10	900
8	385.28	23.10	900
9	485.28	21.3	987.383
10	497.897	21	1000
11	497.897	21	1000
12	497.897	21	1000

1. Se pretende simular el flujo migratorio entre dos comunidades (países, ciudades, ect...) debido a factores económicos. El modelo quiere representar que: a) la calidad de vida se mide en términos de un reparto equitativo de los recursos económicos de cada comunidad entre sus miembros, b) el flujo entre comunidades está provocado por la diferencia entre las calidades de vida de ambas poblaciones. El modelo debe incluir al menos las siguientes ocho variables:

CV1, calidad de vida de la comunidad 1

CV2, calidad de vida de la comunidad 2

FN12, flujo migratorio neto de la comunidad 1 hacia la 2

P1, población de la comunidad 1

P2, población de la comunidad 2

RE1, recursos económicos mensuales de la comunidad 1

RE2, recursos económicos mensuales de la comunidad 2

TM, la tasa migratoria entre las dos comunidades

a) Dibujar un diagrama de influencias que recoja todas las variables y relaciones implícitas en el enunciado. Acompañelo de las correspondientes justificaciones.

b) Proponer un conjunto mínimo de ecuaciones para el modelo.

2. La siguiente ecuación diferencial describe la dinámica de la temperatura TINT(t) en el interior de una casa que alberga una masa de aire M con calor específico CE prácticamente constante. La casa posee un sistema de calefacción con una potencia variable PC(t) que se emplea en aumentar la temperatura interior y en vencer las pérdidas debidas a que el aislamiento térmico de la casa no es total. Estas pérdidas son directamente proporcionales a la diferencia con la temperatura exterior TEXT(t) e inversamente proporcionales a la resistencia térmica RT de la casa.

$$\frac{dTINT(t)}{dt} = \frac{1}{M \cdot CE} PC(t) - \frac{1}{M \cdot CE \cdot RT} (TINT(t) - TEXT(t))$$

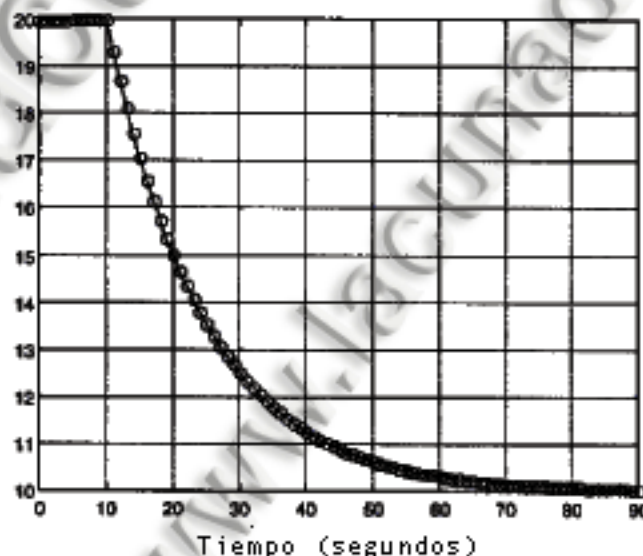
En la figura se muestra el comportamiento temporal que experimentó la temperatura interior cuando el sistema de calefacción pasó de estar generando un valor de 1000 Watios a estar apagado en el instante $t=10s$.

a) Sabiendo que la temperatura exterior permaneció constante durante todo el tiempo que se estuvo midiendo la temperatura interior, ¿cuál fue su valor? Para contestar a esta pregunta no necesita hacer ningún tipo de cálculo, utilice la información gráfica.

b) Utilizar el resultado del apartado (a), la ecuación diferencial y la información gráfica durante el tiempo que la calefacción permaneció encendida para determinar el valor de RT.

c) Utilizar el resultado del apartado (b), la ecuación diferencial y la información gráfica durante el tiempo que la calefacción estuvo apagada para determinar el producto M CE.

Temperatura (°C) en el interior de la casa



3. Modelo "Escuela de fútbol base". Una escuela de fútbol base tiene como objetivo promocionar anualmente a un determinado número de jugadores a equipos de primera división. Para ello cuenta anualmente con inscripciones de jugadores nuevos (JN) igual a un 40% de los jugadores que están en período de formación (JPF). El personal de la escuela lo constituyen un número de entrenadores (NE) y un número de preparadores físicos (NPF). Los entrenadores desarrollan su trabajo con los jugadores que se encuentran en período de formación, mientras que los preparadores físicos desarrollan su trabajo con los jugadores que se encuentran en período de reciclaje (JPR). De los jugadores en período de formación, un 10% abandonan (JPFA), otros pasan a reciclaje (JPFR) con los preparadores físicos y otros promocionan (JPFP). De los jugadores en período de reciclaje, el 10% acusan en exceso los entrenamientos físicos y optan por abandonar (JPRA), otro 10% son expulsados (JPRE) por no ser capaces de adquirir las cualidades técnicas mínimas exigibles y el resto pasan nuevamente a ser jugadores en período de formación (JPRF).

Se dispone de un modelo descrito por las siguientes ecuaciones:

$$(1) \frac{dJPF(t)}{dt} = JN(t) + JPRF(t) - JPFA(t) - JPFP(t) - JPFR(t)$$

$$(2) \frac{dJPR(t)}{dt} = JPFR(t) - JPRA(t) - JPRE(t) - JPRF(t)$$

$$(3) JPFR(t) = 0.2 JPF(t)$$

$$(6) JN(t) = 0.4 JPF(t)$$

$$(7) JPFA(t) = 0.1 JPF(t)$$

$$(8) JPRA(t) = 0.1 JPR(t)$$

$$(9) JPRE(t) = 0.1 JPR(t)$$

$$(4) JPFP(t) = \begin{cases} \frac{JPF(t)}{5} & \text{si } \frac{JPF(t)}{NE} \leq 10 \\ \frac{JPF(t)}{6} & \text{si } \frac{JPF(t)}{NE} > 10 \end{cases}$$

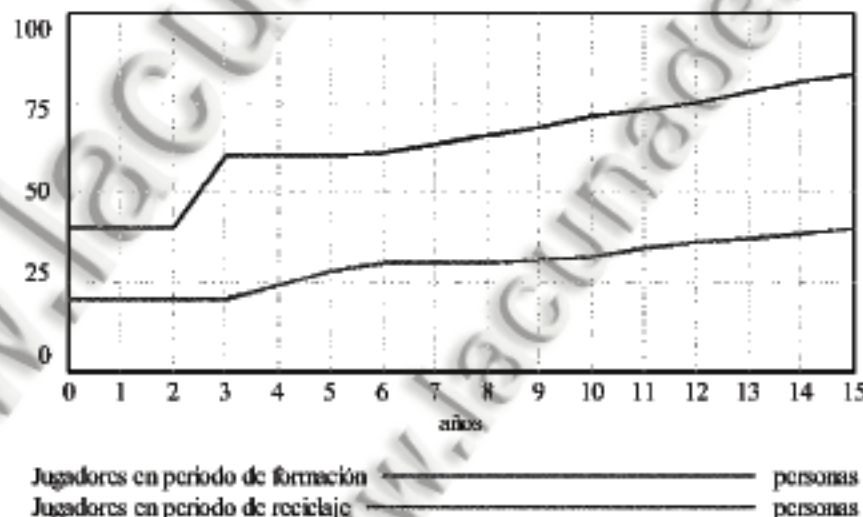
$$(5) JPRF(t) = \begin{cases} \frac{JPR(t)}{4} & \text{si } \frac{JPR(t)}{NPF} < 10 \\ \frac{JPR(t)}{5} & \text{si } \frac{JPR(t)}{NPF} \geq 10 \end{cases}$$

a) Hacer una clasificación razonada de las variables que describen el modelo. Dibujar el correspondiente diagrama de Forrester y explicar cualitativamente el significado de las ecuaciones (4) y (5).

b) Suponiendo que $NE = 4$ y $NPF = 2$. Comprobar que todos los años promocionan 8 jugadores y es posible mantener un estado estacionario en la escuela con 40 jugadores en período de formación y 20 jugadores en período de reciclaje.

c) Simular lo que ocurre en la escuela de fútbol si en el segundo año, pero sólo en este año, el número de jugadores en período de formación (JPF) se ve incrementado en 20 unidades debido a la adquisición de jugadores provenientes de otra cantera. Utilizar la aproximación de Euler con $\Delta t = 1$ año como intervalo de simulación, redondear las variables que considere necesarias al menor entero y simular únicamente 8 años. La siguiente figura, que muestra la evolución de los jugadores en período de formación y de los jugadores en período de reciclaje, le puede servir para comprobar si ha efectuado correctamente la simulación.

Escuela de fútbol



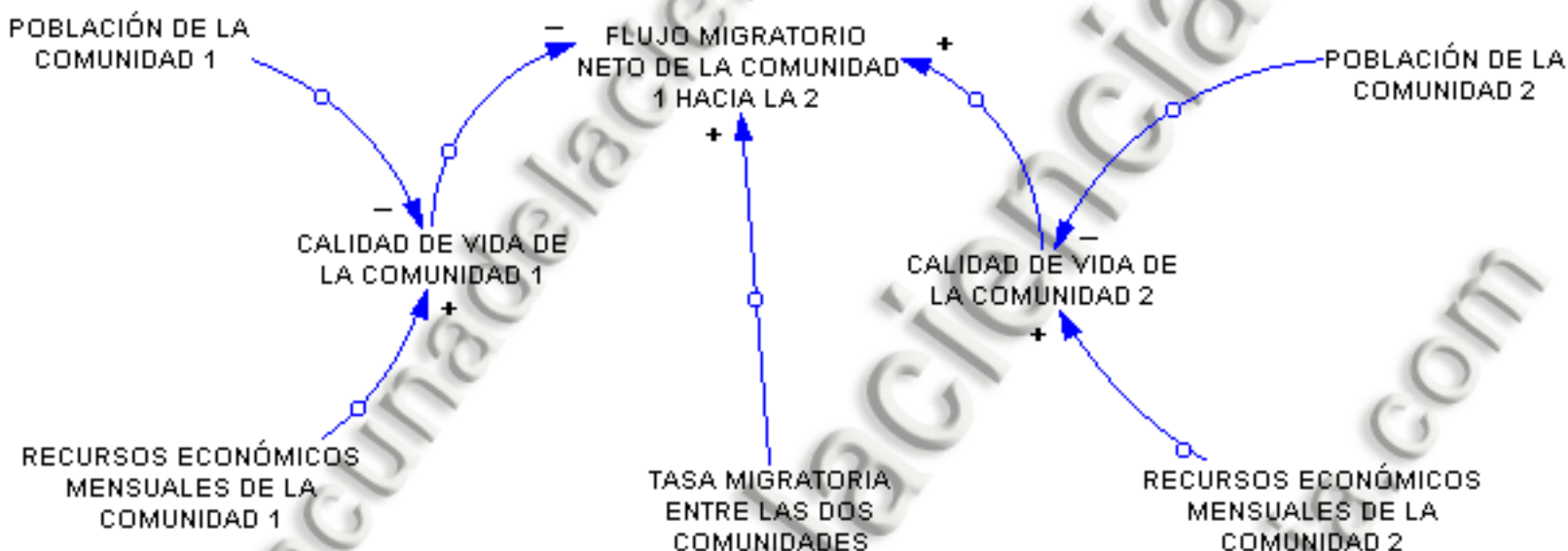
d) La escuela está estudiando incorporar una política de contratación de entrenadores y preparadores físicos. Proponga los cambios necesarios en el modelo para conseguirlo y realice las modificaciones necesarias en el diagrama de Forrester. Indique claramente el significado de las variables nuevas que utilice.

a) Justificación.

- La población de la comunidad 1 disminuye si hay flujo de la comunidad 1 a la comunidad 2.
- La población de la comunidad 2 aumenta si hay flujo de la comunidad 1 a la 2.
- y (4) las calidades de vida respectivas en ambas comunidades dependen directamente de los recursos existentes por persona de cada comunidad.

(5) El flujo migratorio neto de la comunidad 1 hacia la 2 es función de una tasa migratoria y las calidades de vida respectivas de ambas comunidades.

DIAGRAMA DE INFLUENCIAS



b) Conjunto de ecuaciones.

$$(1) \frac{d P_1(t)}{dt} = -FN_{12}(t)$$

$$(3) CV_1(t) = \frac{RE_1}{P_1(t)}$$

$$(5) FN_{12}(t) = TM (CV_2(t) - CV_1(t))$$

$$(2) \frac{d P_2(t)}{dt} = FN_{12}(t)$$

$$(4) CV_2(t) = \frac{RE_2}{P_2(t)}$$

a) La gráfica muestra la evolución del estado a lo largo del tiempo. Se parte de un estado inicial $TINT(0) = 20^\circ$ y se tiende a un objetivo $TINT(90) = 10^\circ = x_d$. En este caso se trata de una función monótona decreciente.

NOTA: si hubiésemos partido de un estado inicial 10° y el estado deseado hubiera sido 20° , sería una función creciente. Ambas, monótona creciente y monótona decreciente corresponden a un comportamiento de BUCLE DE REALIMENTACIÓN NEGATIVA, a diferencia el bucle de realimentación positiva que se trata de una función exponencial.

La temperatura exterior, que permanece constante, es la temperatura objetivo, $x_d = 10^\circ$.

b) Determinaremos el valor de RT sabiendo que en $t = 0$ s, $TINT$ permanece constante, es decir $dTINT/dt = 0$. En ese mismo instante $PC = 1000$ Watios, $TEXT = 10^\circ$ y $TINT = 20^\circ$:

$$\frac{dTINT(t)}{dt} = \frac{1}{M \cdot CE} PC(t) - \frac{1}{M \cdot CE \cdot RT} (TINT(t) - TEXT(t))$$

$$0 = \frac{1}{M \cdot CE} 1000 - \frac{1}{M \cdot CE \cdot RT} (20 - 10)$$

$$0 = \frac{1}{M \cdot CE} \left[1000 - \frac{1}{RT} (20 - 10) \right]$$

$$0 = 1000 - \frac{1}{RT} 10$$

$$1000 = \frac{1}{RT} 10$$

$$1000 RT = 10$$

$$RT = 0.01$$

c) Para determinar el producto $M \cdot CE$ consideraremos $t = 20$ s. En este instante $PC = 0$ Watios, $TINT = 15^\circ$, $TEXT = 10^\circ$ y la variación de $TINT$ la podemos calcular con cocientes incrementales por aproximación:

$$\frac{dTINT}{dt} = \frac{\Delta TINT}{\Delta t} = \frac{15 - 17}{20 - 15} = \frac{-2}{5}$$

Sustituyendo:

$$\frac{dTINT(t)}{dt} = \frac{1}{M \cdot CE} PC(t) - \frac{1}{M \cdot CE \cdot RT} (TINT(t) - TEXT(t))$$

$$\frac{-2}{5} = \frac{1}{M \cdot CE} 0 - \frac{1}{M \cdot CE \cdot 0.01} (15 - 10)$$

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{M \cdot CE \cdot 0.01} (15 - 10)$$

$$2 M \cdot CE \cdot 0.01 = 5 \cdot 5$$

$$M \cdot CE = 25 / 0.02$$

$$M \cdot CE = 1250$$

Modelo Escuela de fútbol base.

DEFINICIÓN DE VARIABLES:

JN: jugadores nuevos

JPF: jugadores en periodo de formación

NE: número de entrenadores

NPF: número de preparadores físicos

JPR: jugadores en periodo de reciclaje

JPFA: jugadores en periodo de formación que abandonan

JPFR: jugadores en periodo de formación que pasan a reciclaje

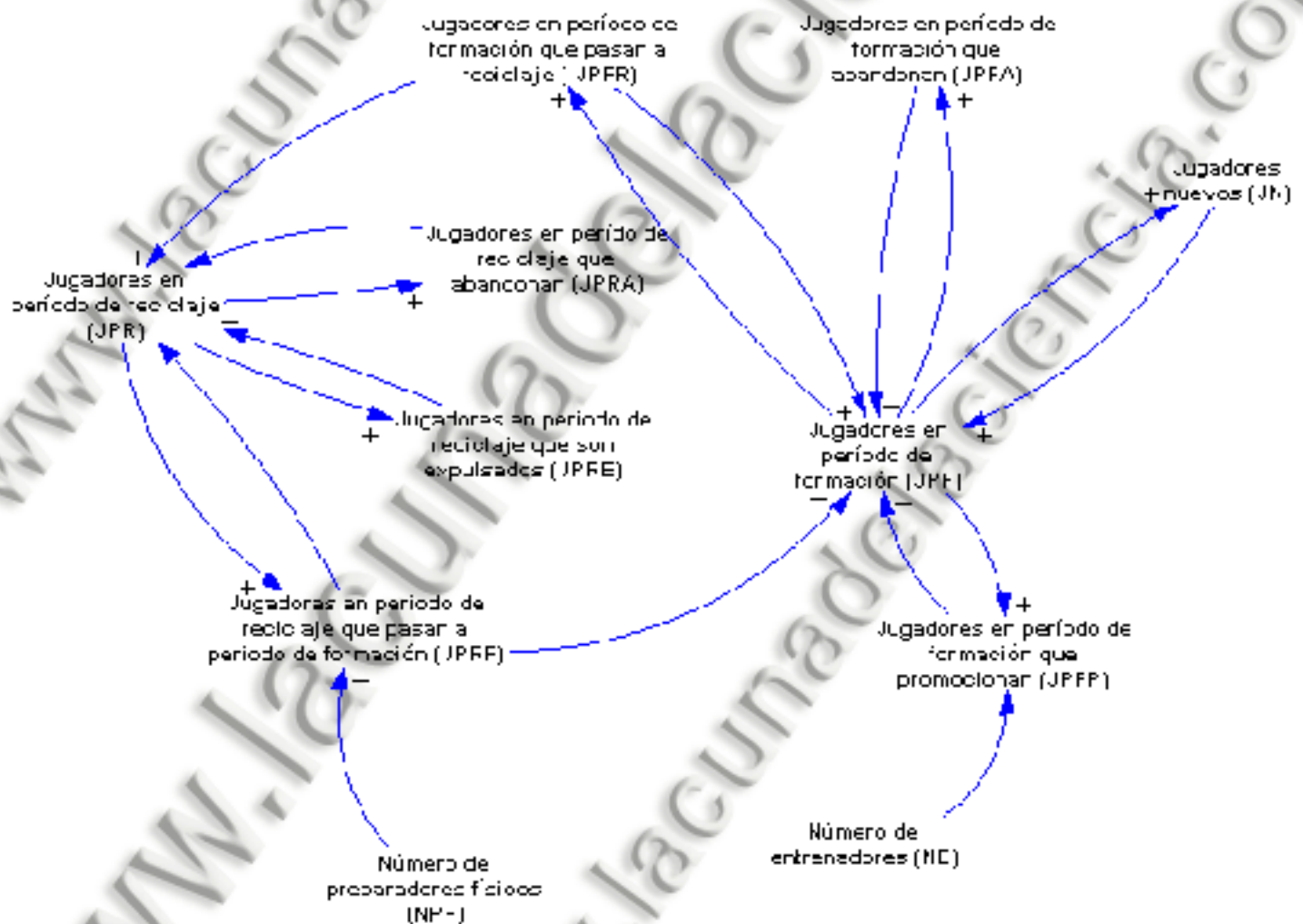
JPFP: jugadores en periodo de formación que promocionan

JPra: jugadores en periodo de reciclaje que abandonan

JPRe: jugadores en periodo de reciclaje que son expulsados

JPRF: jugadores en periodo de reciclaje que pasan a periodo de formación

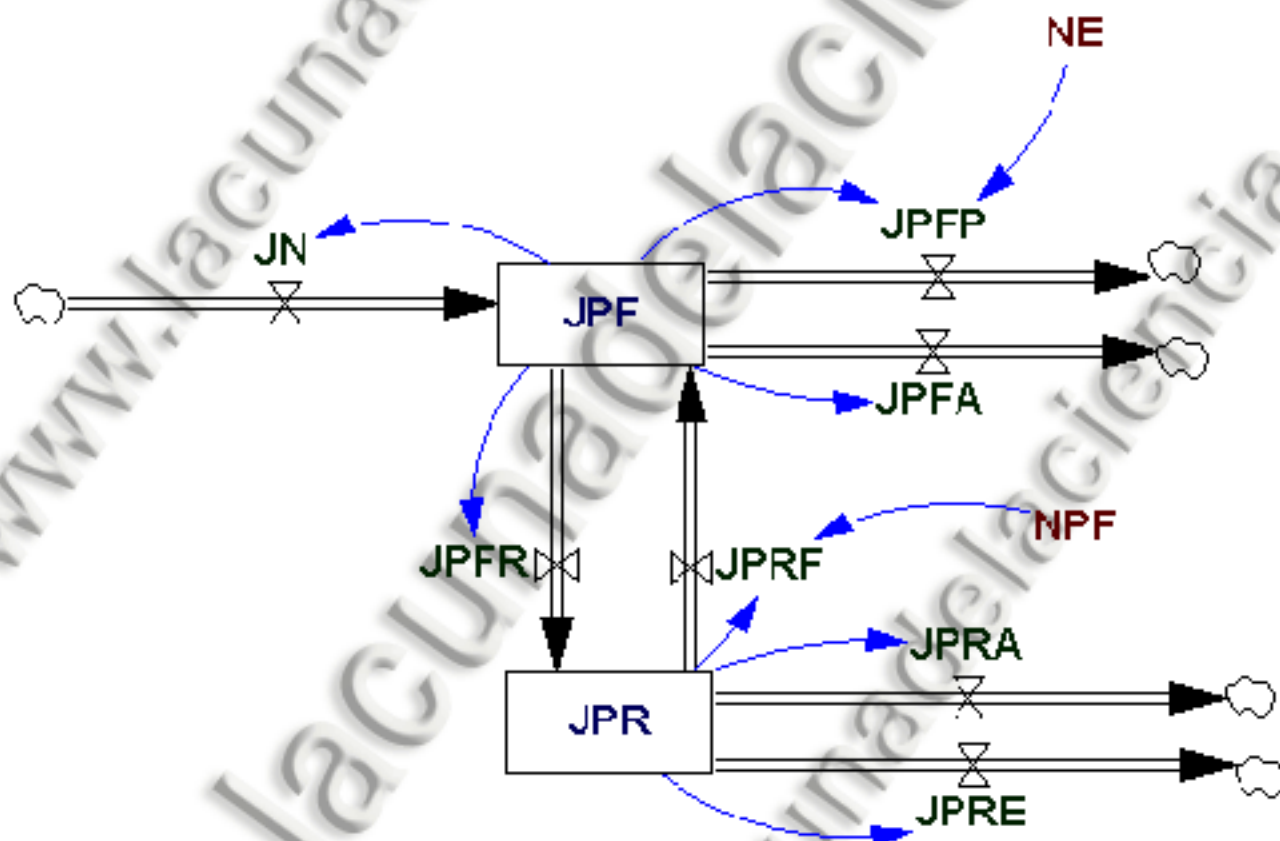
DIAGRAMA DE INFLUENCIAS



CLASIFICACIÓN DE LAS VARIABLES Y UNIDADES:

