

TEORÍA DE AUTÓMATAS I

Informática de Sistemas

Soluciones a las cuestiones de examen del curso 2002/03

Febrero 2003, 1ª semana

1. Considere los lenguajes del alfabeto $\Sigma=\{0,1\}$: $L_1=\{0^n1^n, | n \geq 1\}$ y $L_2=\{\text{cadenas con igual número de 1's que de 0's}\}$ y $L_3=\{\text{cadenas en que cada 1 va seguido de al menos un 0}\}$. Señale la afirmación verdadera:

- a) Ninguno de los lenguajes es regular
- b) Sólo el segundo y el tercero son regulares
- c) $L_3 \subset L_2$ y $L_1 \subset L_2$
- d) Ninguna de las afirmaciones anteriores es cierta

Solución: D. L_1 y L_2 son independientes de contexto. L_3 es regular. La respuesta c es falsa porque 100 pertenece a L_3 pero no a L_2 .

2. El lenguaje que genera la siguiente gramática $\{S \rightarrow 0S1; S \rightarrow A; A \rightarrow 1A0; A \rightarrow \lambda\}$ es

- a) regular
- b) independiente del contexto determinista no regular
- c) independiente del contexto estrictamente no determinista
- d) estructurado por frases y no independiente del contexto

Solución: B. Existe un autómata de pila determinista que acepta el lenguaje (queda como ejercicio para el alumno dibujarlo).

3. Sea L_1 el lenguaje generado por la siguiente gramática:

$$S \rightarrow A, S \rightarrow B, A \rightarrow ab, A \rightarrow aCb, C \rightarrow ab, C \rightarrow aCb, B \rightarrow aBa, B \rightarrow b$$

Considere el lenguaje: $L_2 = \{a^n b^n, | n \geq 1\} \cup \{a^n b a^n, | n \geq 1\}$ y señale cuál de las afirmaciones siguientes es cierta:

- a) $L_1 = L_2$
- b) $L_1 \subset L_2$
- c) $L_2 \subset L_1$
- d) Ninguna de las afirmaciones anteriores es cierta

Solución: C. Las reglas que contienen los no-terminales A o C generan el lenguaje $\{a^n b^n, | n \geq 1\}$. Las que contienen B generan $\{a^n b a^n, | n \geq 0\}$.

4. Sean los lenguajes A, B, C . La equivalencia $A \circ (B \setminus C) = (A \circ B) \setminus (A \circ C)$ donde " \circ " indica concatenación y " \setminus " diferencia de conjuntos:

- a) Siempre es cierta
- b) Es cierta si y sólo si los lenguajes A y C son regulares
- c) Es cierta sólo si A, B y C son lenguajes regulares
- d) Ninguna de las afirmaciones anteriores es cierta

Solución: D. Sean $A = B = \{\lambda, x\}$ y $C = \{\lambda\}$. Entonces, $A \circ (B \setminus C) = \{x, xx\}$ y $(A \circ B) \setminus (A \circ C) = \{xx\}$.

5. Sea L un lenguaje sobre un alfabeto Σ . Definimos: $\text{Pref}(L) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u \in \Sigma^*, w \circ u \in L\}$. Es decir, $\text{Pref}(L)$ es el conjunto de cadenas que son prefijo de alguna cadena de L . Por ejemplo, si $L = \{xyz\}$, $\text{Pref}(L) = \{\lambda, x, xy, xyz\}$. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es falsa:

- a) Si $L \neq \emptyset$, entonces $\lambda \in \text{Pref}(L)$ y $L \subseteq \text{Pref}(L)$
- b) Si $L = ab^*a$, entonces $\text{Pref}(L) = \{ab^*\} \cup \{a\}$
- c) Si $L = ab^*a$, entonces existe un autómata finito determinista que reconoce $\text{Pref}(L)$
- d) Si L es regular, entonces $\text{Pref}(L)$ también lo es

Solución: B. La C es verdadera porque $\text{Pref}\{ab^*a\} = \lambda \cup ab^* \cup ab^*a$. La D es verdadera, porque podemos tomar un autómata finito M tal que $L(M) = L$ y cambiar por estados de aceptación todos los estados que se encuentren en algún camino entre el estado inicial y algún estado de aceptación.

6. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es falsa:

- a) Si M es un autómata finito determinista con k estados que acepta una cadena de longitud mayor o igual a k , entonces el lenguaje reconocido por M tiene un número infinito de cadenas
- b) Si L es un lenguaje finito que contiene la cadena x^{2045} , todo autómata determinista que reconozca L habrá de tener al menos 2045 estados
- c) Si L es un lenguaje finito que contiene la cadena x^{2045} , existe un autómata no determinista que reconoce L cuyo número de estados es menor que 2045
- d) Para todo lenguaje finito existe un autómata de pila que lo reconoce

Solución: C. La B es verdadera porque si el autómata tuviera menos de 2.045 estados aceptaría infinitas cadenas. La C es falsa porque si fuera verdadera el autómata aceptaría infinitas cadenas.

7. Considere la gramática de símbolos terminales $\{ (,), ;, 1, 2, 3 \}$:

$$S \rightarrow (A), A \rightarrow A;E, A \rightarrow E, E \rightarrow 1, E \rightarrow 2, E \rightarrow 3, E \rightarrow S.$$

La gramática genera listas de elementos que son números o a su vez listas, separados por el símbolo “;”. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:

- a) El lenguaje es regular
- b) El lenguaje es independiente de contexto (no regular)
- c) No existe una gramática equivalente en forma normal de Chomsky
- d) El lenguaje generado es estructurado por frases (no independiente de contexto)

Solución: B. La gramática es independiente de contexto. (La A es falsa porque hace falta una pila para llevar cuenta del número de paréntesis. La C es falsa porque la gramática no genera la cadena vacía, y por eso existe una gramática en forma normal de Chomsky.)

8. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:

- a) Es posible que L sea un lenguaje independiente del contexto y L^* no lo sea
- b) Todo subconjunto de un lenguaje independiente del contexto es también independiente del contexto
- c) Todo lenguaje cuyo complementario sea un lenguaje finito es independiente del contexto
- d) La intersección de un lenguaje regular con un lenguaje independiente del contexto es siempre un lenguaje regular

Solución: C.

9. Indique cuál de los tres lenguajes siguientes no es independiente del contexto determinista (en caso de que los tres lo sean, señale la opción d):

- a) $L = \{a^n b^m \mid m \leq n\}, \Sigma = \{a, b\}$
- b) El lenguaje de las cadenas que tienen el doble de a 's que b 's, $\Sigma = \{a, b\}$
- c) El lenguaje de las cadenas que tienen más a 's que b 's, $\Sigma = \{a, b\}$
- d) Los tres son independientes de contexto deterministas

Solución: D.

10. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

- a) Cualquier lenguaje independiente del contexto puede ser reconocido por un autómata de pila con un solo estado
- b) Cualquier lenguaje regular puede ser reconocido por un autómata de pila con un solo estado
- c) Cualquier lenguaje independiente del contexto que sea reconocido por un autómata determinista puede ser reconocido por un autómata determinista que vacía su pila antes de aceptar las cadenas
- d) Ninguna de las afirmaciones anteriores es cierta

Solución: D.

11. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

- a) Una máquina de Turing cuyo estado inicial coincida con el estado de parada acepta toda cadena
- b) Cualquier lenguaje puede ser reconocido por una máquina de Turing
- c) Es posible que un lenguaje sea estructurado por frases pero no exista ninguna máquina de Turing que se detenga exclusivamente cuando las cadenas escritas en su cinta pertenezcan al lenguaje
- d) Ninguna de las afirmaciones anteriores es cierta

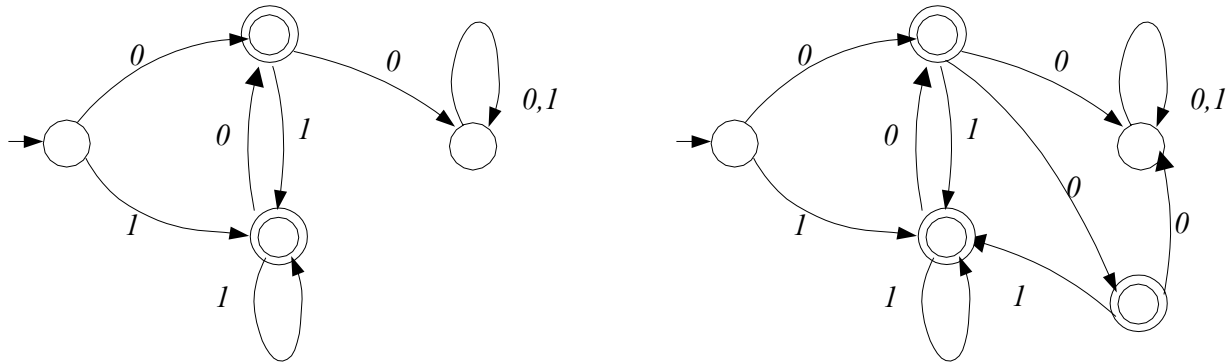
Solución: A.

12. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es falsa:

- a) Un autómata finito determinista de q estados y n símbolos tiene $n \times q$ transiciones
- b) Un autómata finito no determinista de q estados y n símbolos puede tener a lo sumo $n \times q^2$ transiciones
- c) Un autómata finito no determinista puede tener un número ilimitado de transiciones distintas
- d) El número máximo de transiciones de un autómata finito determinista depende del número de estados y del número de símbolos del alfabeto del autómata

Solución: C.

13. Sea L el lenguaje del alfabeto $\{0,1\}$ formado por las cadenas no vacías que no tienen ceros consecutivos. Sea M_1 el autómata de la izquierda y M_2 el de la derecha. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:



- a) $L(M_1) = L$
- b) $L(M_2) = L$
- c) $L(M_1) = L(M_2)$
- d) Ninguna de las afirmaciones anteriores es cierta

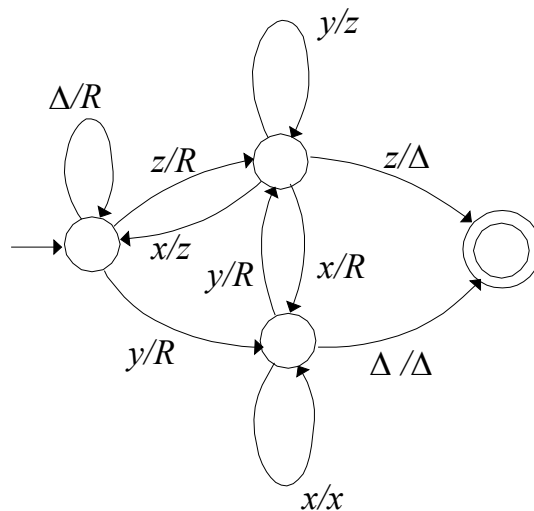
Solución: A. El autómata de la derecha acepta la cadena 00.

14. Dado el alfabeto Σ de n símbolos, definimos los lenguajes $L = \{w \in \Sigma^* \mid \text{hay al menos un símbolo de } \Sigma \text{ que no está en } w\}$ y $L' = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ tiene al menos una vez cada símbolo de } \Sigma\}$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

- a) L' es el lenguaje complementario de L
- b) Existe un autómata finito determinista de 2^n estados que reconoce L
- c) Todo autómata finito determinista que reconozca L' habrá de tener más de $2^n + 1$ estados
- d) Los lenguajes L y L' son regulares

Solución: A.