- Variables de estado:
JPF: jugadores
JPR: jugadores
- Variables de flujo:
JN: jugadores / año
JPRF: jugadores / año
JPFA: jugadores / año
JPFP: jugadores / año
JPFR: jugadores / año
JPRA: jugadores / año
JPRE: jugadores / año
- Constantes:
NE: entrenadores
NPF: preparadores físicos

DIAGRAMA DE FORRESTER:



ECUACIONES PARA LA SIMULACIÓN

Utilizando la aproximación de Euler:

$$JPF(t+\Delta t) = JPF(t) + \Delta t \cdot [JN(t) + JPRF(t) - JPFA(t) - JPFP(t) - JPFR(t)]$$

$$JPR(t+\Delta t) = JPR(t) + \Delta t \cdot [JPFR(t) - JPRA(t) - JPRE(t) - JPRF(t)]$$

$$JPFR(t) = 0.2 \cdot JPF(t)$$

$$JPFP(t) = \begin{cases} JPF(t) & \text{si } \frac{JPF(t)}{NE} \leq 10 \\ 5 & \\ \frac{JPF(t)}{6} & \text{si } \frac{JPF(t)}{NE} > 10 \end{cases}$$

$$JPRF(t) = \begin{cases} \frac{JPR(t)}{4} & \text{si } \frac{JPR(t)}{NPF} < 10 \\ \frac{JPR(t)}{5} & \text{si } \frac{JPR(t)}{NPF} \geq 10 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} JN(t) &= 0.4 \cdot JPF(t) \\ JPFA(t) &= 0.1 \cdot JPF(t) \\ JPRA(t) &= 0.1 \cdot JPR(t) \\ JPRE(t) &= 0.1 \cdot JPR(t) \end{aligned}$$

b) Comprobación

$$NE = 4, NPF = 2$$

Comprobar que JPFP = 8 y estado estacionario con JPF = 40 y JPR = 20

Como JPF = 40 y NE = 4, entonces $JPF/NE = 40/4 = 10$ y $JPFP = JPF/5 = 40/5 = 8$

Se producirá un estado estacionario si:

$$JN(t) + JPRF(t) - JPFA(t) - JPFP(t) - JPFR(t) = 0$$

Y

$$JPFR(t) - JPRA(t) - JPRE(t) - JPRF(t) = 0$$

$$JN = 0.4 \cdot JPF = 0.4 \cdot 40 = 16$$

$$JPR/NPF = 20/2 = 10, \text{ entonces } JPRF = JPR/5 = 20/5 = 4$$

$$JPFA = 0.1 \cdot JPF = 0.1 \cdot 40 = 4$$

$$JPFP = 8$$

$$JPFR = 0.2 \cdot JPF = 0.2 \cdot 40 = 8$$

$$JPRA = 0.1 \cdot JPR = 0.1 \cdot 20 = 2$$

$$JPRE = 0.1 \cdot JPR = 0.1 \cdot 20 = 2$$

Y la primera ecuación queda:

$$16 + 4 - 4 - 8 - 8 = 0 \text{ Estado estacionario para JPF}$$

y la segunda:

$$8 - 2 - 2 - 4 = 0 \text{ Estado estacionario para JPR}$$

c) simulación

Con los mismos datos que la anterior pero ahora en $t = 3$ JPF = 60

t	JPF	JPR
1	40	20
2	40	20
3	60	20
4	60	24
5	60.8	26.4
6	62.0267	28
7	63.4916	29.2053
8	65.0999	30.2215
9	66.8042	31.1529
10	68.5811	32.0526
11	70.4196	32.9478
12	72.3145	33.8526
13	74.264	34.7744
14	76.268	35.7175

d) Para incorporar una política de contratación de entrenadores haríamos los siguientes cambios:

La contratación de entrenadores y preparadores físicos se hará en función de las necesidades de los jugadores en período de formación y reciclaje respectivamente.

Sean TE y TPF el la tasa de entrenadores y preparadores físicos que corresponderían por cada jugador. Tendríamos:

$$NE(t) = JPF(t) / TE$$

$$NPF(t) = JPR(t) / TPF$$

En el diagrama de Forrester, tanto NE como NPF pasarían a ser variables auxiliares y aparecerían dos constantes nuevas que son TE y TPF.



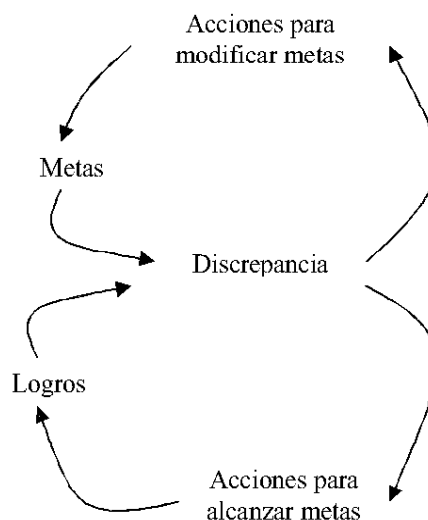
OBSERVACIONES: Esta prueba consta de dos primeros ejercicios breves (2.5 puntos cada uno) y un tercer ejercicio (5 puntos), basado en el estudio más completo de un modelo. En los enunciados de estos ejercicios se ha intentado ser claro y conciso pero a veces, sobre todo en el tercer ejercicio, el enunciado es bastante largo. Se recomienda leer detenidamente cada enunciado, pues la comprensión de éste es un paso muy importante para contestar a los distintos apartados. Se ha intentado también que no todos los apartados de un ejercicio estén entrelazados, por lo que se recomienda afrontar cada apartado casi como si de un nuevo ejercicio se tratara.

ASEGÚRESE QUE LE HAN ENTREGADO (GRAPADAS) TRES HOJAS

NO OLVIDE RELLENAR SUS DATOS PERSONALES EN TODAS LAS HOJAS QUE ENTREGUE
SE PERMITE EL USO DE CALCULADORA CIENTÍFICA SALVO QUE ÉSTA SEA PROGRAMABLE

1. La siguiente figura muestra el diagrama de influencias de un proceso general de erosión de metas. En el que se han omitido intencionadamente los signos de todas las influencias y los retardos asociados a ciertas influencias. Se pide:

- Completar el diagrama, justificando de forma cualitativa las influencias, los signos y los retardos que considere necesarios.
- Analizar brevemente los diferentes bucles que intervienen en el diagrama. ¿Encuentra alguna analogía con alguno de los arquetipos estudiados?
- Poner un ejemplo concreto de erosión de metas.



2. El director de personal de una gran empresa está preocupado por analizar el rendimiento de un grupo de 100 empleados en las últimas diez semanas. Para ello dispone de los siguientes datos:

- Los 100 empleados comenzaron su periodo de baja la misma semana, la que el director va a considerar como semana cero en su estudio.
- Los partes semanales de altas que le han ido facilitando los empleados, con los que ha confeccionado la siguiente tabla.

El director ha decidido ampliar la tabla con otra columna en la que aparezca el número de empleados del grupo que están de baja cada semana, y representarla gráficamente para ver si existe algún comportamiento dinámico en la evolución de las bajas.

- Haga lo mismo que va a hacer el director de personal y analice si se presenta algún arquetipo dinámico.

Semana	Partes de alta
0	0
1	29
2	20
3	15
4	10
5	7
6	5
7	4
8	3
9	2
10	1

b) A la vista de los resultados ¿se puede estimar la duración media de la baja de estos 100 empleados? Si su respuesta es afirmativa, ¿cuál es el valor?

3. Modelo “Estudio de una catástrofe”.

El siguiente conjunto de ecuaciones permitir modelar la evolución de una población formada por jóvenes, adultos y ancianos.

$$(1) \frac{d JOV(t)}{dt} = NAC(t) - MADZ(t) - MJOV(t)$$

$$(5) MADZ(t) = \frac{JOV(t)}{PMADZ}$$

$$(2) \frac{d AD(t)}{dt} = MADZ(t) - VEJ(t) - MAD(t)$$

$$(6) VEJ(t) = \frac{AD(t)}{PVEJ}$$

$$(3) \frac{d ANC(t)}{dt} = VEJ(t) - MANC(t)$$

$$(7) MJOV(t) = JOV(t) TMJOV$$

$$(4) NAC(t) = AD(t) TN$$

$$(8) MAD(t) = AD(t) TMAD$$

$$(9) MANC(t) = ANC(t) TMANC$$

En el que intervienen las siguientes variables (ordenadas alfabéticamente):

AD: Personas adultas

ANC: Personas ancianas

JOV: Personas jóvenes

MAD: Muertes de adultos

MADZ: Personas que alcanzan la madurez

MANC: Muertes de ancianos

MJOV: Muertes de jóvenes

NAC: Nacimientos

PMADZ: Periodo de madurez

PVEJ: Periodo de vejez

TMAD: Tasa de mortalidad de adultos

TMANC: Tasa de mortalidad de ancianos

TMJOV: Tasa de mortalidad de jóvenes

TN: Tasa de natalidad

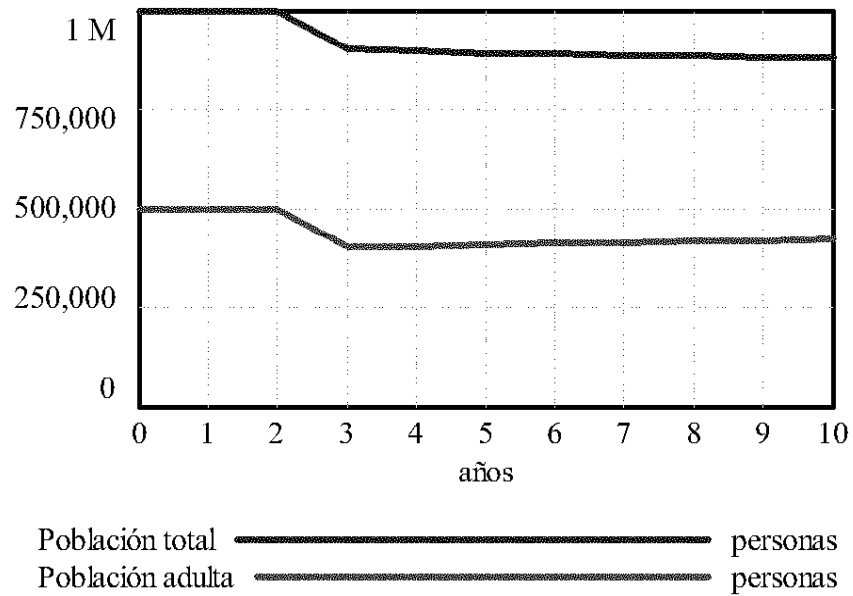
VEJ: Personas que envejecen

a) Hacer una clasificación razonada de las variables que describen el modelo, especificando las unidades de cada una de ellas. Añadir al modelo la ecuación de una variable auxiliar que represente a la población total (PT) y dibujar el diagrama de Forrester resultante.

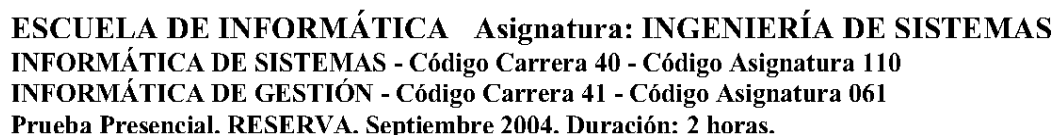
b) Se considera una determinada región con una población total de 1.000.000 de habitantes, repartida de la siguiente forma: el 40% son jóvenes (menores de 20 años), el 50% son adultos (entre 20 y 70 años) y el resto se consideran ancianos. Suponiendo que : $PMADZ = 20$, $PVEJ = 50$, $TN = 0.06$, $TMJOV = 0.025$, $TMAD = 0.02$ y $TMANC = 0.01$. Comprobar que la población total y cada uno de los grupos de población se mantienen estables a lo largo de los años.

c) Con los mismos datos que en el apartado (b), simular lo que ocurrirá en la región si en el segundo año, pero sólo en este año, se desata un terrible incendio que produce un total de 100.000 víctimas, todas ellas adultas. Utilizar la aproximación de Euler con $\Delta t = 1$ año como intervalo de simulación, redondear las variables que considere necesarias al menor entero y simular únicamente 8 años. La siguiente figura que muestra la evolución de la población total y de la población adulta le puede servir para comprobar si ha efectuado correctamente la simulación.

Simulación de una catástrofe



d) Si se deseara realizar la simulación utilizando como intervalo de simulación $\Delta t = 1$ mes. Indique los cambios que habría que introducir en las ecuaciones del modelo para tener en cuenta un nuevo parámetro: el tiempo de embarazo (TE). Justificar la respuesta.



ASEGÚRESE QUE LE HAN ENTREGADO (GRAPADAS) TRES HOJAS
NO OLVIDE RELLENAR SUS DATOS PERSONALES EN TODAS LAS HOJAS QUE ENTREGUE
SE PERMITE EL USO DE CALCULADORA CIENTÍFICA SALVO QUE ÉSTA SEA PROGRAMABLE

```
graph TD; Ventas[Ventas reales de los últimos días] --> Demanda[Estimación de la demanda]; Demanda --> Contratacion[Contratación de aprendices]; Contratacion --> Aprendices[Aprendices]; Aprendices --> Pasan[Aprendices que pasan a ser vendedores]; Pasan --> Vendedores[Vendedores]; Vendedores --> Abandonan[Vendedores que abandonan]; Abandonan --> Capacidad[Capacidad de ventas]; Capacidad --> Demanda; Demanda --> Contratacion; Ventas --> Demanda; NPeriodicos[Nº de periódicos por vendedor y día] --> Capacidad; Capacidad --> Demanda; TiempoAprendizaje[Tiempo de aprendizaje] --> Pasan; TiempoPermanencia[Tiempo de permanencia] --> Abandonan;
```

- Cuando una persona ingresa en la empresa tarda unos días en aprender.
- La mayoría de los vendedores abandonan la empresa por su propia voluntad. Las causas de este abandono son diversas.
- Cuando una persona pasa a la categoría de vendedor, la empresa tiene garantizada la venta de un número fijo de periódicos por día.
- En la empresa se tiene una estadística de las ventas realizadas cada día, que permiten tener una estimación diaria de la demanda de periódicos.
- La contratación de futuros vendedores se hará si la demanda lo requiere, en caso contrario no se tomará ninguna medida (por ejemplo de despidos) pues los márgenes de beneficios lo permiten.

b) Dibujar el diagrama de Forrester correspondiente. Acompañarlo de aquella información que considere oportuna, por ejemplo de una propuesta para estimación de la demanda y para la contratación de aprendices.

2. La siguiente ecuación diferencial describe el proceso de enfriamiento (pérdida de calor) de cualquier cuerpo (previamente calentado). Representa que la pérdida instantánea de calor es directamente proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo (TEMP(t)) y la temperatura ambiente (TAMB).

$$\frac{d \text{TEMP}(t)}{dt} = \frac{1}{\text{FPT}} (\text{TAMB} - \text{TEMP}(t))$$

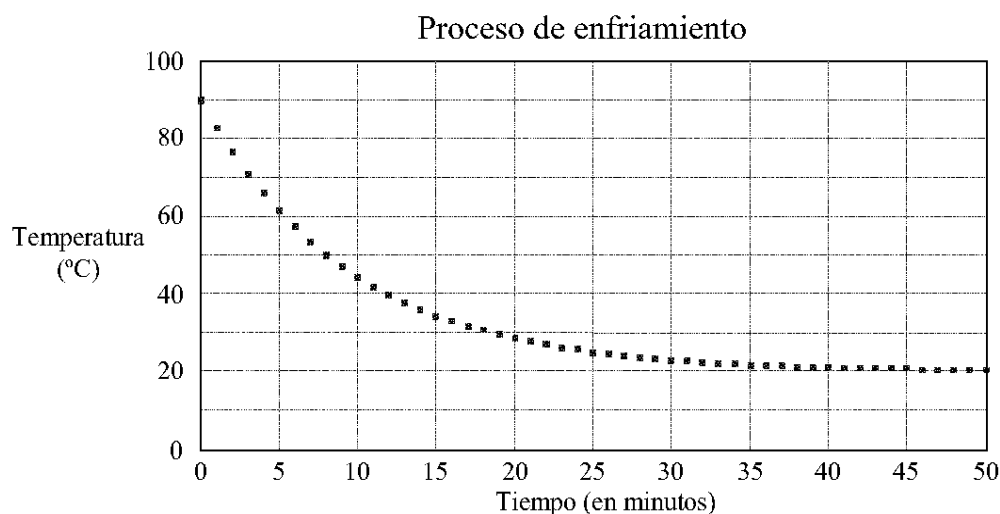
a) En la figura se muestra el comportamiento temporal que experimentó la temperatura de un cuerpo. Utilice la información gráfica para determinar:

La temperatura a la que se calentó el cuerpo.

El valor de la temperatura ambiente.

El factor de pérdidas térmicas FPT que tiene este cuerpo.

b) ¿Qué estructura elemental de las que usted conoce puede reflejar este comportamiento? Justifique su respuesta.



3. Modelo “Estudio de bajas laborales”.

El siguiente conjunto de ecuaciones permitir modelar la evolución semanal de las bajas laborales en una determinada población activa (la población que realiza algún tipo de actividad laboral).

$$(1) \quad \frac{d \text{PA}(t)}{dt} = \text{IPA}(t) + \text{AL}(t) - \text{BL}(t)$$

$$(2) \quad \frac{d \text{PBL}(t)}{dt} = \text{BL}(t) - \text{AL}(t) - \text{BD}(t) \quad ; \quad (3) \quad \frac{d \text{PI}(t)}{dt} = \text{BD}(t)$$

$$(4) \quad \text{BL}(t) = \text{TBL} \text{ PA}(t) \quad ; \quad (5) \quad \text{AL}(t) = \frac{\text{PBL}(t)}{\text{DMB}} \quad ; \quad (6) \quad \text{BD}(t) = \text{TBD} \text{ PBL}(t)$$

En el que intervienen las siguientes variables (ordenadas alfabéticamente):

AL : Altas laborales
BD : Bajas definitivas
BL : Bajas laborales
DMB : Duración media de la baja
IPA : Incorporaciones a la población activa
PA : Población activa

PBL : Población de baja laboral
PI : Población incapacitada para el trabajo
TBD : Tasa de bajas definitivas entre la población de baja laboral
TBL : Tasa de bajas laborales entre la población activa

a) Hacer una clasificación razonada de las variables que describen el modelo, especificando las unidades de cada una de ellas, y dibujar el correspondiente diagrama de Forrester.

b) Se considera una determinada ciudad con: una población activa de 1.000.000 personas, una población de baja por enfermedad de 100.000 personas y ninguna población incapacitada inicialmente. Suponiendo que: $DMB = 4$, $TBD = 0.02$, $TBL = 0.027$. Comprobar que la población activa y la población de baja se mantendrán constantes si se producen $IPA = 2000$ incorporaciones semanales a la población activa. ¿Cómo evolucionará la población incapacitada para el trabajo? Utilizar la aproximación de Euler con $\Delta t = 1$ semana como intervalo de simulación.

c) Con los mismos datos que en el apartado (b), simular lo que ocurrirá con la población activa y con la población de baja si en la segunda semana, pero sólo en esta semana, se producen 3000 incorporaciones en lugar de las 2000 habituales. Se recomienda redondear las variables que considere necesarias al menor entero y simular únicamente 18 semanas. A la vista de los resultados ¿se puede considerar que al cabo de 18 semanas se ha alcanzado un nuevo estacionario o habría que simular más semanas?



ESCUELA DE INFORMÁTICA Asignatura: INGENIERÍA DE SISTEMAS
INFORMÁTICA DE SISTEMAS – Códigos: 533066 (Plan Nuevo) 403110 (Plan Antiguo)
INFORMÁTICA DE GESTIÓN – Códigos: 543068 (Plan Nuevo) 413061 (Plan Antiguo)
Prueba Presencial. Primera Vuelta. Enero 2005. Duración: 2 horas.

OBSERVACIONES: Esta prueba consta de dos primeros ejercicios breves (2.5 puntos cada uno) y un tercer ejercicio (5 puntos), basado en el estudio más completo de un modelo. En los enunciados de estos ejercicios se ha intentado ser claro y conciso pero a veces, sobre todo en el tercer ejercicio, el enunciado es bastante largo. Se recomienda leer detenidamente cada enunciado, pues la comprensión de éste es un paso muy importante para contestar a los distintos apartados. Se ha intentado también que no todos los apartados de un ejercicio estén entrelazados, por lo que se recomienda afrontar cada apartado casi como si de un nuevo ejercicio se tratara.

ASEGÚRESE QUE LE HAN ENTREGADO (GRAPADAS) TRES HOJAS
NO OLVIDE RELLENAR SUS DATOS PERSONALES EN TODAS LAS HOJAS QUE ENTREGUE
SE PERMITE EL USO DE CALCULADORA CIENTÍFICA SALVO QUE ÉSTA SEA PROGRAMABLE

1. Se pretende modelar la evolución semanal de las bajas laborales en una determinada población activa (la población que realiza algún tipo de actividad laboral). Se sabe que la mayoría de las personas que están de baja acaban reincorporándose al trabajo, cuando reciben el alta, mientras que otras alcanzan la incapacidad laboral. El modelo debe incluir al menos las siguientes variables:

AL : Altas laborales

BD : Bajas definitivas

BL : Bajas laborales

DMB : Duración media de la baja

IPA : Incorporaciones a la población activa

PA : Población activa

PBL : Población de baja laboral

PI : Población incapacitada para el trabajo

TBD : Tasa de bajas definitivas entre la población de baja laboral

TBL : Tasa de bajas laborales entre la población activa

a) Proponer un diagrama de influencias para el modelo, justificando de forma cualitativa cada una de las relaciones y sus signos.

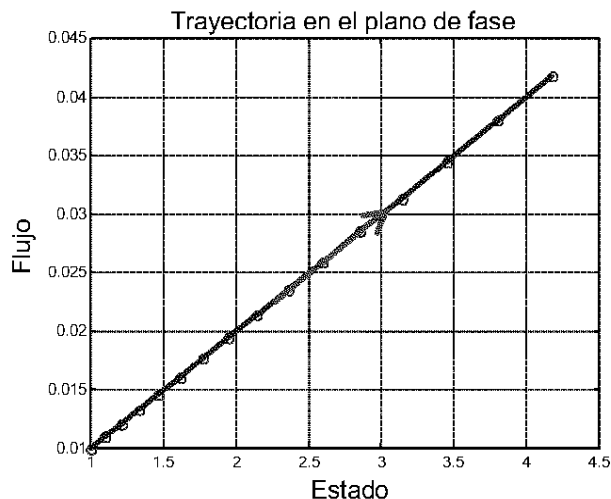
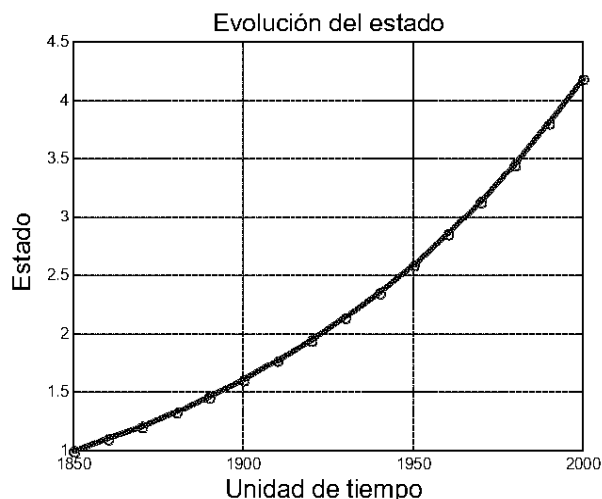
b) Analizar todos los bucles del diagrama y razonar si, a partir de ellos, es posible predecir el comportamiento (estable o inestable) de este modelo.

2. Las figuras muestran la evolución del estado y la trayectoria en el plano de fase de un bucle elemental de realimentación positiva. En ambas gráficas están indicados, mediante círculos, los valores de las variables en cada unidad de tiempo y se incluye con trazo continuo la unión de todos ellos.

a) Determinar sobre ambas gráficas o sobre la gráfica más adecuada:

- El valor de la tasa de crecimiento k .
- El tiempo de duplicación, expresado en unidades de tiempo.

b) Si lo que se quiere representar con este modelo es la evolución de la población mundial, ¿qué representa cada una de las variables en este caso particular?, ¿cómo interpreta usted los resultados de la figura de la izquierda?



3. Modelo “Vida laboral”. El siguiente conjunto de ecuaciones permite modelar la evolución de las horas extras que una determinada persona debe realizar durante su vida laboral para conseguir unos determinados ahorros. El modelo considera que la persona puede acumular un máximo de 242 horas extras anuales, lo que equivaldría a una hora extra diaria. También considera que la capacidad de la persona para echar horas extras está directamente relacionada con su salud, cuyo valor óptimo es 100, y por tanto irá disminuyendo en función de la fatiga que produzca el número de horas extras trabajadas.

$$(1) \quad \text{AHRR}(t) = \text{SALAR} \cdot \text{THE}(t)$$

$$(5) \quad \text{ETS}(t) = \text{TF} \cdot \text{FAT}(t)$$

$$(2) \quad \text{DIFAHRR}(t) = \text{AHRRD} - \text{AHRR}(t)$$

$$(6) \quad \frac{d \text{THE}(t)}{dt} = \text{HEA}(t)$$

$$(3) \quad \text{HEA}(t) = \min \left(\frac{\text{DIFAHRR}(t) \cdot \text{SALAR}(t)}{2 \cdot \text{SALAR} \cdot 100}, 242 \right)$$

$$(7) \quad \frac{d \text{SALUD}(t)}{dt} = -\text{ETS}(t)$$

$$(4) \quad \text{FAT}(t) = g(\text{THE}(t))$$

En el modelo intervienen las siguientes variables (ordenadas alfabéticamente):

AHRR: Ahorros netos por horas extras

AHRRD: Ahorros deseados

DIFAHRR: Diferencia de ahorros

ETS: Efecto del trabajo sobre la salud

FAT: Fatiga producida por las horas extras de trabajo acumuladas

g: Una función no lineal que relaciona la fatiga con las horas de trabajo acumuladas, tal como se recoge en la tabla.

HEA: Horas extras anuales

min: La función mínimo

SALAR: Salario neto por hora extra trabajada

SALUD: Medida de la salud

TF: Tasa de fatiga

THE: Total de horas extras

THE	FAT
0	0
500	0
1000	5
2000	15
5000	45

a) Hacer una clasificación razonada de las variables, dibujar el correspondiente diagrama de Forrester y explicar cualitativamente el significado de la ecuación (3).

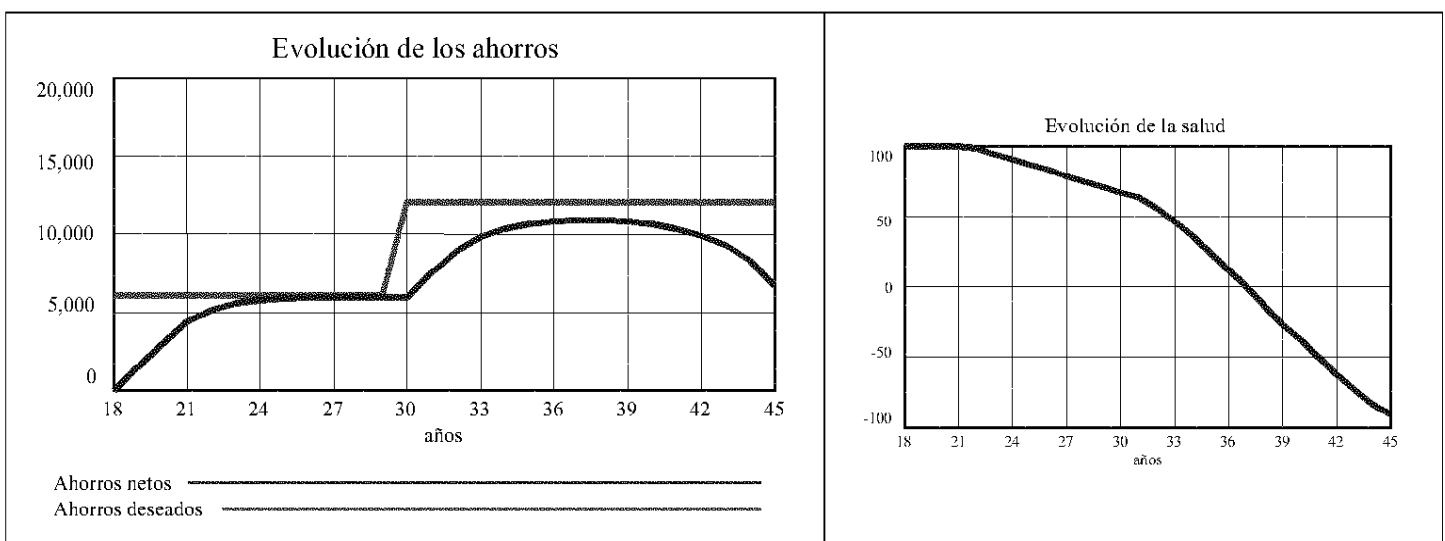
b) Considerar que al comienzo de la vida laboral ($t = 18$ años) la persona tiene una salud óptima, es decir $SALUD(18) = 100$, aún no ha echado ninguna hora extra, $THE(18) = 0$, y su objetivo es ahorrar un total de 6000 euros, $AHRRD = 6000$. Suponiendo que por cada hora extra trabajada ingresa 6 euros, $SALAR = 6$, y que $TF = 1$, simular cómo evolucionarán sus ahorros con el transcurrir de los años. Utilice la aproximación de Euler con $\Delta t = 1$ año como intervalo de simulación, interpole linealmente cuando sea necesario, redondee (al menor entero) las variables de flujo y simule únicamente 5 años. La gráfica de la izquierda, que muestra la evolución de los ahorros, le puede servir para comprobar si ha efectuado correctamente la simulación.

c) Se quiere recoger en el modelo la idea de que a partir de los 30 años el individuo desea unos ahorros de 12000 euros. Esta nueva hipótesis modifica el valor de la variable $AHRRD$ de la siguiente manera:

$$AHRRD(t) = \begin{cases} 6000 & \text{si } t < 30 \\ 12000 & \text{si } t \geq 30 \end{cases}$$

Suponiendo que para $t = 29$ años ya se había alcanzado un estacionario con $THE(29) = 996$ y $SALUD(29) = 71$. Simule al menos los 2 siguientes años para la nueva situación.

d) A la vista de los resultados de las gráficas que conclusiones se pueden sacar. ¿Sería buena recomendación para el individuo en cuestión decirle que aproveche la primera parte de su vida laboral para conseguir una mayor cualificación profesional, de forma que a los 30 años pueda obtener un 50% más de salario en cada hora extra realizada? ¿Cómo reflejaría esta nueva hipótesis en el modelo?





OBSERVACIONES: Esta prueba consta de dos primeros ejercicios breves (2.5 puntos cada uno) y un tercer ejercicio (5 puntos), basado en el estudio más completo de un modelo. En los enunciados de estos ejercicios se ha intentado ser claro y conciso pero a veces, sobre todo en el tercer ejercicio, el enunciado es bastante largo. Se recomienda leer detenidamente cada enunciado, pues la comprensión de éste es un paso muy importante para contestar a los distintos apartados. Se ha intentado también que no todos los apartados de un ejercicio estén entrelazados, por lo que se recomienda afrontar cada apartado casi como si de un nuevo ejercicio se tratara.

ASEGÚRESE QUE LE HAN ENTREGADO (GRAPADAS) TRES HOJAS
NO OLVIDE RELLENAR SUS DATOS PERSONALES EN TODAS LAS HOJAS QUE ENTREGUE
SE PERMITE EL USO DE CALCULADORA CIENTÍFICA SALVO QUE ÉSTA SEA PROGRAMABLE

1. Se pretende modelar la evolución de una población formada por jóvenes, adultos y ancianos. Donde los adultos son los únicos que tienen capacidad de procrear. El modelo debe incluir al menos las siguientes variables:

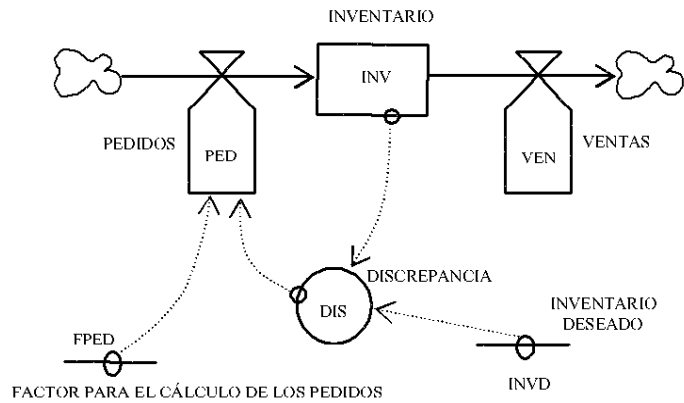
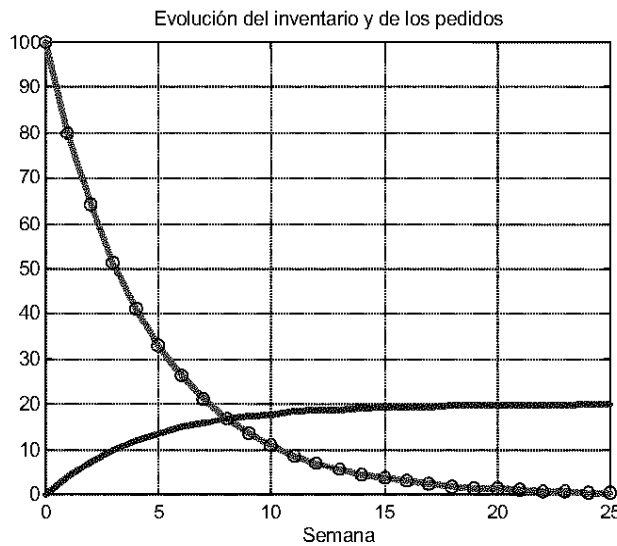
AD: Personas adultas	PMADZ: Periodo de madurez
ANC: Personas ancianas	PVEJ: Periodo de vejez
JOV: Personas jóvenes	TMAD: Tasa de mortalidad de adultos
MAD: Muertes de adultos	TMANC: Tasa de mortalidad de ancianos
MADZ: Personas que maduran	TMJOV: Tasa de mortalidad de jóvenes
MANC: Muertes de ancianos	TN: Tasa de natalidad
MJOV: Muertes de jóvenes	VEJ: Personas que envejecen
NAC: Nacimientos	

- Proponer un diagrama de influencias para el modelo, justificando de forma cualitativa cada una de las relaciones y sus signos.
- Analizar todos los bucles del diagrama y razonar si, a partir de ellos, es posible predecir el comportamiento (estable o inestable) de este modelo.

2. La figura de la izquierda muestra el resultado de la simulación del sistema de control de un inventario, cuyo diagrama de Forrester se muestra a la derecha. Sabiendo que la simulación se ha hecho en las siguientes condiciones:

- Utilizando la semana como unidad de tiempo.
- El sistema inicialmente está en equilibrio, con el inventario (INV) igual al inventario deseado (INVD) de 100 unidades.
- Las ventas (VEN) varían, de repente, de 0 a 20 unidades por semana en la semana cero de la simulación y se mantiene a este valor durante el resto de la simulación.
- El flujo de pedidos (PED) es proporcional a la discrepancia (DIS) entre el inventario actual y el deseado.

- Determinar el valor de la constante de proporcionalidad (FPED), responsable de la nueva situación de equilibrio que muestra la gráfica.
- Utilizar la evolución del inventario para determinar un valor aproximado de la constante de tiempo del sistema, expresada en semanas. ¿Qué relación guarda esta constante de tiempo con la variable FPED?



3. Modelo “Cadena de montaje”. Con el siguiente conjunto de ecuaciones se pretende modelar el funcionamiento de una cadena de montaje. La cadena pertenece a una pequeña empresa que monta dos tipos de equipos electrónicos bajo pedidos; el modelo básico y el modelo ampliado. El modelo ampliado se fabrica a partir de un modelo básico, incorporando las correspondientes ampliaciones. Para esta tarea la empresa cuenta con una plantilla de empleados fijos y varios empleados contratados temporalmente a una empresa de servicios. Los primeros están capacitados para montar tanto los equipos básicos como las ampliaciones, pero los empleados temporales sólo están preparados para montar los equipos básicos. La plantilla de montaje está dimensionada considerando que los empleados temporales suelen tener una tasa de montaje algo menor que la de los empleados fijos y que es muy importante atender todos los pedidos recibidos. Con el fin de soportar cualquier eventualidad (aumento de pedidos o enfermedad de los empleados, etc ...) la empresa dispone de un cierto stock de ambos equipos.

$$(1) \quad \text{MEB}(t) = \text{TMEBEF} \cdot \text{EFMB}(t) + \text{TMET} \cdot \text{ET}(t)$$

$$(2) \quad \text{EEB}(t) = \min(\text{PEB}(t), \text{EB}(t))$$

$$(3) \quad \text{MA}(t) = \min \{ \text{TMA} \cdot \text{EFMA}(t), \text{EB}(t) - \min(\text{PEB}(t), \text{EB}(t)) \}$$

$$(4) \quad \text{EEA}(t) = \min(\text{PEA}(t), \text{EA}(t))$$

$$(5) \quad \frac{d \text{EB}(t)}{dt} = \text{MEB}(t) - \text{EEB}(t) - \text{MA}(t)$$

$$(6) \quad \frac{d \text{EA}(t)}{dt} = \text{MA}(t) - \text{EEA}(t)$$

Siendo:

EA : Stock de equipos con ampliación

EB : Stock de equipos básicos

EEA : Entregas de equipos con ampliación

EEB : Entregas de equipos básicos

EFMA : Empleados fijos en el montaje de ampliaciones
 EFMB : Empleados fijos en el montaje básico
 ET : Empleados temporales
 MA : Montaje de ampliaciones
 MEB : Montaje de equipos básicos
 min : La función mínimo
 PEA : Pedidos de equipos con ampliación
 PEB : Pedidos de equipos básicos
 TMA : Tasa de montaje de las ampliaciones
 TMEBEF : Tasa de montaje de los equipos básicos por empleados fijos
 TMET : Tasa de montaje de los empleados temporales

a) Clasificar las variables, indicando sus unidades, y resumir en el correspondiente diagrama de Forrester el conjunto total de ecuaciones del modelo. Observación: puede incluir más variables si las considera convenientes para facilitar la legibilidad del diagrama y/o la interpretación del modelo.

b) Suponiendo que TMEBEF=2, TMET=1.5, TMA=4. Comprobar que la empresa puede atender un pedido diario de 20 equipos básicos y 16 equipos con ampliaciones, con dieciséis empleados fijos repartidos de la siguiente forma EFMEB=12, EFMA=4 y ocho empleados temporales (ET=8), sin que se produzcan alteraciones en su almacén, que dispone de 50 equipos básicos (EB=50) y 20 equipos con ampliaciones (EA=20).

c) Partiendo de las mismas condiciones del apartado (b) simular lo que ocurre en la cadena de montaje si en el segundo día hay un cambio de 20 a 16 en el pedido diario de equipos básicos, y ahí se mantiene durante bastantes días. Se recomienda utilizar la aproximación de Euler con $\Delta t=1$ día como intervalo de simulación y simular únicamente diez días. ¿Es cierto que la empresa logra atender todas las peticiones? ¿Qué ha ocurrido con los stocks?

d) En el mismo supuesto del apartado (c), suponer que el pedido diario de equipos básicos pasa de 20 a 28. ¿Es cierto que la empresa logra atender todas las peticiones de equipos básicos pero no las de equipos ampliados? ¿Qué ha ocurrido con los stocks?

e) La empresa está estudiando incorporar una política de distribución de empleados fijos y de contratación de empleados temporales en función de los pedidos recibidos, a sabiendas que los contratos tardan en tramitarse un par de días. Justificar que añadiendo la variable EF(t), que representa el número total de empleados fijos, y las siguientes tres ecuaciones, donde “integer” es la función redondeo al menor entero y “delay” es la función retraso, se puede analizar esa política de contratación antes de llevarla a la práctica.

$$(7) \quad EFMA(t) = \frac{PEA(t)}{TMA}$$

$$(8) \quad EFMB(t) = EF(t) - EFMA(t)$$

$$(9) \quad ET(t) = \text{integer} \left(\text{delay} \left(\frac{PEB(t) + PEA(t) - TMEBEF \cdot EFMB(t)}{TMET}, 2 \right) \right)$$



OBSERVACIONES: Esta prueba consta de dos primeros ejercicios breves (2.5 puntos cada uno) y un tercer ejercicio (5 puntos), basado en el estudio más completo de un modelo. En los enunciados de estos ejercicios se ha intentado ser claro y conciso pero a veces, sobre todo en el tercer ejercicio, el enunciado es bastante largo. Se recomienda leer detenidamente cada enunciado, pues la comprensión de éste es un paso muy importante para contestar a los distintos apartados. Se ha intentado también que no todos los apartados de un ejercicio estén entrelazados, por lo que se recomienda afrontar cada apartado casi como si de un nuevo ejercicio se tratara.