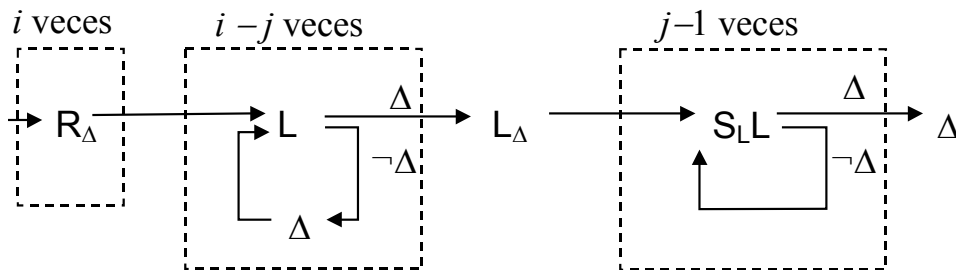
15. Indique cuál de las siguientes afirmaciones, referidas a la máquina de Turing de la figura, es falsa:



- a) Reconoce la cadena yyx
- b) Es no determinista
- c) Puede tener una terminación anormal
- d) Existe una máquina de Turing de dos cintas que reconoce el mismo lenguaje

Solución: C. Porque nunca mueve la cabeza lectora hacia la izquierda.

16. Sean w_1, w_2, \dots, w_i , i cadenas de símbolos de longitud arbitraria, $i > 0$. Sea j un entero tal que $0 < j \leq i$. Señale cuál de las siguientes afirmaciones es falsa si se ejecuta la máquina de Turing de la figura con una configuración inicial $\underline{\Delta}w_1\Delta w_2\Delta \dots \Delta w_i\Delta \Delta \dots$?



- a) Para cualesquiera valores de i, j no nulos la configuración final de cinta sería $\underline{\Delta}w_j$
- b) Para ciertos valores de i, j , la computación terminaría de forma anormal
- c) La máquina siempre concluye sus cálculos
- d) Para ciertos valores de i, j , la configuración de la cinta no se modifica

Solución: B.

Febrero 2003, 2ª semana

17. Sea G la siguiente gramática de símbolos terminales $\{a, b\}$: $S \rightarrow aAA, A \rightarrow bS, A \rightarrow \lambda$

- a) El autómata más sencillo que acepta $L(G)$ es un autómata finito
- b) El autómata más sencillo que acepta $L(G)$ es un autómata de pila determinista
- c) El autómata más sencillo que acepta $L(G)$ es un autómata de pila no determinista
- d) Los únicos autómatas que aceptan $L(G)$ son las máquinas de Turing

Solución: A. Desarrollando el árbol de derivación se comprueba que $L(G) = a(ba)^*$.

18. Considere el lenguaje L del alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ definido del modo siguiente:

- $b \in L$ y $\lambda \in L$
- si $w \in L$, entonces $awb \in L$ y $bwa \in L$
- si $w, v \in L$, entonces $wv \in L$
- no hay ninguna otra cadena en L

Señale cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

- a) No existe ninguna gramática independiente del contexto que genere L
- b) $L = \{w \in (a \cup b)^* \mid \text{el número de } b\text{'s es mayor o igual que el número de } a\text{'s en } w\}$
- c) No existe ningún autómata de pila que reconozca $L - \lambda$
- d) $L = \{w \in (a \cup b)^* \mid \text{el número de } b\text{'s es estrictamente mayor que el núm. de } a\text{'s en } w\}$

Solución: B.

19. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

- a) Si un lenguaje es regular, el conjunto de cadenas de L cuya longitud es par también lo es
- b) Si un lenguaje es independiente del contexto no regular, el conjunto de cadenas de L cuya longitud es impar también es independiente del contexto no regular

- c) Si el conjunto de cadenas de longitud par de un lenguaje L es un lenguaje independiente del contexto, el conjunto de cadenas de longitud impar de L también es un lenguaje independiente del contexto
- d) Ninguna de las afirmaciones anteriores es cierta

Solución: A. Por ser la intersección de dos conjuntos regulares.

Contraejemplo para la respuesta b: dado el lenguaje $\{x^n y^n\}$, sus cadenas de longitud impar constituyen un lenguaje regular (el conjunto vacío). Contraejemplo para la respuesta c: dado el lenguaje $L = \{x^{2n+1} y^{2n+1} z^{2n+1}\}$, sus cadenas de longitud par constituyen un lenguaje independiente de contexto (el lenguaje vacío).

20. Dados los lenguajes A , B y C , indique cuál de las siguientes afirmaciones es **falsa** (A^I es el lenguaje formado por las cadenas del lenguaje A invertidas; “ \circ ” indica concatenación):

- a) $A \circ (B \cup C) = A \circ B \cup A \circ C$
- b) $A \circ (B \cap C) = A \circ B \cap A \circ C$
- c) $(A \cup B)^I = A^I \cup B^I$
- d) $(B \cup C) \circ A = B \circ A \cup C \circ A$

Solución: B. Contraejemplo: $A = \{x, xy\}$, $B = \{yz\}$, $C = \{z\}$; en este caso, $A \circ (B \cap C) = \emptyset$, $A \circ B \cap A \circ C = \{xyz\}$.