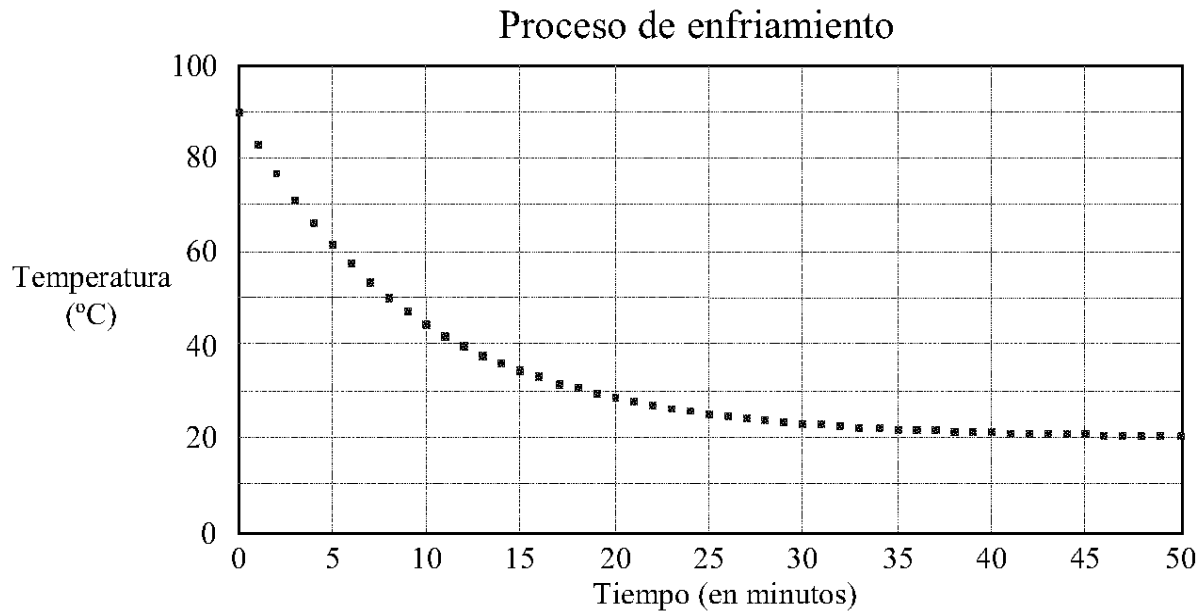
ASEGÚRESE QUE LE HAN ENTREGADO (GRAPADAS) TRES HOJAS
NO OLVIDE RELLENAR SUS DATOS PERSONALES EN TODAS LAS HOJAS QUE ENTREGUE
SE PERMITE EL USO DE CALCULADORA CIENTÍFICA SALVO QUE ÉSTA SEA PROGRAMABLE

1. El editor de un periódico tiene un problema logístico, desea mantener un número de vendedores que le garanticen las ventas. Para analizar el problema de contratación cuenta con la siguiente información:

- La empresa cuenta con una plantilla de vendedores, que se ve continuamente ampliada por la contratación de un personal no cualificado (aprendices) que tardan unos días en aprender el oficio y por tanto en tener capacidad de ventas.
 - Las condiciones salariales y el tipo de trabajo hace que continuamente haya vendedores que abandonan voluntariamente la tarea de vendedor, pasando a otras tareas dentro de la empresa o pidiendo el despido. La dirección de la empresa no contempla por ahora ninguna política de despidos, pero tampoco el incentivo para tratar de cambiar la decisión del vendedor.
 - Cuando una persona pasa a la categoría de vendedor, la empresa tiene garantizada la venta de un número fijo de periódicos por día durante los días de permanencia en plantilla del vendedor.
 - En la empresa se tiene una estadística de las ventas realizadas cada día, que permiten tener una estimación diaria de la demanda de periódicos.
 - La contratación de futuros vendedores se hará si la demanda lo requiere.
- a) Dibujar un diagrama de influencias que modele esta situación, recogiendo todas las variables y relaciones implícitas en el enunciado, y cualquier otra que considere oportuna. Acompáñelo de las correspondientes justificaciones.
- b) Analizar la estabilidad de los bucles elementales y del modelo en su conjunto.

2. La siguiente figura muestra el comportamiento temporal que experimentó la temperatura de un cuerpo.

- a) Sabiendo que el cuerpo había sido previamente calentado hasta 90 °C (datos no recogidos en la gráfica) y se dejó enfriar en una habitación a temperatura ambiente, escriba una ecuación diferencial que describa el proceso de enfriamiento experimentado por el cuerpo.
- b) ¿Qué constante de tiempo tiene este proceso? Si el cuerpo es muy pequeño en comparación con el tamaño de la habitación, ¿qué factores pueden estar determinando el valor de la constante de tiempo? Si el cuerpo se hubiera calentado hasta 70 °C, ¿habría tardado lo mismo en enfriarse?



3. Modelo “Población de ratones infectada por Hantavirus”. Los Hantavirus son agentes infecciosos, transmitidos por los ratones, que pueden causar graves enfermedades en la población humana. El siguiente conjunto de ecuaciones permite modelar la propagación de la infección por Hantavirus en una población de ratones, bajo las hipótesis de que los dos grupos de población (ratones susceptibles y ratones infectados) están afectados además de por el contagio, por las dinámicas típicas de cualquier población: nacimientos (todos los ratones nacen sanos, susceptibles de ser infectados), muertes naturales con la misma tasa de mortalidad en los dos grupos de población pues el Hantavirus no afecta a los ratones y muertes como consecuencia de la limitación de recursos.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad NR(t) &= TN (RS(t) + RI(t)) & ; & \quad (2) \quad MNRS(t) = TMN RS(t) \\
 (3) \quad MRRS(t) &= TMR RS(t) (RS(t) + RI(t)) & ; & \quad (4) \quad RSI(t) = TC RS(t) RI(t) \\
 (5) \quad MNRI(t) &= TMN RI(t) & ; & \quad (6) \quad MRRI(t) = TMR RI(t) (RS(t) + RI(t)) \\
 (7) \quad \frac{d RS(t)}{dt} &= NR(t) - MNRS(t) - MRRS(t) - RSI(t) \\
 (8) \quad \frac{d RI(t)}{dt} &= RSI(t) - MNRI(t) - MRRI(t)
 \end{aligned}$$

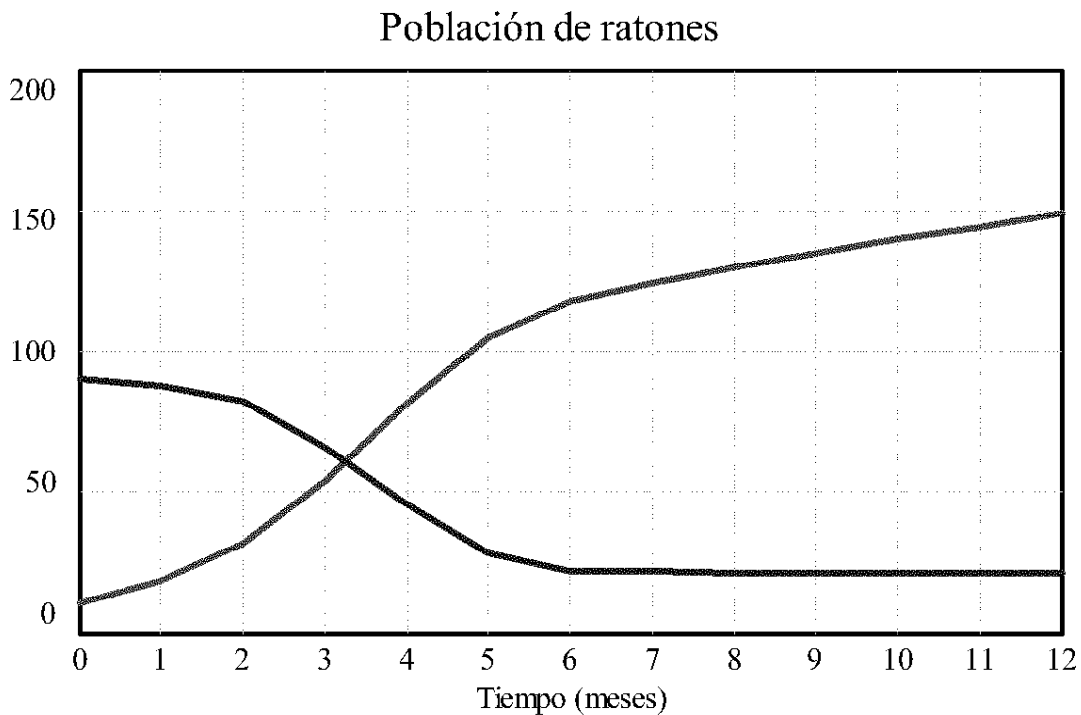
En el modelo intervienen las siguientes variables, ordenadas alfabéticamente:

- MNRI Muertes naturales en la población de ratones infectados
- MNRS Muertes naturales en la población de ratones susceptibles
- MRRI Muertes en la población de ratones infectados como consecuencia de la limitación de recursos naturales
- MRRS Muertes en la población de ratones susceptibles como consecuencia de la limitación de recursos naturales
- NR Nacimientos de ratones
- RI Población de ratones infectados
- RS Población de ratones susceptibles

RSI	Contagios entre los ratones susceptibles producidos por el contacto con ratones infectados
TC	Tasa de contagio
TMN	Tasa de mortalidad natural
TMR	Tasa de mortalidad como consecuencia de la limitación de recursos naturales
TN	Tasa de natalidad

a) Hacer una clasificación razonada de las variables, dibujar el correspondiente diagrama de Forrester y explicar cualitativamente si está de acuerdo con las ecuaciones (3), (4) y (6).

b) Considerando que $TC=0.01$, $TMN=0.1$, $TMR=0.0005$ y $TN=0.2$. Simular cómo evoluciona la población de ratones durante 12 meses si en el instante inicial hay 90 ratones susceptibles y 10 ratones infectados. Considerar redondeo (al menor entero) en todos los flujos y un intervalo de integración igual a 1 mes. Las gráficas siguientes le pueden servir para comprobar si ha efectuado correctamente la simulación.



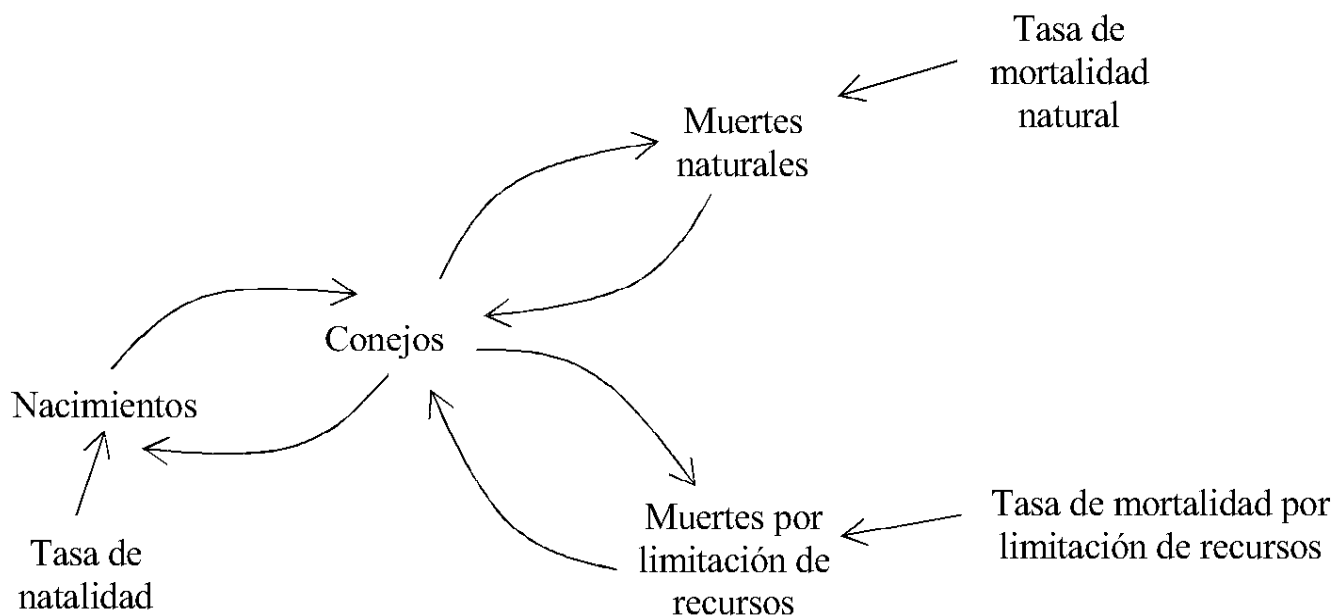
c) Utilice los resultados obtenidos en el apartado anterior o los mostrados en la gráfica para contestar, de forma justificada, a las siguientes preguntas: ¿la población total de ratones se ha mantenido constante?, ¿es cierto que se llega a un equilibrio en la población de ratones susceptibles pero no en la de ratones infectados?, ¿qué se puede esperar en los próximos meses?



OBSERVACIONES: Esta prueba consta de dos primeros ejercicios breves (2.5 puntos cada uno) y un tercer ejercicio (5 puntos), basado en el estudio más completo de un modelo. En los enunciados de estos ejercicios se ha intentado ser claro y conciso pero a veces, sobre todo en el tercer ejercicio, el enunciado es bastante largo. Se recomienda leer detenidamente cada enunciado, pues la comprensión de éste es un paso muy importante para contestar a los distintos apartados. Se ha intentado también que no todos los apartados de un ejercicio estén entrelazados, por lo que se recomienda afrontar cada apartado casi como si de un nuevo ejercicio se tratara.

ASEGÚRESE QUE LE HAN ENTREGADO (GRAPADAS) TRES HOJAS
NO OLVIDE RELLENAR SUS DATOS PERSONALES EN TODAS LAS HOJAS QUE ENTREGUE
SE PERMITE EL USO DE CALCULADORA CIENTÍFICA SALVO QUE ÉSTA SEA PROGRAMABLE

1. La figura muestra un diagrama de influencias entre ciertas variables de una población de conejos, en el que se han omitido intencionadamente los signos de todas las influencias.



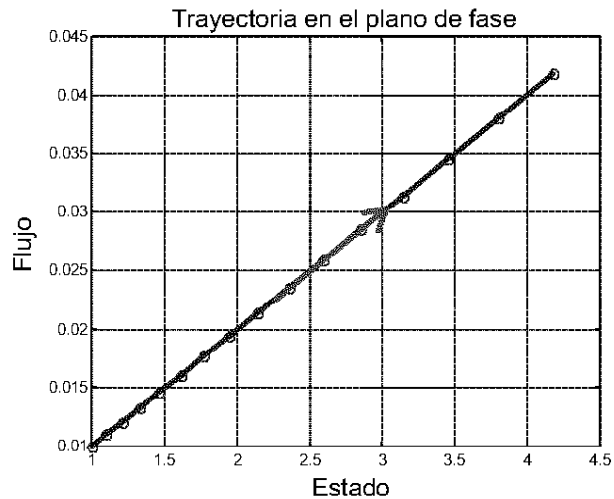
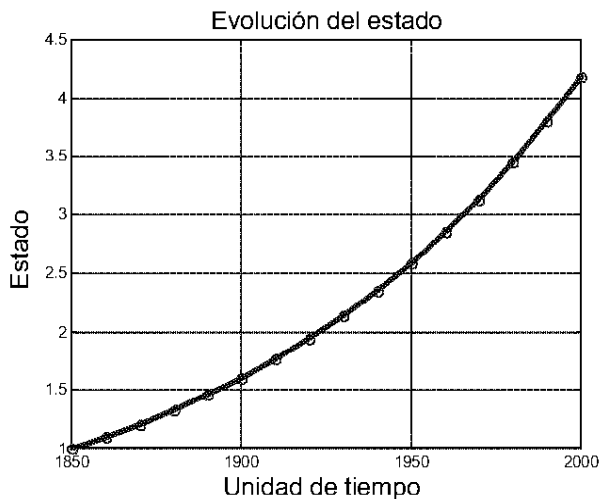
- Completar el diagrama, justificando de forma cualitativa los signos de cada una de las influencias, y comentar la naturaleza de sus bucles elementales. Observación: utilice si le es más cómodo abreviaturas para el nombre de las variables.
- Sabiendo que la población de conejos afecta cuadráticamente en las muertes por falta de recursos y que el resto de relaciones son las típicas de cualquier dinámica poblacional. Proponer un conjunto de ecuaciones para modelar la población de conejos.
- ¿Es cierto que esta población de conejos sólo puede evolucionar a una situación de equilibrio (función de las tres tasas)? Es decir que si la población inicial es menor (mayor) que ese valor, crecerá (decrecerá) asintóticamente a él. ¿Cuál es ese valor?

2. Las figuras muestran la evolución del estado y la trayectoria en el plano de fase de un bucle elemental de realimentación positiva. En ambas gráficas están indicados, mediante círculos, los valores de las variables en cada unidad de tiempo y se incluye con trazo continuo la unión de todos ellos.

- Determinar sobre ambas gráficas o sobre la gráfica más adecuada:
 - El valor de la tasa de crecimiento k .

- El tiempo de duplicación, expresado en unidades de tiempo.

b) Si lo que se quiere representar con este modelo es la evolución de la población mundial, ¿qué representa cada una de las variables en este caso particular?, ¿cómo interpreta usted los resultados de la figura de la izquierda?



3. Modelo simplificado “Flujo migratorio”. En este ejercicio se presenta un modelo simplificado del flujo migratorio entre dos comunidades (países, ciudades, etc...) debido a factores económicos. El modelo quiere representar que: a) la calidad de vida se mide en términos de un reparto equitativo de los recursos económicos de cada comunidad entre sus miembros, b) el flujo entre comunidades está provocado por la diferencia entre las calidades de vida de ambas poblaciones.

El modelo está descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{dP_1(t)}{dt} &= -FN_{12}(t) & (2) \quad \frac{dP_2(t)}{dt} &= FN_{12}(t) \\ (3) \quad CV_1(t) &= \frac{RE_1}{P_1(t)} & (4) \quad CV_2(t) &= \frac{RE_2}{P_2(t)} \\ (5) \quad FN_{12}(t) &= TM (CV_2(t) - CV_1(t)) \end{aligned}$$

Siendo:

CV1, calidad de vida de la comunidad 1
CV2, calidad de vida de la comunidad 2
FN12, flujo migratorio neto de la comunidad 1 hacia la 2
P1, población de la comunidad 1
P2, población de la comunidad 2
RE1, recursos económicos mensuales de la comunidad 1
RE2, recursos económicos mensuales de la comunidad 2
TM, la tasa migratoria entre las dos comunidades

a) Justificar que el modelo propuesto es coherente con el enunciado y recoge bastante bien la interacción entre las dos comunidades.

b) Clasificar las variables y resumir en el correspondiente diagrama de Forrester el conjunto total de ecuaciones del modelo.

c) Suponiendo que: $RE1=RE2=1000000$ de euros/mes, $TM=1000$ personas personas/euro, la comunidad 1 está constituida por 100000 personas y la comunidad 2 por 50000 personas. Simular la evolución de las variables del modelo, durante al menos 15 meses, utilizando la aproximación de Euler con $\Delta t=1$ mes como intervalo de simulación y redondeo a un decimal en las calidades de vida.

d) En función de los resultados del apartado (c), o utilizando el conocimiento del modelo si no ha tenido tiempo para realizar la simulación, conteste de forma razonada a las siguientes preguntas:

- ¿cómo está distribuida la población después de año y medio?
- ¿por qué y cuándo se alcanza el estado estacionario?
- ¿existe alguna analogía entre este modelo y el principio físico de vasos comunicantes?
- ¿qué hubiera ocurrido si $RE1=1$ millón de euros/mes y $RE2=500000$ euros/mes?
- ¿qué hubiera ocurrido si $RE1=1$ millón de euros/mes y $RE2=250000$ de euros/mes?

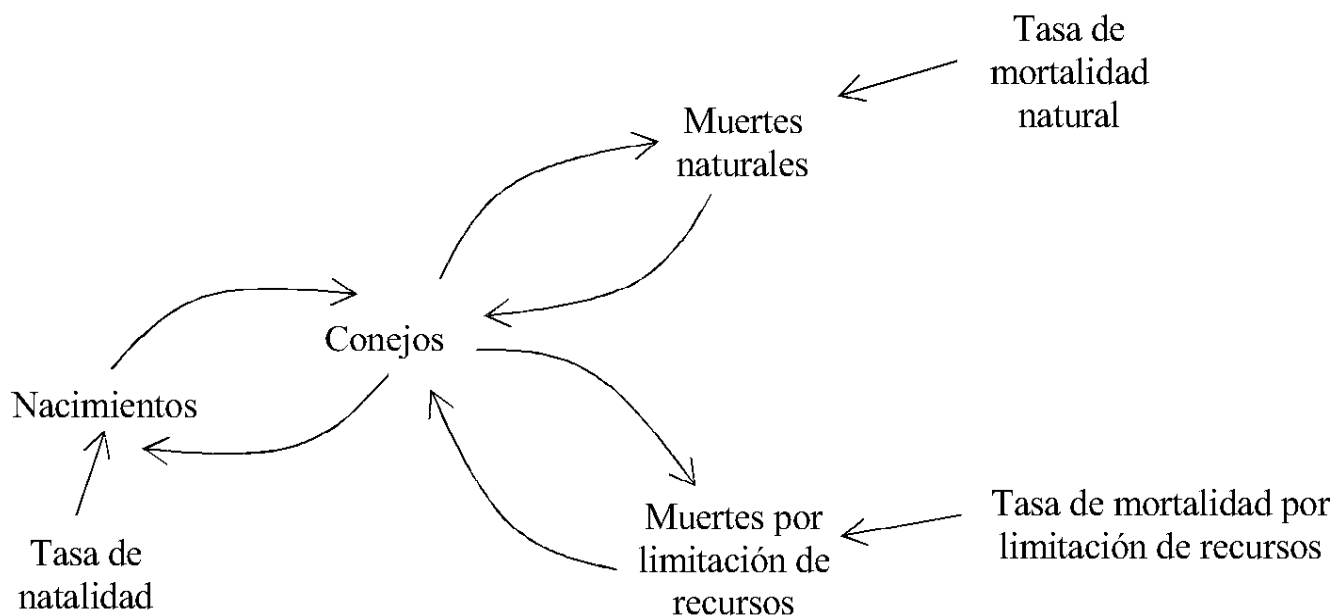
e) En el modelo se ha supuesto que el flujo migratorio se produce instantáneamente. Teniendo en cuenta que la decisión de emigrar es personal y que puede venir afectada de un retraso de 2 meses. ¿Qué ecuaciones modificaría en el modelo para tenerlo en cuenta y cómo las aproximaría para simularlas?



OBSERVACIONES: Esta prueba consta de dos primeros ejercicios breves (2.5 puntos cada uno) y un tercer ejercicio (5 puntos), basado en el estudio más completo de un modelo. En los enunciados de estos ejercicios se ha intentado ser claro y conciso pero a veces, sobre todo en el tercer ejercicio, el enunciado es bastante largo. Se recomienda leer detenidamente cada enunciado, pues la comprensión de éste es un paso muy importante para contestar a los distintos apartados. Se ha intentado también que no todos los apartados de un ejercicio estén entrelazados, por lo que se recomienda afrontar cada apartado casi como si de un nuevo ejercicio se tratara.

ASEGÚRESE QUE LE HAN ENTREGADO (GRAPADAS) TRES HOJAS
NO OLVIDE RELLENAR SUS DATOS PERSONALES EN TODAS LAS HOJAS QUE ENTREGUE
SE PERMITE EL USO DE CALCULADORA CIENTÍFICA SALVO QUE ÉSTA SEA PROGRAMABLE

1. La figura muestra un diagrama de influencias entre ciertas variables de una población de conejos, en el que se han omitido intencionadamente los signos de todas las influencias.



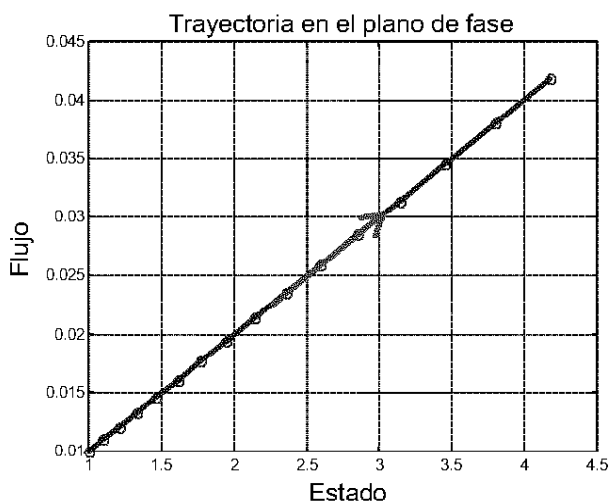
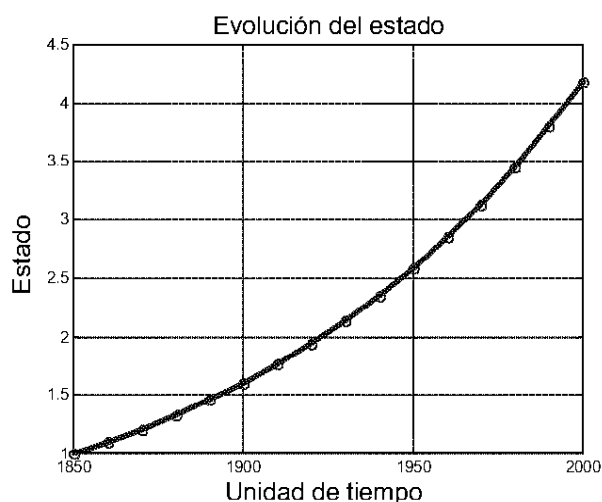
- Completar el diagrama, justificando de forma cualitativa los signos de cada una de las influencias, y comentar la naturaleza de sus bucles elementales. Observación: utilice si le es más cómodo abreviaturas para el nombre de las variables.
- Sabiendo que la población de conejos afecta cuadráticamente en las muertes por falta de recursos y que el resto de relaciones son las típicas de cualquier dinámica poblacional. Proponer un conjunto de ecuaciones para modelar la población de conejos.
- ¿Es cierto que esta población de conejos sólo puede evolucionar a una situación de equilibrio (función de las tres tasas)? Es decir que si la población inicial es menor (mayor) que ese valor, crecerá (decrecerá) asintóticamente a él. ¿Cuál es ese valor?

2. Las figuras muestran la evolución del estado y la trayectoria en el plano de fase de un bucle elemental de realimentación positiva. En ambas gráficas están indicados, mediante círculos, los valores de las variables en cada unidad de tiempo y se incluye con trazo continuo la unión de todos ellos.

- Determinar sobre ambas gráficas o sobre la gráfica más adecuada:
 - El valor de la tasa de crecimiento k .

- El tiempo de duplicación, expresado en unidades de tiempo.

b) Si lo que se quiere representar con este modelo es la evolución de la población mundial, ¿qué representa cada una de las variables en este caso particular?, ¿cómo interpreta usted los resultados de la figura de la izquierda?



3. Modelo simplificado “Flujo migratorio”. En este ejercicio se presenta un modelo simplificado del flujo migratorio entre dos comunidades (países, ciudades , etc...) debido a factores económicos. El modelo quiere representar que: a) la calidad de vida se mide en términos de un reparto equitativo de los recursos económicos de cada comunidad entre sus miembros, b) el flujo entre comunidades está provocado por la diferencia entre las calidades de vida de ambas poblaciones.

El modelo está descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \frac{dP_1(t)}{dt} &= -FN_{12}(t) & (2) \quad \frac{dP_2(t)}{dt} &= FN_{12}(t) \\
 (3) \quad CV_1(t) &= \frac{RE_1}{P_1(t)} & (4) \quad CV_2(t) &= \frac{RE_2}{P_2(t)} \\
 (5) \quad FN_{12}(t) &= TM (CV_2(t) - CV_1(t))
 \end{aligned}$$

Siendo:

CV1, calidad de vida de la comunidad 1
 CV2, calidad de vida de la comunidad 2
 FN12, flujo migratorio neto de la comunidad 1 hacia la 2
 P1, población de la comunidad 1
 P2, población de la comunidad 2
 RE1, recursos económicos mensuales de la comunidad 1
 RE2, recursos económicos mensuales de la comunidad 2
 TM, la tasa migratoria entre las dos comunidades

a) Justificar que el modelo propuesto es coherente con el enunciado y recoge bastante bien la interacción entre las dos comunidades.

b) Clasificar las variables y resumir en el correspondiente diagrama de Forrester el conjunto total de ecuaciones del modelo.

c) Suponiendo que: $RE1=RE2=1000000$ de euros/mes, $TM=1000$ personas personas/euro, la comunidad 1 está constituida por 100000 personas y la comunidad 2 por 50000 personas. Simular la evolución de las variables del modelo, durante al menos 15 meses, utilizando la aproximación de Euler con $\Delta t=1$ mes como intervalo de simulación y redondeo a un decimal en las calidades de vida.

d) En función de los resultados del apartado (c), o utilizando el conocimiento del modelo si no ha tenido tiempo para realizar la simulación, conteste de forma razonada a las siguientes preguntas:

- ¿cómo está distribuida la población después de año y medio?
- ¿por qué y cuándo se alcanza el estado estacionario?
- ¿existe alguna analogía entre este modelo y el principio físico de vasos comunicantes?
- ¿qué hubiera ocurrido si $RE1=1$ millón de euros/mes y $RE2=500000$ euros/mes?
- ¿qué hubiera ocurrido si $RE1=1$ millón de euros/mes y $RE2=250000$ de euros/mes?

e) En el modelo se ha supuesto que el flujo migratorio se produce instantáneamente. Teniendo en cuenta que la decisión de emigrar es personal y que puede venir afectada de un retraso de 2 meses. ¿Qué ecuaciones modificaría en el modelo para tenerlo en cuenta y cómo las aproximaría para simularlas?



OBSERVACIONES: Esta prueba consta de dos primeros ejercicios breves (2.5 puntos cada uno) y un tercer ejercicio (5 puntos), basado en el estudio más completo de un modelo. En los enunciados de estos ejercicios se ha intentado ser claro y conciso pero a veces, sobre todo en el tercer ejercicio, el enunciado es bastante largo. Se recomienda leer detenidamente cada enunciado, pues la comprensión de éste es un paso muy importante para contestar a los distintos apartados. Se ha intentado también que no todos los apartados de un ejercicio estén entrelazados, por lo que se recomienda afrontar cada apartado casi como si de un nuevo ejercicio se tratara.

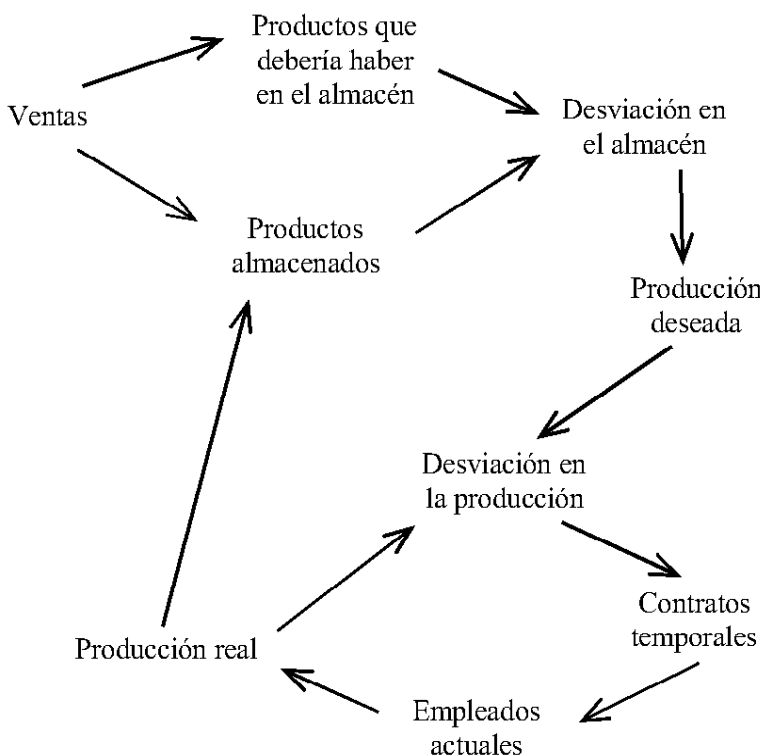
ASEGÚRESE QUE LE HAN ENTREGADO (GRAPADAS) TRES HOJAS
NO OLVIDE RELLENAR SUS DATOS PERSONALES EN TODAS LAS HOJAS QUE ENTREGUE
SE PERMITE EL USO DE CALCULADORA CIENTÍFICA SALVO QUE ÉSTA SEA PROGRAMABLE

1. Para analizar lo ocurrido en el almacén y en la plantilla de una pequeña fábrica, especializada

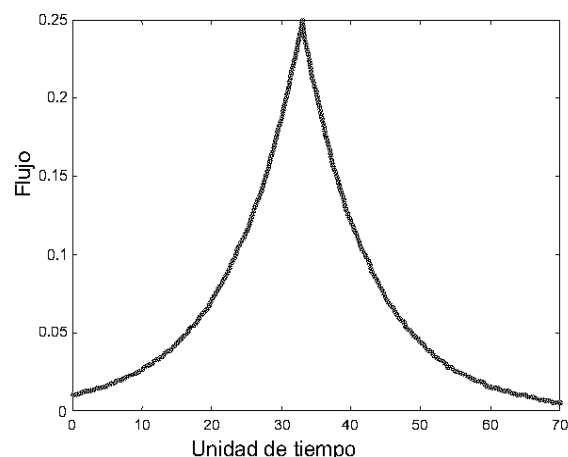
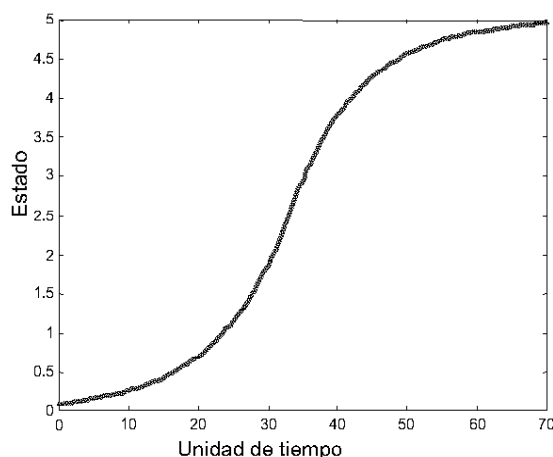
en un sólo producto, se ha construido el siguiente diagrama de influencias en el que faltan por incluir todos los signos y retrasos. Se pide:

a) Completar el diagrama de influencias, justificando de forma cualitativa cada una de las relaciones, sus signos y los retrasos que haya considerado necesarios.

b) ¿Un simple análisis cualitativo de los bucles serviría para explicar por qué la plantilla de la empresa y el almacén de productos han sufrido grandes fluctuaciones en los últimos años? Justifique la respuesta.



2. Las figuras muestran la evolución temporal de las variables (estado y flujo) de un bucle elemental de realimentación.



- a) ¿Qué tipo de relación debe existir entre el estado y el flujo para que el estado presente el crecimiento en S de la izquierda?
- b) Razonar sobre la estructura que tendría el modelo completo, trazando el correspondiente diagrama de Forrester.

3. Modelo “Precio de la vivienda”. Con el siguiente conjunto de ecuaciones se pretende predecir la evolución del precio de la vivienda en una gran ciudad durante los próximos años.

$$(1) \text{CNP}(t) = \text{TCP} \cdot \text{PT}(t) \quad ; \quad (2) \frac{d \text{PT}(t)}{dt} = \text{CNP}(t)$$

$$(3) \text{TCV}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \text{PV}(t) < 600 \\ 1 - 0.9 \frac{\text{PV}(t) - 600}{1200} & \text{si } 600 \leq \text{PV}(t) \leq 1800 \\ 0.1 & \text{si } \text{PV}(t) > 1800 \end{cases}$$

PV	TCV
0	1
600	1
1800	0.1
3000	0.1

$$(4) \text{DNV}(t) = (\text{TDV} \cdot \text{TCP} + \text{TEV}) \cdot \text{PT}(t) \quad ; \quad (5) \text{CV}(t) = \text{TCV}(t) \cdot \text{DV}(t)$$

$$(6) \frac{d \text{DV}(t)}{dt} = \text{DNV}(t) - \text{CV}(t) \quad ; \quad (7) \text{IPV}(t) = (\text{IPC} - \text{TGPV} \cdot \text{DV}(t)) \cdot \text{PV}(t)$$

$$(8) \frac{d \text{PV}(t)}{dt} = \text{IPV}(t)$$

Siendo:

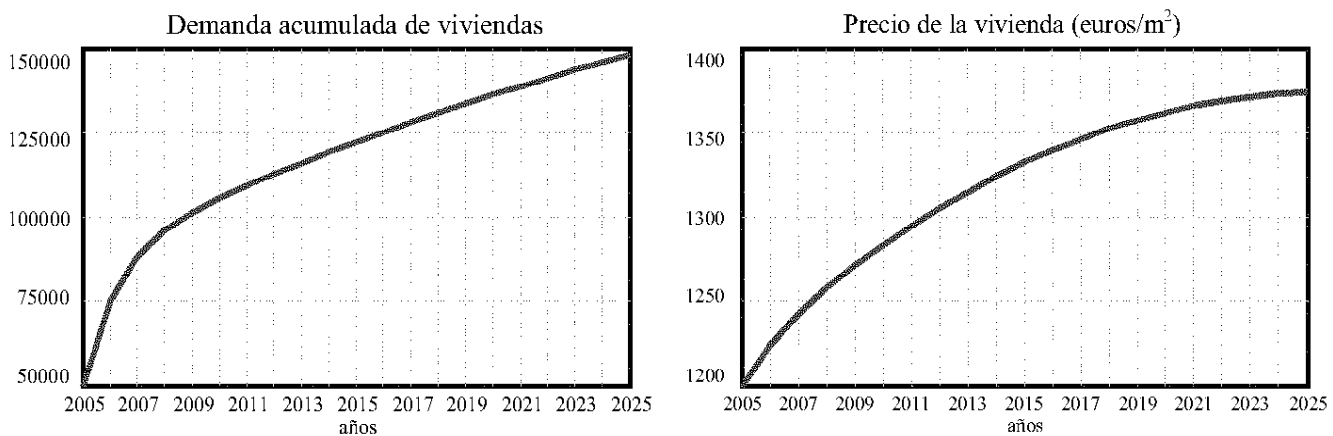
CNP : Crecimiento neto de la población	PV : Precio de la vivienda
CV : Compra de vivienda	TCP : Tasa de crecimiento neto de la población
DNV : Demanda de nuevas viviendas	TCV : Tasa de compra de vivienda
DV : Demanda acumulada de viviendas	TDV : Tasa normal de demanda de vivienda
IPC : Incremento de precios al consumo	TEV : Tasa de especulación en vivienda
IPV : Incremento del precio de la vivienda	TGPV : Tasa gubernamental sobre el precio de la vivienda
PT : Población total	

- a) La ecuación (3) modela una función no lineal, de la que también se adjunta su tabla, entre la tasa de compra de vivienda y el precio de la vivienda. Indica que por debajo del precio 600 euros/m², el total de personas demandantes de vivienda están dispuestos a comprarla, mientras que sólo el 10% de los demandantes están dispuestos a comprarla a un precio superior a 1800 euros/m², entre ambas cifras hay una relación lineal. La ecuación (4) refleja que la demanda de viviendas depende directamente del crecimiento neto de la población, es decir de aquella

población que necesita la primera vivienda, pero también de un porcentaje de la población que especula invirtiendo en vivienda. La ecuación (7) representa que la evolución del precio de la vivienda depende del IPC pero también de las medidas que el gobierno ha decidido para frenarlo, que son directamente proporcionales a la demanda acumulada de viviendas. ¿Le parecen adecuadas estas interpretaciones de las tres ecuaciones más representativas del modelo? ¿Y su presencia en el modelo? Enuncie de forma breve lo que representan el resto de ecuaciones.

b) Con independencia de que esté o no esté de acuerdo con el anterior conjunto de ecuaciones, clasifique las variables del modelo y construya su diagrama de Forrester.

c) Suponiendo que $TCP=0.01$, $TDV=0.25$, $TEV=0.05$, $TGPV=0.2 \cdot 10^{-6}$, $IPC=0.03$. Compruebe que si la simulación arranca en el 2005, con una población inicial de 1 millón de personas, $PT(2005)=10^6$, con una demanda acumulada de 50000 viviendas, $DV(2005)=0.5 \cdot 10^5$, y un precio de la vivienda de 1200 euros/m², $PV(2005)=1200$, el precio y la demanda acumulada de viviendas evolucionan anualmente ($\Delta t=1$) tal como se muestra en las figuras. Se aconseja no redondear y realizar al menos las tres primeras iteraciones.



d) Rehaga los cálculos del apartado anterior que estime necesarios para determinar lo que hubiera ocurrido con el precio y la demanda acumulada de viviendas si el gobierno no hubiera establecido ninguna medida de control, es decir con $TGPV=0$. Haga una comparación cualitativa de resultados.

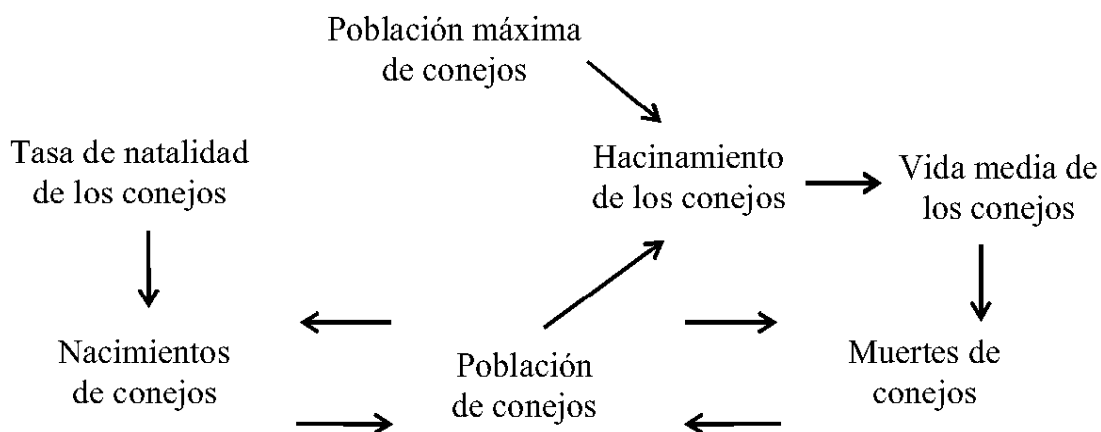


OBSERVACIONES: Esta prueba consta de dos primeros ejercicios breves (2.5 puntos cada uno) y un tercer ejercicio (5 puntos), basado en el estudio más completo de un modelo. En los enunciados de estos ejercicios se ha intentado ser claro y conciso pero a veces, sobre todo en el tercer ejercicio, el enunciado es bastante largo. Se recomienda leer detenidamente cada enunciado, pues la comprensión de éste es un paso muy importante para contestar a los distintos apartados. Se ha intentado también que no todos los apartados de un ejercicio estén entrelazados, por lo que se recomienda afrontar cada apartado casi como si de un nuevo ejercicio se tratara.