21. Indique cuál de las tres siguientes afirmaciones es cierta (en caso de que las tres lo sean, señale la opción d):

- a) La unión de un conjunto infinito de lenguajes no regulares no puede ser regular
- b) La unión de un conjunto finito de lenguajes no regulares no puede ser regular
- c) Todo lenguaje cuyo complementario sea un lenguaje finito es regular
- d) Todas las afirmaciones anteriores son ciertas

Solución: C. Contraejemplo para la respuesta a: sea L un lenguaje no regular (por tanto, no finito); su complementario, $c(L)$, tampoco es regular. Al añadir a $c(L)$ una cadena de L , tenemos otro conjunto no regular (uno por cada cadena de L). La unión de todos estos conjuntos es Σ^* . Contraejemplo para la b: la unión de cualquier lenguaje no regular con su complementario es un lenguaje regular.

22. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

- a) Cualquier lenguaje independiente del contexto puede ser reconocido por un autómata de pila no determinista con un estado
- b) Cualquier lenguaje regular puede ser reconocido por una máquina de Turing con un estado
- c) Cualquier lenguaje regular puede ser reconocido por un autómata determinista que vacía su pila antes de aceptar las cadenas
- d) Ninguna de las afirmaciones anteriores es cierta

Solución: C.

23. Indique cuál de las siguientes afirmaciones, referidas a los autómatas de la figura, es cierta (observe que hay una transición λ , que no lee ningún símbolo de la cadena de entrada):

- c) $\{a^i b^i c^{2i}\}$
 d) ninguno de los lenguajes anteriores

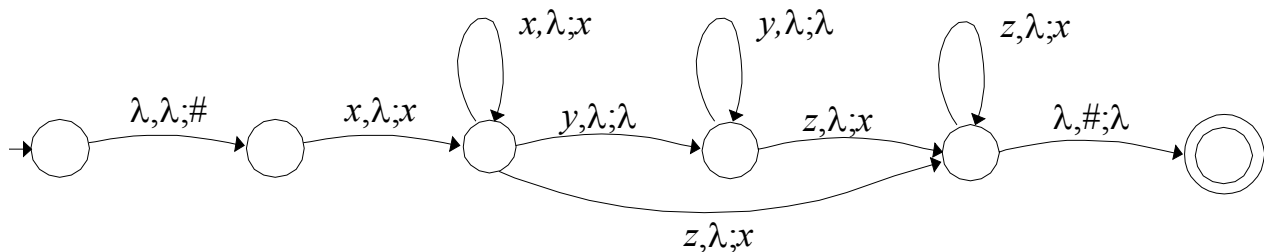
Solución: B. La gramática es equivalente a ésta: $S \rightarrow aAc$, $S \rightarrow ac$, $A \rightarrow aAc$, $A \rightarrow ac$, $S \rightarrow bBc$, $S \rightarrow bc$, $A \rightarrow bBc$, $A \rightarrow bc$, $B \rightarrow bBc$, $B \rightarrow bc$.

27. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es **falsa**:

- a) El lenguaje del alfabeto $\Sigma = \{0,1\}$ formado por palabras que tienen más 1's que 0's no es regular
 b) El lenguaje $L = \{0^j 1^k \mid j \geq k \geq 0\}$ del alfabeto $\Sigma = \{0,1\}$ es regular
 c) El lenguaje $L = \{0^j 1^k \mid \text{la longitud de las cadenas } j \text{ y } k \text{ es no nula}\}$ del alfabeto $\Sigma = \{0,1\}$ es regular
 d) El lenguaje $L = \{0^j 1^k \mid 100 \geq j \geq k \geq 0\}$ del alfabeto $\Sigma = \{0,1\}$ es regular

Solución: B.

28. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es cierta con respecto al autómata de la figura:



- a) Acepta el lenguaje $x^n y^m z^n$, donde m y n son enteros no negativos, $m \geq 2$
 b) Si se supone la existencia de un estado de "error" o "captación global" el autómata es determinista
 c) La presencia de transiciones λ revela no determinismo
 d) Ninguna de las afirmaciones anteriores es cierta

Solución: D. La respuesta a es incorrecta porque la cadena yy ($n = 0$, $m = 2$) no es aceptada por el autómata. La respuesta b es incorrecta porque hay no determinismo en el 5º estado. La respuesta c es incorrecta porque la existencia de transiciones λ no es condición suficiente ni necesaria para el no determinismo.

29. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

- a) Los lenguajes reconocidos por analizadores sintácticos de tipo $LR(k)$ son los lenguajes independientes del contexto
 b) Todo lenguaje regular puede ser reconocido por un analizador sintáctico de tipo $LR(k)$
 c) Los analizadores sintácticos de tipo $LR(k)$ se utilizan para reconocer lenguajes independientes del contexto no deterministas, ya que los independientes del contexto deterministas pueden ser reconocidos por los analizadores LL
 d) Ninguna de las afirmaciones anteriores es cierta

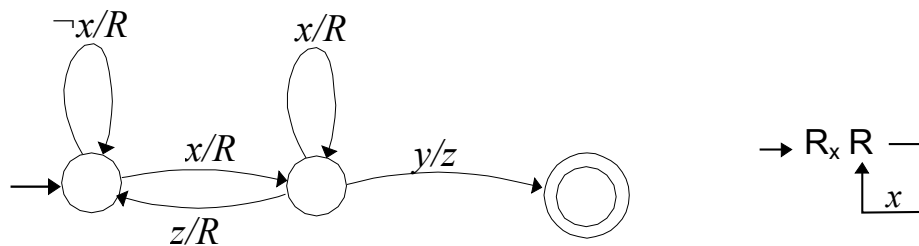
Solución: B.