ASEGÚRESE QUE LE HAN ENTREGADO (GRAPADAS) TRES HOJAS
NO OLVIDE RELLENAR SUS DATOS PERSONALES EN TODAS LAS HOJAS QUE ENTREGUE
SE PERMITE EL USO DE CALCULADORA CIENTÍFICA SALVO QUE ÉSTA SEA PROGRAMABLE

1. La figura muestra un diagrama de influencias para estudiar la evolución de una población de conejos. En este diagrama se ha supuesto que por diversas razones de supervivencia, la vida media de los conejos es una variable (función no lineal) del hacinamiento (cociente entre la población actual y la máxima población). Se pide:

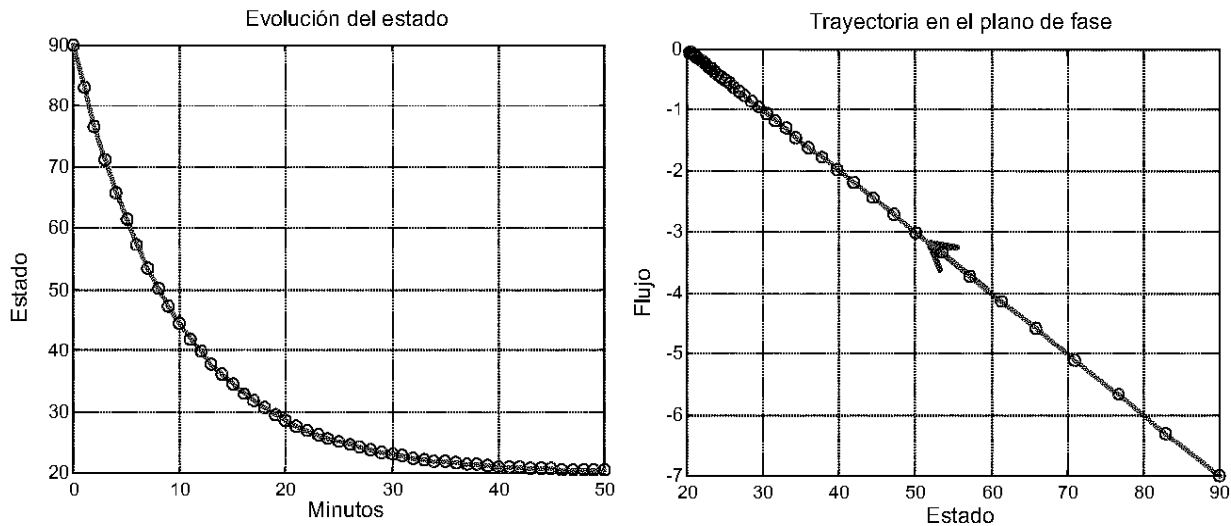
- Completar el diagrama, justificando de forma cualitativa cada una de las relaciones y los signos.
- Establecer un conjunto de relaciones análogas para la evolución de una población de zorros y combinarlas con las de la figura en un único diagrama de influencias. Suponer para ello que la supervivencia de los zorros depende únicamente de la existencia de conejos y que cada zorro necesita un número de conejos al año para poder sobrevivir. Justifique cualquier modificación que haya hecho en el diagrama original de la población de conejos, cualquier variable que utilice y todas las relaciones entre las dos poblaciones.



2. En la figura de la izquierda se muestra el comportamiento temporal de la variable de estado de un sistema y en la figura de la derecha se muestra la trayectoria en el plano de fase.

- Suponiendo que el sistema es lineal, ¿qué estructura elemental puede tener este comportamiento?
- ¿Cuál puede ser su diagrama de Forrester?
- ¿Qué valores numéricos tienen los parámetros de este sistema para que el estado y el flujo evolucionen de esta forma?

d) Asigne nombres concretos a cada una de las variables del modelo si lo que se quiere representar es el enfriamiento que experimenta una taza de leche desde que se saca de un microondas y se expone a la temperatura ambiente de una habitación.



3. Modelo de “Ventas de reproductores MP3”. Una empresa pretende modelar el proceso de ventas en una determinada población de su producto estrella: los reproductores MP3 portátiles. Para ello propone el siguiente conjunto de ecuaciones, donde inicialmente sólo un subconjunto de la población dispone del reproductor MP3 y a partir de la propaganda que éste realiza del producto, el resto de vecinos lo empiezan a comprar.

$$(1) \quad \frac{d \text{PSRP}(t)}{dt} = -\text{FV}(t) \qquad (2) \quad \frac{d \text{PCR}(t)}{dt} = \text{FV}(t)$$

$$(3) \quad \text{FV}(t) = \frac{\text{PCR}(t) \text{ PSRP}(t) \text{ NED} \text{ EPC}}{\text{PT}}$$

Siendo:

EPC: Porcentaje de encuentros diarios que propagan la compra del reproductor MP3
 FV: Flujo de ventas del reproductor MP3
 NED: Número de encuentros diarios entre personas que tienen el reproductor MP3 y personas que no lo tienen
 PCR: Personas que tienen el reproductor MP3
 PSRP: Personas que no tienen el reproductor MP3
 PT: Población total

a) Explicar cualitativamente el significado de la ecuación (3) del modelo propuesto. Hacer una clasificación razonada de las variables, especificando sus unidades, y dibujar el correspondiente diagrama de Forrester

b) Obtener los valores de las variables del modelo durante al menos 10 días, considerando que:

- La unidad de tiempo es el día.
- La población total se mantiene constante, $PT=5000$, durante todo el tiempo que dura la simulación.
- El número de encuentros diarios (NED) es igual a 10.
- Un 5% de los encuentros diarios provocan la compra del producto ($EPC=0.05$).
- Inicialmente sólo hay 100 vecinos que tienen reproductor de MP3.
- El flujo de ventas de los reproductores MP3 debe redondearse al entero menor.

c) Considerando los mismos parámetros que en el apartado (b), determinar el número mínimo de personas que deberían tener el reproductor de MP3 en el instante inicial para que se produzca alguna nueva venta.

d) Haya o no haya tenido tiempo suficiente para realizar todos los cálculos del apartado (b), trace cualitativamente la evolución que seguirán las variables del modelo. ¿En qué arquetipo de los estudiados se puede encuadrar este modelo? ¿Qué variable actúa como factor limitador del crecimiento en las ventas de reproductores MP3? ¿En qué tipo de acciones debería pensar la empresa para seguir vendiendo reproductores?



OBSERVACIONES: Esta prueba consta de dos primeros ejercicios breves (2.5 puntos cada uno) y un tercer ejercicio (5 puntos), basado en el estudio más completo de un modelo. En los enunciados de estos ejercicios se ha intentado ser claro y conciso pero a veces, sobre todo en el tercer ejercicio, el enunciado es bastante largo. Se recomienda leer detenidamente cada enunciado, pues la comprensión de éste es un paso muy importante para contestar a los distintos apartados. Se ha intentado también que no todos los apartados de un ejercicio estén entrelazados, por lo que se recomienda afrontar cada apartado casi como si de un nuevo ejercicio se tratara.

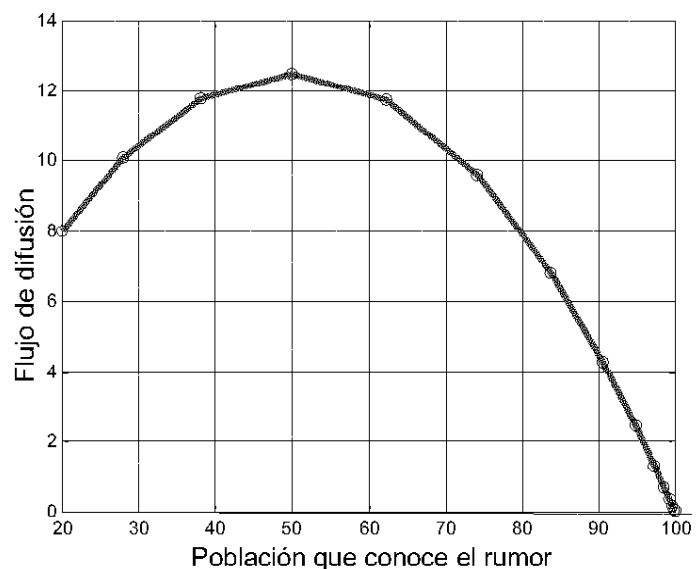
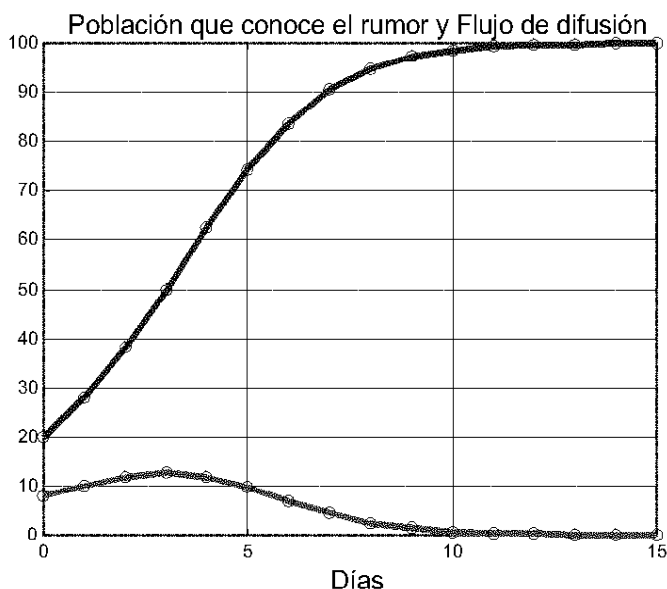
ASEGÚRESE QUE LE HAN ENTREGADO TRES HOJAS

NO OLVIDE RELLENAR SUS DATOS PERSONALES EN TODAS LAS HOJAS QUE ENTREGUE
SE PERMITE EL USO DE CALCULADORA CIENTÍFICA SALVO QUE ÉSTA SEA PROGRAMABLE

1. La empresa COMPUTER se dedica al montaje y venta de computadores, además de prestar servicio técnico a sus compradores. Para ello cuenta con un servicio técnico experimentado. COMPUTER vislumbra la posibilidad de aumentar las ventas sustancialmente ya que sus productos gozan de una muy buena reputación, y decide lanzar una campaña publicitaria. Al poco tiempo los pedidos empiezan a aumentar y para hacer frente a la gran demanda la empresa contrata nuevos técnicos. Sin embargo, al no ser éstos tan productivos como los anteriores, se forma y se agranda una cola de espera de clientes que provoca un descenso en el número de pedidos.

- Dibujar un diagrama de influencias que permita analizar la evolución de los pedidos de la empresa COMPUTER. Justifique de manera cualitativa cada una de las influencias y sus signos.
- Analizar brevemente los diferentes bucles que aparezcan en el diagrama y comente si encuentra alguna similitud con los arquetipos estudiados en la asignatura.

2. En la figura de la izquierda se muestra el comportamiento temporal de las dos variables fundamentales (la Población que conoce un rumor y el Flujo de difusión) en el modelo de difusión de un cierto rumor en una población finita. Y en la figura de la derecha se muestra la relación que existe entre ellas.



- a) ¿A qué arquetipo de los estudiados corresponde el comportamiento de la variable de estado? Establecer el conjunto de ecuaciones que pueden representar a este modelo, especificando el significado y las unidades de cada variable.
- b) Utilizar la información gráfica de las figuras para determinar los parámetros que definen este modelo.

3. Modelo “Población de ballenas”

El modelo que se presenta en este ejercicio fue propuesto en 1978 por Jeffers para analizar hasta que punto se podía explotar una población de ballenas sin que la especie desapareciera. Pero se puede utilizar para modelar cualquier explotación ganadera o piscifactoría con el ajuste oportuno de parámetros. En el modelo se hacen las siguientes hipótesis:

- Para simplificar la simulación, se considera únicamente la población de ballenas hembras y dentro de ésta tres grupos (jóvenes, adultas y viejas), basado en el supuesto de que la proporción machos/hembras es constante a lo largo de los años y es la misma en todos los grupos y por tanto en la población total de ballenas.
- Las ballenas jóvenes alcanzan la madurez aproximadamente a los 5 ó 6 años de edad, y la expectativa de vida natural es de aproximadamente 50 años. De manera que los tres grupos en los que se clasifican las ballenas corresponden a: ballenas jóvenes = ballenas con edad comprendida entre 0 y 4 años, ballenas adultas = ballenas con edad comprendida entre 5 y 12 años, y ballenas viejas = ballenas con edad comprendida entre 13 y 50 años.
- En ausencia de explotación, la tasa de supervivencia anual para la población es de aproximadamente el 89% en los 12 primeros años y del 82% en los siguientes.
- Las ballenas jóvenes no tienen capacidad para procrear, pero sí las adultas y las viejas con unas tasas de fecundidad anual del 20.5% y del 22.5% respectivamente sobre la población que forma su grupo.
- Cada año madura el 25% de la población de ballenas jóvenes.
- Cada año envejece el 12.5% de la población de ballenas adultas.
- Los tres grupos de población están expuestos a la misma explotación (sacrificio) y ésta se realiza con un factor de proporcionalidad F.
- La unidad de tiempo que conviene a la simulación es el año.

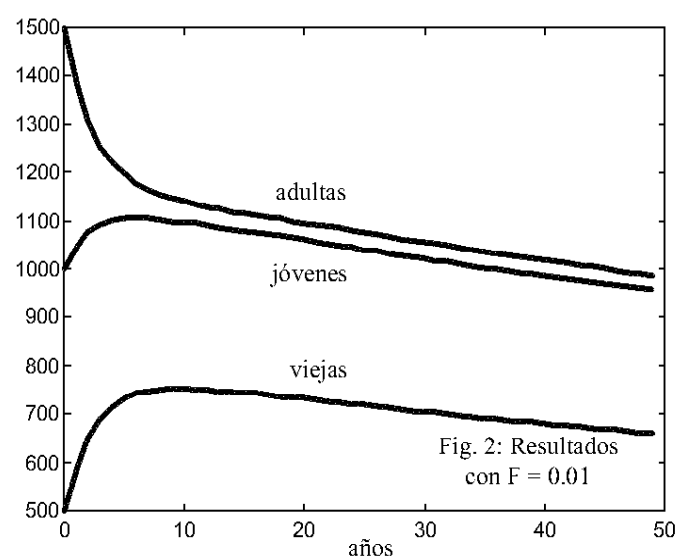
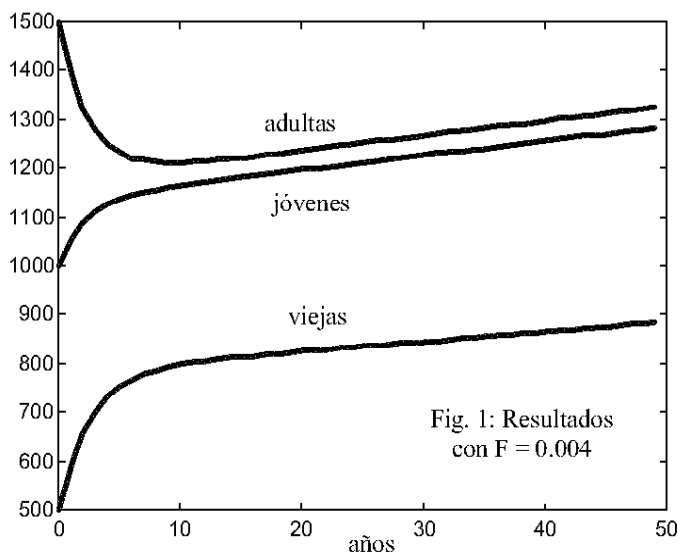
- a) Justificar que con las hipótesis anteriores, se pueden establecer las siguientes ecuaciones para las variaciones de población en los tres grupos de ballenas

$$\frac{d \text{ juvenes}(t)}{dt} = 0.205 \text{ adultas}(t) + 0.225 \text{ viejas}(t) - (0.25 + 0.11 + F) \text{ juvenes}(t)$$

$$\frac{d \text{ adultas}(t)}{dt} = 0.25 \text{ juvenes}(t) - (0.125 + 0.11 + F) \text{ adultas}(t)$$

$$\frac{d \text{ viejas}(t)}{dt} = 0.125 \text{ adultas}(t) - (0.18 + F) \text{ viejas}(t)$$

- b) Expresar mediante el correspondiente diagrama de Forrester las tres ecuaciones que definen el modelo. Indicar de forma clara la nomenclatura utilizada para las variables.
- c) Comprobar, simulando al menos los diez primeros años, a partir de una población inicial de 1000 ballenas jóvenes, 1500 adultas y 500 viejas, que si el factor de explotación $F = 0.004$ todos los grupos presentan un crecimiento mantenido de población (véase resultados de la figura 1), mientras que si $F = 0.01$ todos los grupos presentan un decrecimiento mantenido de población y por tanto desaparecerán con los años (véase resultados de la figura 2). Observación: en todos los grupos de población se ha redondeado al menor número entero durante la simulación.
- d) En función de los resultados de las figuras 1 y 2 es lógico esperar que existe un factor de explotación F para el que, independientemente de las poblaciones iniciales, se alcanza un equilibrio (estado estacionario) en los tres grupos de población. ¿Sabría usted indicar un procedimiento analítico para encontrar este valor de F ?

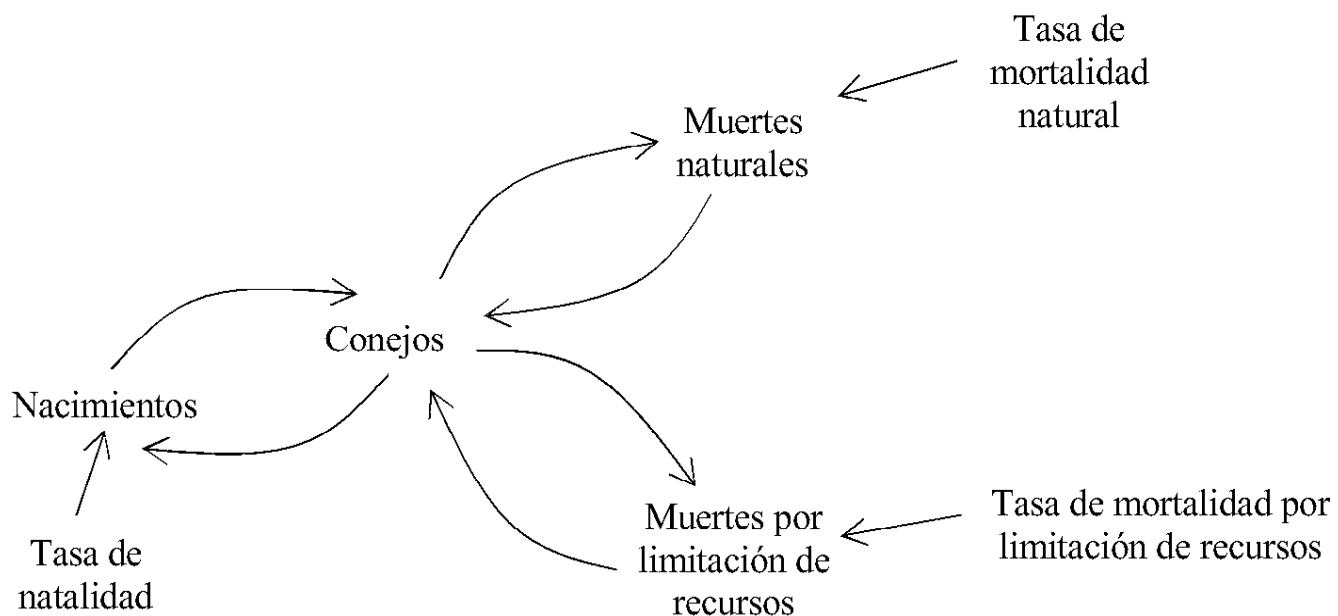




OBSERVACIONES: Esta prueba consta de dos primeros ejercicios breves (2.5 puntos cada uno) y un tercer ejercicio (5 puntos), basado en el estudio más completo de un modelo. En los enunciados de estos ejercicios se ha intentado ser claro y conciso pero a veces, sobre todo en el tercer ejercicio, el enunciado es bastante largo. Se recomienda leer detenidamente cada enunciado, pues la comprensión de éste es un paso muy importante para contestar a los distintos apartados. Se ha intentado también que no todos los apartados de un ejercicio estén entrelazados, por lo que se recomienda afrontar cada apartado casi como si de un nuevo ejercicio se tratara.

ASEGÚRESE QUE LE HAN ENTREGADO TRES HOJAS
NO OLVIDE RELLENAR SUS DATOS PERSONALES EN TODAS LAS HOJAS QUE ENTREGUE
SE PERMITE EL USO DE CALCULADORA CIENTÍFICA SALVO QUE ÉSTA SEA PROGRAMABLE

1. La figura muestra un diagrama de influencias entre ciertas variables de una población de conejos, en el que se han omitido intencionadamente los signos de todas las influencias.



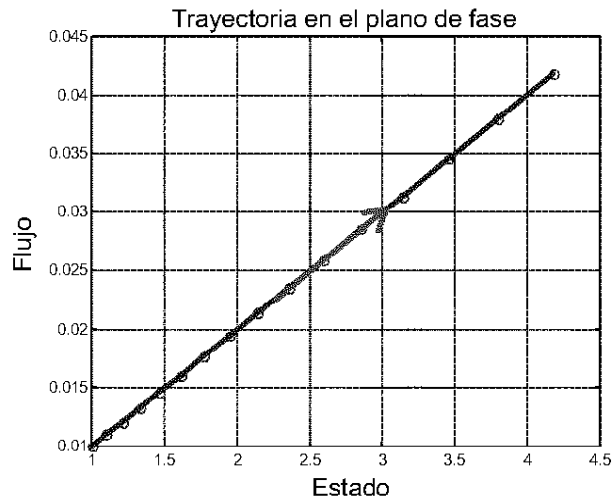
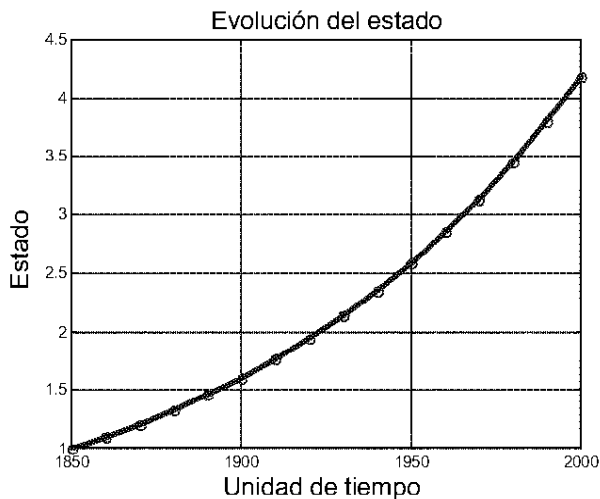
- Completar el diagrama, justificando de forma cualitativa los signos de cada una de las influencias, y comentar la naturaleza de sus bucles elementales. Observación: utilice si le es más cómodo abreviaturas para el nombre de las variables.
- Sabiendo que la población de conejos afecta cuadráticamente en las muertes por falta de recursos y que el resto de relaciones son las típicas de cualquier dinámica poblacional. Proponer un conjunto de ecuaciones para modelar la población de conejos.
- ¿Es cierto que esta población de conejos sólo puede evolucionar a una situación de equilibrio (función de las tres tasas)? Es decir que si la población inicial es menor (mayor) que ese valor, crecerá (decrecerá) asintóticamente a él. ¿Cuál es ese valor?

2. Las figuras muestran la evolución del estado y la trayectoria en el plano de fase de un bucle elemental de realimentación positiva. En ambas gráficas están indicados, mediante círculos, los valores de las variables en cada unidad de tiempo y se incluye con trazo continuo la unión de todos ellos.

- Determinar sobre ambas gráficas o sobre la gráfica más adecuada:
 - El valor de la tasa de crecimiento k .

- El tiempo de duplicación, expresado en unidades de tiempo.

b) Si lo que se quiere representar con este modelo es la evolución de la población mundial, ¿qué representa cada una de las variables en este caso particular?, ¿cómo interpreta usted los resultados de la figura de la izquierda?



3. Modelo simplificado “Flujo migratorio”. En este ejercicio se presenta un modelo simplificado del flujo migratorio entre dos comunidades (países, ciudades, etc...) debido a factores económicos. El modelo quiere representar que: a) la calidad de vida se mide en términos de un reparto equitativo de los recursos económicos de cada comunidad entre sus miembros, b) el flujo entre comunidades está provocado por la diferencia entre las calidades de vida de ambas poblaciones.

El modelo está descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{dP_1(t)}{dt} &= -FN_{12}(t) & (2) \quad \frac{dP_2(t)}{dt} &= FN_{12}(t) \\ (3) \quad CV_1(t) &= \frac{RE_1}{P_1(t)} & (4) \quad CV_2(t) &= \frac{RE_2}{P_2(t)} \\ (5) \quad FN_{12}(t) &= TM (CV_2(t) - CV_1(t)) \end{aligned}$$

Siendo:

CV1, calidad de vida de la comunidad 1
CV2, calidad de vida de la comunidad 2
FN12, flujo migratorio neto de la comunidad 1 hacia la 2
P1, población de la comunidad 1
P2, población de la comunidad 2
RE1, recursos económicos mensuales de la comunidad 1
RE2, recursos económicos mensuales de la comunidad 2
TM, la tasa migratoria entre las dos comunidades

a) Justificar que el modelo propuesto es coherente con el enunciado y recoge bastante bien la interacción entre las dos comunidades.

b) Clasificar las variables y resumir en el correspondiente diagrama de Forrester el conjunto total de ecuaciones del modelo.

c) Suponiendo que: $RE1=RE2=1000000$ de euros/mes, $TM=1000$ personas personas/euro, la comunidad 1 está constituida por 100000 personas y la comunidad 2 por 50000 personas. Simular la evolución de las variables del modelo, durante al menos 15 meses, utilizando la aproximación de Euler con $\Delta t=1$ mes como intervalo de simulación y redondeo a un decimal en las calidades de vida.

d) En función de los resultados del apartado (c), o utilizando el conocimiento del modelo si no ha tenido tiempo para realizar la simulación, conteste de forma razonada a las siguientes preguntas:

- ¿cómo está distribuida la población después de año y medio?
- ¿por qué y cuándo se alcanza el estado estacionario?
- ¿existe alguna analogía entre este modelo y el principio físico de vasos comunicantes?
- ¿qué hubiera ocurrido si $RE1=1$ millón de euros/mes y $RE2=500000$ euros/mes?
- ¿qué hubiera ocurrido si $RE1=1$ millón de euros/mes y $RE2=250000$ de euros/mes?

e) En el modelo se ha supuesto que el flujo migratorio se produce instantáneamente. Teniendo en cuenta que la decisión de emigrar es personal y que puede venir afectada de un retraso de 2 meses. ¿Qué ecuaciones modificaría en el modelo para tenerlo en cuenta y cómo las aproximaría para simularlas?



ESCUELA DE INFORMÁTICA Asignatura: INGENIERÍA DE SISTEMAS
INFORMÁTICA DE SISTEMAS – Códigos: 533066 (Plan Nuevo) 403110 (Plan Antiguo)
INFORMÁTICA DE GESTIÓN – Códigos: 543068 (Plan Nuevo) 413061 (Plan Antiguo)
Prueba Presencial. Primera Vuelta. Enero 2007. Duración: 2 horas.

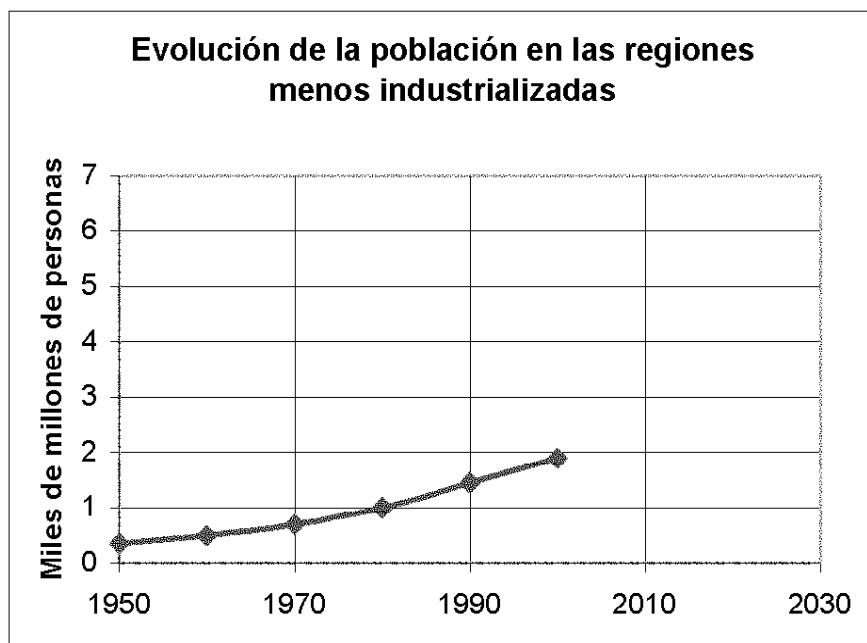
OBSERVACIONES: Esta prueba consta de dos primeros ejercicios breves (2.5 puntos cada uno) y un tercer ejercicio (5 puntos), basado en el estudio más completo de un modelo. En los enunciados de estos ejercicios se ha intentado ser claro y conciso pero a veces, sobre todo en el tercer ejercicio, el enunciado es bastante largo. Se recomienda leer detenidamente cada enunciado, pues la comprensión de éste es un paso muy importante para contestar a los distintos apartados. Se ha intentado también que no todos los apartados de un ejercicio estén entrelazados, por lo que se recomienda afrontar cada apartado casi como si de un nuevo ejercicio se tratara.

ASEGÚRESE QUE LE HAN ENTREGADO DOS HOJAS

NO OLVIDE RELLENAR SUS DATOS PERSONALES EN TODAS LAS HOJAS QUE ENTREGUE
SE PERMITE EL USO DE CALCULADORA CIENTÍFICA SALVO QUE ÉSTA SEA PROGRAMABLE

1. Los Hantavirus son agentes infecciosos, transmitidos por los ratones, que pueden causar graves enfermedades en la población humana. Dibujar un diagrama de influencias que modele la propagación de la infección por Hantavirus en una población de ratones, bajo las hipótesis de que los dos grupos de población (ratones susceptibles y ratones infectados) están afectados además de por el contagio, por las dinámicas típicas de cualquier población: nacimientos (todos los ratones nacen sanos, susceptibles de ser infectados), muertes naturales con la misma tasa de mortalidad en los dos grupos de población pues el Hantavirus no afecta a los ratones y muertes como consecuencia de la limitación de recursos.

2. La siguiente gráfica muestra la evolución de la población en las regiones menos industrializadas durante el último medio siglo (son datos publicados en el libro “Los límites del crecimiento: 30 años después” de D. Meadows, J. Rangers y D. Meadows). ¿A qué tipo de arquetipo cree que responde esta evolución? ¿Qué función matemática y/o modelo dinámico emplearía para predecir los valores de esa población en los próximos 30 años? No olvide justificar todas sus respuestas.



3. Modelo “Capital de una empresa”. Las tres ecuaciones siguientes describen la evolución del capital de una empresa en función de los beneficios netos que producen las ventas y de las inversiones que ésta realiza para mantener la producción.

$$(1) \text{BNV}(t) = \text{TB} \cdot \text{V}(t) \quad ; \quad (2) \text{INV}(t) = \text{TINV} \cdot \text{C}(t) \quad ; \quad (3) \frac{d\text{C}(t)}{dt} = \text{BNV}(t) - \text{INV}(t)$$

Siendo

BNV : Beneficios netos de las ventas	TB : Tasa de beneficios en las ventas
C : Capital de la empresa	TINV : Tasa de inversiones de la empresa
INV : Inversiones de la empresa	V : Ventas de la empresa

a) Suponiendo que la empresa trabaja con una tasa de beneficios del 40% (TB=0.4) y dedica el 20% del capital para sus inversiones mensuales (TINV=0.2), ¿qué capital necesita la empresa para atender unas ventas estables de 1 millón de euros/mes? Predecir, sin simular, lo que ocurriría con el capital de la empresa si las ventas cambiaran bruscamente a 0.8 millones de euros/mes y se mantuvieran a ese nuevo valor el resto de los meses, ¿qué nuevo valor alcanzaría el capital de la empresa? y ¿cuántos meses pasarían hasta entonces?

b) La dirección de la empresa ha decidido incorporar una política de incentivo entre los empleados con la esperanza de que la incentivación tendrá una influencia directa en las ventas. Esta política y las consecuencias esperadas se han incorporado en el modelo modificando la ecuación (3) y añadiendo otras tres ecuaciones, tal como sigue:

$$(3) \frac{d\text{C}(t)}{dt} = \text{BNV}(t) - \text{INV}(t) - \text{INC}(t) \quad ; \quad (4) \text{INC}(t) = \max (\text{TINC} (\text{CD} - \text{C}(t)) , 0)$$

$$(5) \frac{d\text{INCA}(t)}{dt} = \text{INC}(t) \quad ; \quad (6) \text{V}(t) = \text{VE}(t) + \text{TV} \cdot \text{INCA}(t)$$

Siendo

CD : Capital deseado	TINC : Tasa de los incentivos a los empleados
INC : Incentivos a los empleados	TV : Tasa de los incentivos sobre las ventas
INCA : Incentivos acumulados por los empleados	VE : Ventas estimadas
max : Función máximo	

Clasifique todas las variables del modelo y construya su diagrama de Forrester. Justificar cualitativamente si esta política de incentivación permitirá a la empresa mantener el capital cercano al valor deseado con independencia de que las ventas puedan variar (aumentar o disminuir).

c) Suponiendo que $\text{C}(0)=\text{CD}=3$, $\text{VE}(0)=1.5$, $\text{TB}=0.4$, $\text{TINV}=0.2$, $\text{TINC}=0.05$, $\text{TV}=1$, $\text{INCA}(0)=0$, y que la unidad de tiempo es el mes, simular al menos 15 meses para analizar la evolución del capital de la empresa si las ventas estimadas caen en el primer mes al valor $\text{VE}(1)=1.25$ y permanecen a ese valor el resto de los meses. Puesto que el capital viene expresado en millones de euros, se recomienda redondear con tres decimales, es decir a los miles de euros. Justifique si los resultados obtenidos están de acuerdo con lo que ha respondido en el apartado (b).



OBSERVACIONES: Esta prueba consta de dos primeros ejercicios breves (2.5 puntos cada uno) y un tercer ejercicio (5 puntos), basado en el estudio más completo de un modelo. En los enunciados de estos ejercicios se ha intentado ser claro y conciso pero a veces, sobre todo en el tercer ejercicio, el enunciado es bastante largo. Se recomienda leer detenidamente cada enunciado, pues la comprensión de éste es un paso muy importante para contestar a los distintos apartados. Se ha intentado también que no todos los apartados de un ejercicio estén entrelazados, por lo que se recomienda afrontar cada apartado casi como si de un nuevo ejercicio se tratara.

ASEGÚRESE QUE LE HAN ENTREGADO TRES HOJAS

NO OLVIDE RELLENAR SUS DATOS PERSONALES EN TODAS LAS HOJAS QUE ENTREGUE
SE PERMITE EL USO DE CALCULADORA CIENTÍFICA SALVO QUE ÉSTA SEA PROGRAMABLE

1. Se pretende modelar la evolución semanal de las bajas laborales en una determinada población activa (la población que realiza algún tipo de actividad laboral). Se sabe que la mayoría de las personas que están de baja acaban reincorporándose al trabajo, cuando reciben el alta, mientras que otras alcanzan la incapacidad laboral. El modelo debe incluir al menos las siguientes variables:

AL : Altas laborales

BD : Bajas definitivas

BL : Bajas laborales

DMB : Duración media de la baja

IPA : Incorporaciones a la población activa

PA : Población activa

PBL : Población de baja laboral

PI : Población incapacitada para el trabajo

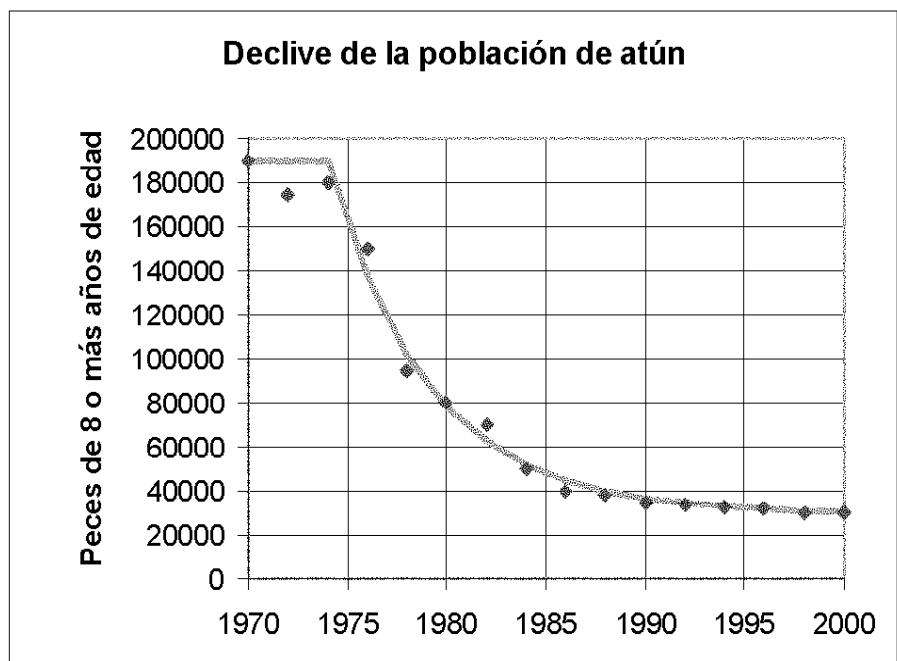
TBD : Tasa de bajas definitivas entre la población de baja laboral

TBL : Tasa de bajas laborales entre la población activa

a) Proponer un diagrama de influencias para el modelo, justificando de forma cualitativa cada una de las relaciones y sus signos.

b) Analizar todos los bucles del diagrama y razonar si, a partir de ellos, es posible predecir el comportamiento (estable o inestable) de este modelo.

2. Las marcas de la siguiente gráfica muestran la evolución de la población de atún rojo en el Atlántico occidental (son datos publicados en el libro “Los límites del crecimiento: 30 años después” de D. Meadows, J. Rangers y D. Meadows). Con trazo continuo se muestra la evolución que habría tenido de responder exactamente a un arquetipo elemental. ¿Qué tipo de arquetipo cree que se ha utilizado para modelar este fenómeno? ¿Qué valores tienen los parámetros utilizados? No olvide justificar todas sus respuestas.



3. Modelo “Bares de no fumadores”. Después de la entrada en vigor de la Ley Antitabaco, el Estado ha concedido una partida presupuestaria anual para ayudar a los bares a realizar las remodelaciones pertinentes y poder adaptarse a las nuevas exigencias de dicha Ley. En este ejercicio se presenta un modelo simplificado para simular el flujo que se producirá en la tipología de los bares (la Ley sólo contempla dos tipos de bares). El modelo pretende reflejar que: a) los ingresos que recibe un bar, procedentes de la partida presupuestaria, son consecuencia de un reparto equitativo entre todos los bares de su categoría, b) el cambio de tipología de un bar vendrá provocado por la diferencia entre los ingresos que pueda recibir estando en una u otra categoría.

$$(1) \quad \frac{dBF(t)}{dt} = -FNFNF(t)$$

$$(2) \quad \frac{dBNF(t)}{dt} = FNFNF(t)$$

$$(3) \quad IDPBF(t) = \frac{DPBF}{BF(t)}$$

$$(4) \quad IDPBNF(t) = \frac{DPBNF}{BNF(t)}$$

$$(5) \quad FNFNF(t) = TC (IDPBNF(t) - IDPBF(t))$$

Siendo:

BF, bares de fumadores

BNF, bares de no fumadores

FNFNF, flujo neto de bares de fumadores hacia bares de no fumadores

IDPBF, ingresos procedentes de la dotación presupuestaria para bares de fumadores

IDPBNF, ingresos procedentes de la dotación presupuestaria para bares de no fumadores

DPBF, dotación presupuestaria para los bares de fumadores

DPBNF, dotación presupuestaria para los bares de no fumadores

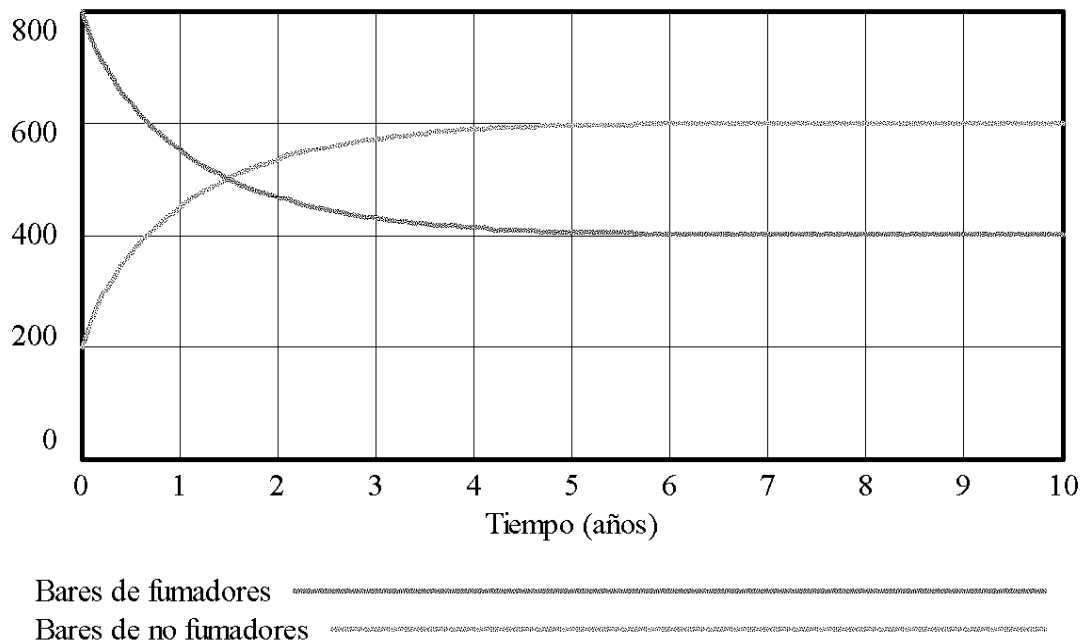
TC, tasa de cambio entre los dos tipos de bares

a) Justificar que el modelo propuesto es coherente con el enunciado y reflejarlo en el correspondiente diagrama de influencias.

b) Clasificar las variables y resumir en un diagrama de Forrester el conjunto total de ecuaciones del modelo.

c) Sabiendo que: DPBF = 800000 euros/año, DPBNF = 1200000 euros/año, TC=0.1 bares bares/euros, BF(0)=800 bares y BNF(0)=200 bares. Simular la evolución de las variables del modelo, durante al menos 2 años, utilizando la aproximación de Euler con $\Delta t=0.1$ año como

intervalo de simulación y redondeo al entero menor en la variable de flujo. La gráfica siguiente le puede servir para comprobar si ha realizado correctamente la simulación.



d) En función de los resultados del apartado (c), o utilizando el conocimiento del modelo, conteste de forma razonada a las siguientes preguntas:

- ¿por qué y cuando se alcanza el estado estacionario?
- ¿existe alguna analogía entre este modelo y el principio físico de vasos comunicantes?
- ¿qué hubiera ocurrido si $DPBF = 1600000$ euros/año y $DPBNF = 400000$ euros/año?
- ¿qué hubiera ocurrido si $DPBF = DPBNF = 1000000$ euros/año?

e) En el modelo se ha supuesto que el cambio de la tipología de bar se produce instantáneamente. Teniendo en cuenta que la decisión de cambiar de tipo de bar es personal, depende del dueño, y ésta puede venir afectada de un retraso de 0.5 años, ¿qué ecuaciones modificaría en el modelo para tenerlo en cuenta?