30. Para toda cadena w , sea $n_a(w)$ = número de a 's en w y $n_b(w)$ = número de b 's en w . Considere la gramática: $S \rightarrow aSaSbS$, $S \rightarrow aSbSaS$, $S \rightarrow bSaSaS$, $S \rightarrow S$, $S \rightarrow \lambda$. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

- a) Para toda cadena del lenguaje, w , se cumple que $n_a(w) = 2n_b(w)$
- b) Para toda cadena del lenguaje, w , se cumple que $n_a(w) = 2n_b(w) + 1$
- c) En toda cadena del lenguaje cada b va seguida de dos a 's
- d) Ninguna de las afirmaciones anteriores es cierta

Solución: A.

31. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es cierta con respecto a los lenguajes L_1 y L_2 que reconocen (para el alfabeto $\Sigma = \{x, y\}$), las dos máquinas de Turing que se presentan en la figura:



- a) $L_1 = L_2$
- b) $L_1 \subset L_2$
- c) $L_2 \subset L_1$
- d) Ninguna de las afirmaciones anteriores es cierta

Solución: B. Toda cadena perteneciente a L_1 contiene al menos una x , y por tanto es aceptada por el segundo autómata.

32. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

- a) Una máquina de Turing que siempre termina sus cálculos puede aceptar un lenguaje no decidable
- b) Una máquina de Turing que siempre termina anormalmente reconoce el lenguaje vacío
- c) Una máquina de Turing que nunca termina sus cálculos reconoce el lenguaje formado solamente por la cadena vacía
- d) Ninguna de las afirmaciones anteriores es cierta

Solución: D. La a es incorrecta porque, si el criterio de aceptación es la parada, el lenguaje aceptado es Σ^* , y si el criterio es que se detenga conteniendo Y en su cinta, también se trata de un lenguaje decidable. La b es incorrecta porque tal máquina de Turing acepta el lenguaje vacío pero no lo reconoce (reconocer el lenguaje vacío requiere detenerse con N en la cinta para cualquier cadena). Si no se detiene no acepta ninguna cadena, ni siquiera la cadena vacía (observe que no es lo mismo aceptar sólo la cadena vacía que no aceptar ninguna cadena).

Septiembre 2003

33. Dado un alfabeto, el número máximo de estados de un autómata finito determinista:

- a) puede ser infinito;
- b) es directamente proporcional al número de cadenas del lenguaje que reconoce;
- c) no hay número máximo;

d) depende del alfabeto sobre el que está definido.

Solución: C.

34. Sea L el lenguaje representado por la expresión regular $(x^*y) \cup (y^*x)$ y L' el representado por la expresión regular $(x \cup y)^* \cdot (x \cup y)$, entonces:

- a) $L \subset L'$
- b) $L' \subset L$
- c) $L = L'$
- d) No se verifica ninguna de las relaciones anteriores entre L y L'

Solución: A. L' es el lenguaje formado por todas las cadenas que contienen al menos un símbolo. Por eso $L \subset L'$. Por otro lado, en L' hay cadenas que no están en L , como por ejemplo la cadena xyx .

35. La concatenación de dos lenguajes del alfabeto Σ es un subconjunto de:

- a) $(\Sigma^*)^*$
- b) $\Sigma \cup \Sigma$
- c) $\Sigma^* \times \Sigma^*$
- d) $\Sigma \times \Sigma$

Solución: A. $(\Sigma^*)^* = \Sigma^*$. La concatenación de dos lenguajes es el lenguaje que resulta al concatenar las respectivas cadenas (la concatenación de dos cadenas es una nueva cadena) y por tanto pertenece a Σ^* . $\Sigma \cup \Sigma = \Sigma$; $\Sigma \times \Sigma$ es el conjunto de pares ordenados formados por dos símbolos de Σ , y $\Sigma^* \times \Sigma^*$ es el conjunto de pares ordenados formados por dos cadenas de Σ^* .

36. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es **falsa**. “Para todo autómata de pila M existe un autómata M' tal que $L(M) = L(M')$ y M' es...

- a) un autómata de pila determinista”
- b) un autómata de pila que vacía su pila antes de aceptar una cadena”
- c) una máquina de Turing que siempre termina sus cálculos”
- d) una máquina de Turing que en algunos casos termina anormalmente”

Solución: A. Si el lenguaje L es un lenguaje independiente del contexto en sentido estricto, no existirá ningún autómata de pila determinista que lo reconozca (los autómatas de pila deterministas son menos potentes que los autómatas de pila no deterministas). La opción B es cierta, véase el teorema 2.1 del libro de texto (pág. 80). Finalmente, para todo lenguaje independiente del contexto existe una máquina de Turing que lo reconoce, y en particular siempre se puede diseñar una tal máquina que verifique las propiedades expresadas en las opciones C y D, ya que los lenguajes independientes del contexto son decidibles.

37. Indique cuál es el analizador sintáctico tipo LL más sencillo para la siguiente gramática:

$$\begin{cases} S \rightarrow xMy \\ S \rightarrow xyN \\ M \rightarrow xN \\ N \rightarrow y \end{cases}$$

- a) $LL(1)$
- b) $LL(2)$
- c) $LL(3)$
- d) No existe ningún analizador sintáctico LL con que se pueda analizar la gramática.

Solución: B. El único terminal que plantea ambigüedad es S . Pero basta con observar dos caracteres para saber si hay que aplicar la primera regla, o la segunda, o rechazar la cadena.

38. Sea n un número natural tal que $n \geq 2$. El número total de máquinas de Turing con n estados para un alfabeto y un conjunto de símbolos de cinta dados es:

- a) finito e independiente del alfabeto y del conjunto de símbolos de cinta;
- b) infinito;
- c) finito, y dependiente del alfabeto y del conjunto de símbolos de cinta;
- d) finito y dependiente sólo del alfabeto.

Solución: C.

39. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es **falsa**:

- a) la unión de un número finito de lenguajes estructurados por frases es un lenguaje estructurado por frases;
- b) la intersección de dos lenguajes estructurados por frases es un lenguaje estructurado por frases;
- c) todo lenguaje cuyo complementario sea un lenguaje finito es independiente del contexto;
- d) la intersección de un lenguaje regular con un lenguaje independiente del contexto es siempre un lenguaje regular.

Solución: D. La unión de dos lenguajes estructurados por frases es un lenguaje estructurado por frases. Esto puede demostrarse mediante gramáticas, marcando cada terminal A de la i -ésima gramática como A_i y añadiendo una regla del tipo $S \rightarrow S_i$ por cada gramática. También se podría demostrar este resultado mediante máquinas de Turing, de modo semejante a como se hizo en la fig. 1.27 (pág. 59) del libro de texto para la unión de lenguajes regulares. La intersección también es un lenguaje estructurado por frases. Sean M_1 y M_2 las máquinas de Turing que aceptan L_1 y L_2 , respectivamente. Sea M una máquina de Turing de dos cintas, que primero copia la cadena de la primera en la segunda, luego simula M_1 sobre la primera cinta y, si M_1 se detiene, entonces simula M_2 sobre la segunda cinta. Por tanto, M se detiene al examinar una cadena si y sólo si ésta pertenece a la vez a L_1 y a L_2 . Finalmente, todo lenguaje finito es regular, y tiene por tanto como complementario otro lenguaje regular y, en consecuencia, independiente del contexto. En cuanto a la opción D, es fácil encontrar un contraejemplo que pruebe su falsedad. Así por ejemplo, la intersección del lenguaje regular $x^n y^m$ y el lenguaje independiente del contexto $x^n y^n$ es el lenguaje independiente del contexto no regular $x^n y^n$.

40. Indique cuál de las siguientes situaciones **no** es posible cuando una máquina de Turing determinista examina una cadena:

- a) la máquina se detiene en el estado de parada;

- b) la máquina no se detiene nunca;
- c) se produce una terminación anormal (es decir, la cabeza lectora se desplaza a la izquierda de la primera celda de la cinta);
- d) la máquina abandona los cálculos por no encontrar ninguna transición aplicable.

Solución: D. Puesto que la máquina es determinista, necesariamente encuentra siempre una transición aplicable.

41. Un lenguaje definido a partir de un alfabeto Σ que contiene un solo símbolo:

- a) es siempre regular;
- b) es independiente del contexto, pero puede no ser regular;
- c) es estructurado por frases, pero puede no ser independiente del contexto;
- d) puede no ser estructurado por frases.

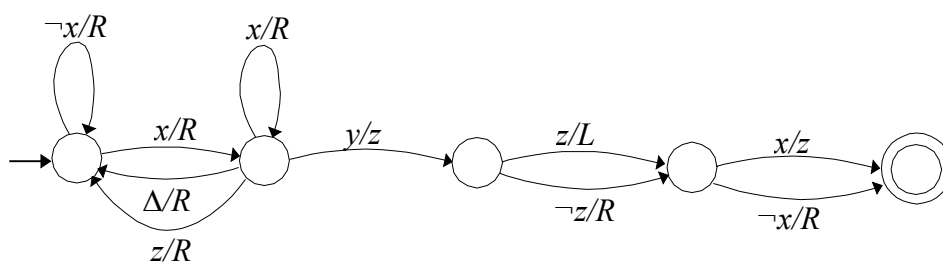
Solución: D. El conjunto de lenguajes de Σ es no numerable (porque cada cadena puede hacerse corresponder con un número natural —el que indica su longitud— y el conjunto de partes de \mathbb{N} es no numerable), mientras que el conjunto de lenguajes estructurados por frases es numerable.

42. Indique cuál es el tipo de autómata más sencillo (menos general) capaz de reconocer el lenguaje $x^n y^{2^n}$, donde n es un número natural:

- a) un autómata finito;
- b) un autómata de pila determinista;
- c) un autómata de pila no determinista;
- d) una máquina de Turing.

Solución: B. Constrúyase el autómata, cuidando que sea determinista. Es decir, utilícese una transición $y, x; \lambda$ en vez de $\lambda, \lambda; \lambda$.

43. Dado el alfabeto $\{x, y, z\}$, indique cuál de las siguientes afirmaciones, referidas a la máquina de Turing de la figura, es **falsa**:

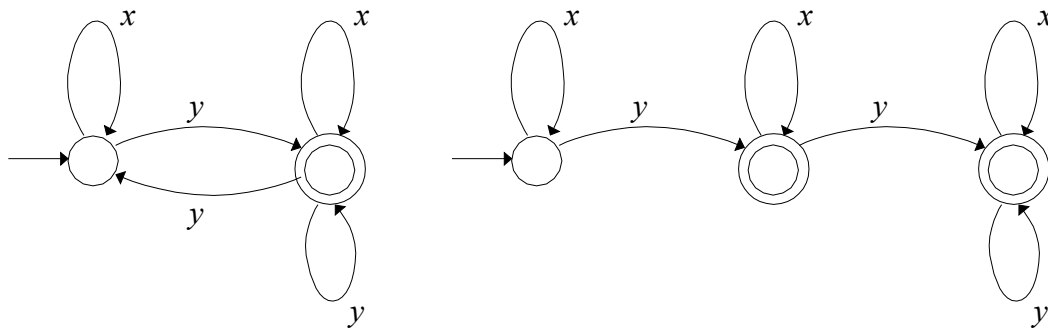


- a) la cinta debe contener al menos una y para que la máquina llegue a detenerse;
- b) la cinta debe contener la secuencia xy para que la máquina llegue a detenerse;
- c) para cierta configuración inicial de cinta, existen varios caminos (series de transiciones) posibles hasta el estado de parada;
- d) la máquina nunca puede terminar anormalmente.

Solución: C. A y B son ciertas: La máquina se encuentra en el segundo estado si y sólo si el último símbolo leído es x . En el primer estado se encuentra cuando todavía no ha aparecido una x , o cuando después de una x apareció otro carácter distinto de y . D también es cierta porque la cabeza de lectura realiza, como máximo, un retroceso, y este retroceso ocurre solamente cuando se han leído previamente al menos dos símbolos (la secuencia xy). Sea cual sea la configuración

inicial de la cinta, existe un único camino posible hacia el estado de parada, ya que la máquina es determinista.

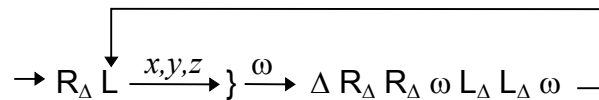
44. Indique cuál de las siguientes afirmaciones, relativas a los autómatas representados en la figura, es **falsa**:



- a) el lenguaje aceptado por el autómata de la izquierda es $(x^* y \circ (x \cup y)^*)$;
- b) ambos autómatas reconocen el mismo lenguaje;
- c) el autómata de la izquierda es no determinista;
- d) el autómata de la izquierda acepta más cadenas que el de la derecha.

Solución: D. El lenguaje que aceptan ambos es $(x^* y \circ (x \cup y)^*)$.

45. Supongamos que la siguiente máquina de Turing se encuentra en el estado inicial con la configuración $\underline{\Delta}xyz\Delta\Delta\Delta\dots$. Indique cuál será su configuración final:



- a) $\underline{\Delta}xyz\Delta\Delta\Delta\dots$
- b) $\underline{\Delta}zyx\Delta\Delta\Delta\dots$
- c) $\Delta xyz \underline{\Delta} xyz \Delta\Delta\Delta\dots$
- d) $\underline{\Delta} xyz \Delta zy x \Delta\Delta\Delta\dots$

Solución: D.

46. Sea M un autómata y C un conjunto de cadenas aceptadas por el autómata. Se cumple que:

- a) $L(M) = C$.
- b) $L(M) \subset C$.
- c) $L(M) \supset C$.
- d) $L(M) \supseteq C$.

Solución: D. Observe que “un conjunto de cadenas aceptadas por M ” indica que el autómata acepta todas y cada una de las cadenas de C , pero eso no implica que sólo acepte las cadenas de C . En cambio, “ $L(M)$ ” contiene todas las cadenas que M acepta; véase la definición de $L(M)$ en la pág. 37 del libro de texto.

47. Sea M un autómata de pila que contiene la transición $(i, y, \lambda, j, \lambda)$; sea M' el autómata resultante de sustituir dicha transición por (i, y, x, j, x) . Indique cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

- a) $L(M) = L(M')$, cualquiera que sea M
- b) $L(M) \subseteq L(M')$, cualquiera que sea M
- c) $L(M) \supseteq L(M')$, cualquiera que sea M
- d) No se verifica ninguna de las relaciones anteriores entre $L(M)$ y $L(M')$

Solución: C. El número de cadenas aceptadas puede disminuir, pero nunca puede aumentar. Piense, por ejemplo, en un autómata M que tenga i como estado inicial, j como estado de aceptación, y solamente la transición indicada en el enunciado.

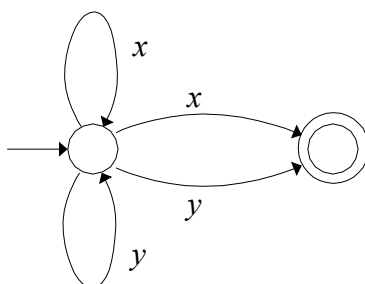
48. Sea L un lenguaje generado por una gramática libre de contexto en forma normal de Chomsky (G). ¿Existe otra gramática en forma normal de Chomsky que genere el complemento de L ?

- a) sí, para toda gramática G ;
- b) no, nunca;
- c) existe si y sólo si $L(G)$ es un lenguaje regular;
- d) existe si y sólo si $L(G)$ es un lenguaje independiente del contexto.

Solución: B. Porque el complemento de L contiene necesariamente la cadena vacía.

Septiembre 2003 (Reserva)

49. Sea L el lenguaje representado por la expresión regular $(x \cup y) \cdot (x \cup y)^*$ y L' el lenguaje que reconoce el siguiente autómata:



- a) $L \subset L'$
- b) $L' \subset L$
- c) $L = L'$
- d) No se verifica ninguna de las relaciones anteriores entre L y L' .

Solución: C. En ambos casos se trata del lenguaje formado por las cadenas que contienen un solo símbolo.

50. Sea L un lenguaje regular. Indique cuál de los siguientes lenguajes **puede no ser** regular:

- a) $L_1 = \{x \mid x \in L \text{ y } x^{-1} \in L\}$, es decir, el subconjunto de L formado por aquellas cadenas cuya inversa también está en L ;
- b) $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u \in \Sigma^*, w \circ u \in L\}$, es decir, el conjunto de cadenas que son prefijo de alguna cadena de L ;
- c) $L_3 = \{x \mid x \in L_1 \text{ y } x^{-1} \in L\}$, conjunto de cadenas de L_1 (definido en la opción a) cuya inversa está en L ;
- d) $L_4 \subset L_1$ (es decir, L_4 es un subconjunto cualquiera de L_1).