ESCUELA DE INFORMÁTICA Asignatura: INGENIERÍA DE SISTEMAS
INFORMÁTICA DE SISTEMAS – Códigos: 533066 (Plan Nuevo) 403110 (Plan Antiguo)
INFORMÁTICA DE GESTIÓN – Códigos: 543068 (Plan Nuevo) 413061 (Plan Antiguo)
Prueba Presencial. ORIGINAL. Septiembre 2007. Duración: 2 horas.

OBSERVACIONES: Esta prueba consta de dos primeros ejercicios breves (2.5 puntos cada uno) y un tercer ejercicio (5 puntos), basado en el estudio más completo de un modelo. En los enunciados de estos ejercicios se ha intentado ser claro y conciso pero a veces, sobre todo en el tercer ejercicio, el enunciado es bastante largo. Se recomienda leer detenidamente cada enunciado, pues la comprensión de éste es un paso muy importante para contestar a los distintos apartados. Se ha intentado también que no todos los apartados de un ejercicio estén entrelazados, por lo que se recomienda afrontar cada apartado casi como si de un nuevo ejercicio se tratara.

ASEGÚRESE QUE LE HAN ENTREGADO TRES HOJAS

NO OLVIDE RELLENAR SUS DATOS PERSONALES EN TODAS LAS HOJAS QUE ENTREGUE
SE PERMITE EL USO DE CALCULADORA CIENTÍFICA SALVO QUE ÉSTA SEA PROGRAMABLE

1. Se pretende analizar el crecimiento sostenido del precio de la gasolina en los últimos años mediante un modelo simple, que incluya al menos las siguientes variables:

- Precio del barril de petróleo (PBP)	- Litros de gasolina que se obtienen de un barril de petróleo (LGBP)
- Costes de producción (CP)	- Precio por litro de gasolina producida (PLGP)
- Costes de distribución (CD)	- Impuestos directos sobre el litro de gasolina (IDLG)
- Costes de expedición (CE)	- Precio final del litro de gasolina (PFLG)

a) Proponer un diagrama de influencias para este modelo, justificando cada una de las influencias y los signos. Observaciones: 1) si lo desea puede utilizar el nombre abreviado de la variables, 2) suponga que en el concepto costes están incluidos los beneficios del agente (productor, distribuidor o expendedor, respectivamente).

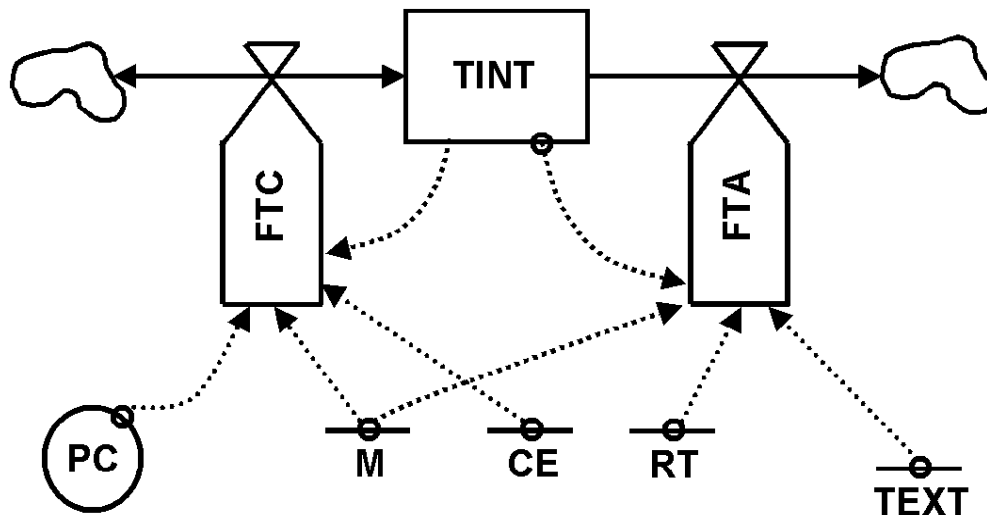
b) ¿Cómo explicaría de forma cualitativa el crecimiento sostenido del precio de la gasolina a partir del diagrama del apartado (a)?

c) Combinar en el diagrama anterior un mecanismo de regulación, capaz de mantener el precio de la gasolina entre un máximo y un mínimo.

2. La siguiente ecuación diferencial describe la dinámica de la temperatura $TINT(t)$ en el interior de una casa que alberga una masa de aire M con calor específico CE prácticamente constante. La casa posee un sistema de climatización con una potencia variable $PC(t)$ que se emplea en aumentar o disminuir la temperatura interior y en vencer las pérdidas debidas a que el aislamiento térmico de la casa no es perfecto. Estas pérdidas son directamente proporcionales a la diferencia con la temperatura exterior $TEXT(t)$ e inversamente proporcionales a la resistencia térmica RT de la casa.

$$\frac{dTINT(t)}{dt} = \frac{1}{MCE} PC(t) - \frac{1}{MCE RT} (TINT(t) - TEXT(t))$$

a) Tomando como referencia el siguiente diagrama de Forrester (intencionadamente erróneo), donde las siglas FTC y FTA corresponden respectivamente a los flujos térmicos debidos al sistema de climatización y al aislamiento de la casa, haga las correcciones que estime oportunas para que represente fielmente al modelo matemático. Razone todos los cambios que introduzca.



b) Completar el diagrama corregido del apartado (a) con un sistema automático capaz de llevar y mantener la temperatura en el interior de la casa a un valor deseado TD, ya sea por encima (calefacción) de la temperatura exterior o por debajo de ésta (aire acondicionado).

3. Modelo de “Propagación de enfermedades”.

En el siguiente modelo matemático aparecen, con sus correspondientes abreviaturas, las variables: población sana (PS), población enferma (PE), tasa de contagio (TC) entre ambas poblaciones, duración media de la enfermedad (DME), tasa de letalidad (TL) o tasa de

$$I(t) = TC \frac{PS(t) PE(t)}{PS(t) + PE(t)}$$

mortalidad en la población enferma, incidencia (I) de la enfermedad o flujo de contagio, recuperación (R) o flujo de población enferma que supera la enfermedad pero puede volver a recaer, letalidad (L) o flujo de población que muere como consecuencia de la enfermedad.

$$R(t) = \frac{PE(t)}{DME}$$

a) Enumerar, de forma justificada, que hipótesis se han utilizado para elaborar el modelo y comentar si se está o no de acuerdo con ellas.

$$L(t) = TL PE(t)$$

$$\frac{d PE(t)}{dt} = I(t) - R(t) - L(t)$$

b) Suponiendo que los parámetros del modelo tienen los valores (TC=0.5, DME=10, TL=0.05) y que la población inicial es de 500 personas, de las que sólo 10 personas están enfermas. Simular al menos los quince primeros días de propagación de la enfermedad para comprobar que las poblaciones evolucionan como se muestra en la figura (b). Se recomienda utilizar la aproximación de Euler con intervalo de simulación de 1 día y redondear al entero menor en los tres flujos.

$$\frac{d PS(t)}{dt} = R(t) - I(t)$$

c) Los resultados del apartado (b) admiten la siguiente lectura: la enfermedad acabará con la población si no se toman las medidas oportunas. Comprobar que si se dispone de la medicación

adecuada para que no se produzcan muertes por la enfermedad, es decir, que si $TL=0$, las poblaciones evolucionan a los valores finales de 100 y 400 personas como muestra la figura (c). ¿Estamos ante una situación endémica, es decir ante un estado estacionario en el que no desaparece la enfermedad sino que conviven personas sanas y enfermas? ¿Cuándo y por qué se alcanza esta situación?

d) ¿Qué ocurrirá si el tipo de enfermedad no es mortal ($TL=0$), ni existe posibilidad de curación ($DME=$ valor muy grande)? ¿Podría justificar con ellos una situación epidémica, donde toda la población se ve afectada por la enfermedad? Observación: no es necesario que realice ninguna simulación, conteste buscando la analogía o similitud con algún modelo del libro de texto o de la colección de ejercicios.

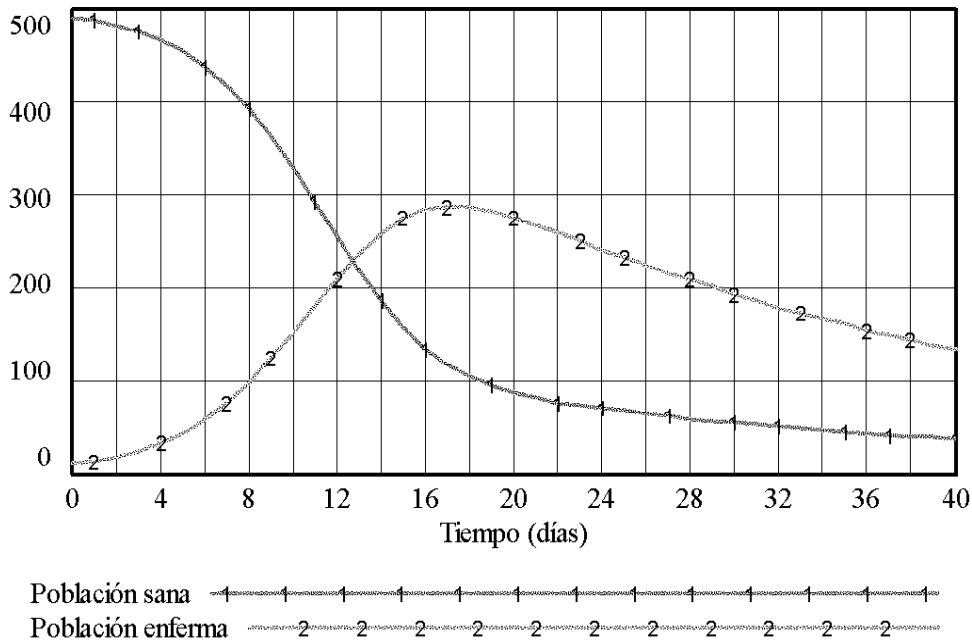


Fig. (b) Simulación en las condiciones del apartado (b).

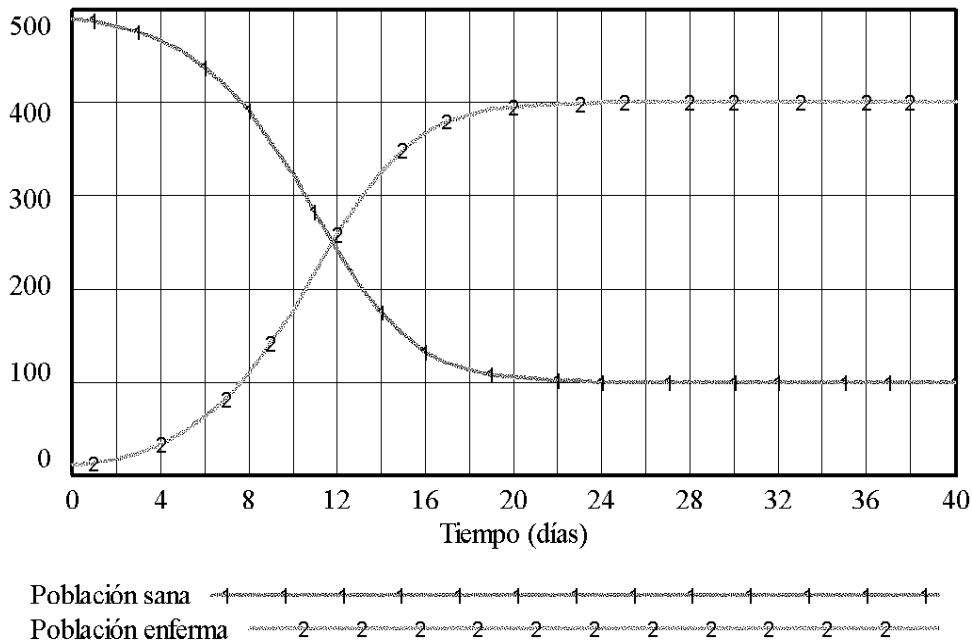


Fig. (c) Simulación en las condiciones del apartado (c).



OBSERVACIONES: Esta prueba consta de dos primeros ejercicios breves (2.5 puntos cada uno) y un tercer ejercicio (5 puntos), basado en el estudio más completo de un modelo. En los enunciados de estos ejercicios se ha intentado ser claro y conciso pero a veces, sobre todo en el tercer ejercicio, el enunciado es bastante largo. Se recomienda leer detenidamente cada enunciado, pues la comprensión de éste es un paso muy importante para contestar a los distintos apartados. Se ha intentado también que no todos los apartados de un ejercicio estén entrelazados, por lo que se recomienda afrontar cada apartado casi como si de un nuevo ejercicio se tratara.

ASEGÚRESE QUE LE HAN ENTREGADO TRES HOJAS

NO OLVIDE RELLENAR SUS DATOS PERSONALES EN TODAS LAS HOJAS QUE ENTREGUE
SE PERMITE EL USO DE CALCULADORA CIENTÍFICA SALVO QUE ÉSTA SEA PROGRAMABLE

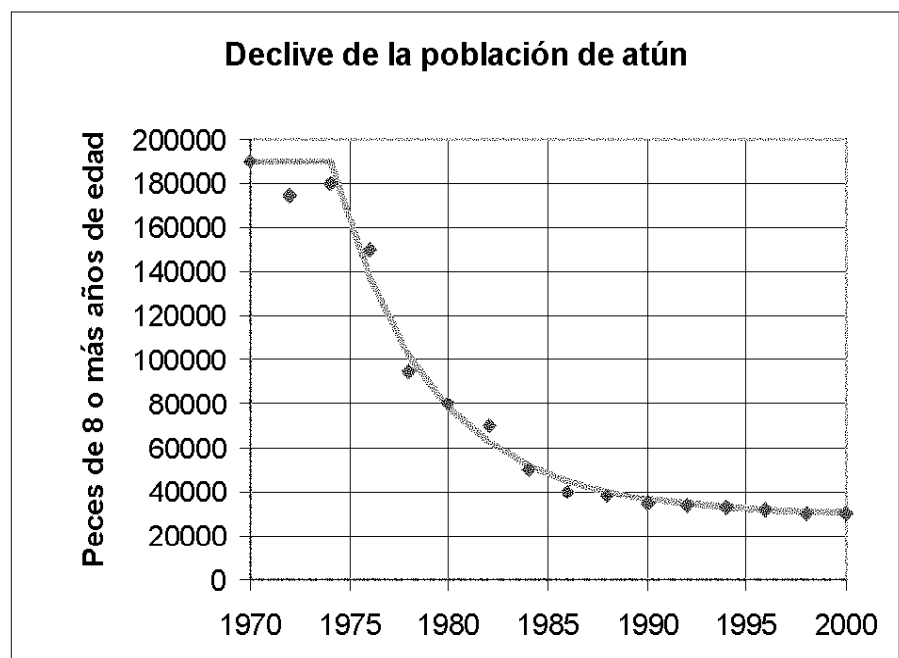
1. El editor de un periódico tiene un problema logístico, desea mantener un número de vendedores que le garanticen las ventas. Para analizar el problema de contratación cuenta con la siguiente información:

- La empresa cuenta con una plantilla de vendedores, que se ve continuamente ampliada por la contratación de un personal no cualificado (aprendices) que tardan unos días en aprender el oficio y por tanto en tener capacidad de ventas.
- Las condiciones salariales y el tipo de trabajo hace que continuamente haya vendedores que abandonan voluntariamente la tarea de vendedor, pasando a otras tareas dentro de la empresa o pidiendo el despido. La dirección de la empresa no contempla por ahora ninguna política de despidos, pero tampoco el incentivo para tratar de cambiar la decisión del vendedor.
- Cuando una persona pasa a la categoría de vendedor, la empresa tiene garantizada la venta de un número fijo de periódicos por día durante los días de permanencia en plantilla del vendedor.
- En la empresa se tiene una estadística de las ventas realizadas cada día, que permiten tener una estimación diaria de la demanda de periódicos.
- La contratación de futuros vendedores se hará si la demanda lo requiere.

a) Dibujar un diagrama de influencias que modele esta situación, recogiendo todas las variables y relaciones implícitas en el enunciado, y cualquier otra que considere oportuna. Acompáñelo de las correspondientes justificaciones.

b) Analizar la estabilidad de los bucles elementales y del modelo en su conjunto.

2. Las marcas de la siguiente gráfica muestran la evolución de la población de atún rojo en el Atlántico occidental (son datos publicados en el libro “Los límites del crecimiento: 30 años después” de D. Meadows, J. Ringers y D. Meadows). Con trazo continuo se muestra



la evolución que habría tenido de responder exactamente a un arquetipo elemental. ¿Qué tipo de estructura básica cree que se ha utilizado para modelar este fenómeno? ¿Qué valores tienen los parámetros utilizados? No olvide justificar todas sus respuestas.

3. Modelo “Edificación de viviendas”

En este ejercicio se pretende modelar el proceso de edificación de viviendas en un área urbana. El modelo viene descrito por las siguientes cuatro ecuaciones:

$$(1) \quad DV(t) = \frac{V(t)}{VMV}$$

$$(2) \quad CV(t) = V(t) \text{ MVS}(t) \text{ TNCV}$$

$$(3) \quad \frac{dV(t)}{dt} = CV(t) - DV(t)$$

$$(4) \quad FO(t) = \frac{V(t) \text{ SPV}}{S}$$

y la tabla:

FO	MVS
0	0.4
0.1	0.7
0.2	1
0.3	1.25
0.4	1.45
0.5	1.5
0.6	1.5
0.7	1.4
0.8	1
0.9	0.5
1	0

Siendo:

V, el número de viviendas

CV, la construcción de viviendas

DV, la demolición de viviendas

FO, el factor de ocupación del terreno

TNCV, la tasa normal de construcción de viviendas

S, la superficie edificable

SPV, el factor de repercusión de una vivienda sobre la superficie edificable

VMV, la vida media de las viviendas

MVS, el multiplicador de viviendas

- a) Dibujar el diagrama de influencias, razonando todas y cada una de las relaciones. Se recomienda ayudarse de las ecuaciones del modelo.
- b) Hacer una clasificación razonada de las variables que describen el modelo, especificando las unidades de cada una de ellas, y dibujar el correspondiente diagrama de Forrester.
- c) Iterar al menos 10 veces para observar si el número de viviendas tiende a un valor en estado estacionario.

Las condiciones de la simulación son:

- Inicialmente hay 7396 viviendas.
 - La vida media de las viviendas es de 75 años.
 - La tasa normal de construcción vale 0.05.
 - La superficie edificable está limitada a 1000 m².
 - El factor de repercusión de una vivienda sobre la superficie edificable vale 0.1.
 - El intervalo de simulación Δt es de 1 año.
 - En las variables que no tengan sentido los decimales, se redondeará al entero menor.
- d) Determinar analíticamente el valor que tendrá el multiplicador de viviendas (MVS) en el estado estacionario bajo las condiciones de simulación del apartado (c).