Solución: D. Sea L^{-1} el lenguaje (regular) formado al invertir cada cadena de L . La condición " $x \in L$ y $x^{-1} \in L$ " es equivalente a " $x \in L$ y $x \in L^{-1}$ " y por tanto L_I es la intersección de dos lenguajes regulares y es regular. También L_2 es un lenguaje regular: podemos tomar un autómata finito M tal que $L(M) = L$ y cambiar por estados de aceptación todos los estados que se encuentren en algún camino entre el estado inicial y algún estado de aceptación. $L_3 = L_I$ (por definición, si $x \in L_I$ entonces $x^{-1} \in L$) y por tanto también es regular. En cuanto a L_4 , aun siendo un subconjunto de un lenguaje regular, puede no ser regular. Supongamos $L = \{x^n y^m\} \cup \{x^n y^m\}^{-1}$. Entonces, $L_I = L$, y un subconjunto de L es $x^n y^n$, lenguaje independiente del contexto no regular.

51. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es **falsa**:

- a) un autómata finito determinista de q estados y n símbolos tiene $n \times q$ transiciones;
- b) un autómata finito no determinista de q estados y n símbolos puede tener a lo sumo $n \times q^2$ transiciones;
- c) todo autómata finito definido para un alfabeto Σ con n símbolos debe contener al menos n transiciones;
- d) el número máximo de transiciones de un autómata finito determinista depende del número de estados y del número de símbolos del alfabeto del autómata.

Solución: C. El conjunto de transiciones de un autómata no-determinista puede ser cualquier subconjunto de $S \times \Sigma \times S$, incluso el conjunto vacío.

52. Dado el alfabeto $\Sigma = \{x, y, z\}$, indique cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:

- a) la expresión regular $y^*(xy^*x)^*y^*$ representa el lenguaje formado por todas las cadenas que contienen un número par de x 's ;
- b) la gramática $S \rightarrow SS, S \rightarrow xy, S \rightarrow yx$ genera el lenguaje formado por las cadenas que contienen tantas x 's como y 's;
- c) el lenguaje formado por las cadenas que contienen la secuencia $xyxz$ es regular;
- d) el lenguaje $x^n y^n z^n$ no es decidible.

Solución: C. A es falsa: la expresión regular no representa la cadena $xxyxx$. B también es falsa: la gramática no genera $xxyy$. C es verdadera, es fácil diseñar un autómata finito que reconozca dicho lenguaje. Finalmente, D es falsa: el lenguaje $x^n y^n z^n$ es decidible (la máquina de Turing que lo decide puede consultarse en la figura 3.28 del libro de texto).

53. En un cierto autómata de pila determinista existe una transición $(i, \lambda, \lambda, j, x)$. El número total de transiciones que debe partir del estado i es:

- a) una;
- b) dos;
- c) más de dos;
- d) depende del alfabeto.

Solución: A. Está claro que, por ser determinista, la transición $(i, \lambda, \lambda, \bullet, \bullet)$ excluye $(i, x, \lambda, \bullet, \bullet)$, $(i, \lambda, y, \bullet, \bullet)$, $(i, x, y, \bullet, \bullet)$ y todas aquéllas en que contengan otros símbolos en vez de x e y ; es decir, no hay más que una transición desde el estado i .

54. Sea L un lenguaje generado por una gramática en forma normal de Chomsky. El complemento de L , ¿es un lenguaje regular?

- a) sí, para todo L ;
- b) no, nunca;
- c) lo es si y sólo si L es regular;

d) puede se regular aunque L no lo sea.

Solución: C. El complemento de L es regular si y sólo si L es regular, ya que el complemento de un lenguaje regular siempre es regular.

55. ¿Cuál es el analizador **predictivo** más sencillo para la siguiente gramática?

$$\begin{cases} S \rightarrow xxMy \\ S \rightarrow xyN \\ M \rightarrow yN \\ N \rightarrow x \end{cases}$$

- a) $LR(2)$
- b) $LR(3)$
- c) $LL(2)$
- d) $LL(3)$.

Solución: D. El analizador **predictivo** más sencillo es $LL(2)$.

56. El lenguaje $x^m y^n z^p$, donde m, n y p son enteros no negativos tales que $m+n=p$, es:

- a) regular;
- b) independiente del contexto determinista (en sentido estricto);
- c) independiente del contexto no determinista (en sentido estricto);
- d) estructurado por frases (en sentido estricto).

Solución: B. Para demostrarlo hay que construir el autómata, cuidando que sea determinista.

57. Para un alfabeto Σ no vacío, el conjunto de lenguajes finitos es:

- a) finito;
- b) infinito contable (numerable);
- c) infinito no contable (no numerable);
- d) depende del alfabeto.

Solución: B. Porque es un subconjunto de los lenguajes regulares, que son contables.

58. Dado el alfabeto $\Sigma=\{0,1\}$, considere los lenguajes $L_1= \{0^n 1^n, | n \geq 1\}$, $L_2= \{\text{cadenas con igual número de 1's que de 0's}\}$ y $L_3= \{\text{cadenas en que cada 1 va inmediatamente seguido de un 0}\}$. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:

- a) ninguno de los lenguajes es regular;
- b) sólo el segundo y el tercero son regulares;
- c) $L_1 \subset L_2$ y $L_3 \subset L_2$;
- d) L_1 y L_2 son independientes de contexto.

Solución: D. L_1 y L_2 son independientes de contexto en sentido estricto. L_3 es regular. La respuesta c es falsa porque 100 pertenece a L_3 pero no a L_2 .

59. Sea L_1 el lenguaje generado por la siguiente gramática:

$$S \rightarrow A, S \rightarrow B, A \rightarrow ab, A \rightarrow aCb, C \rightarrow ab, C \rightarrow aCb, B \rightarrow aBa, B \rightarrow b$$

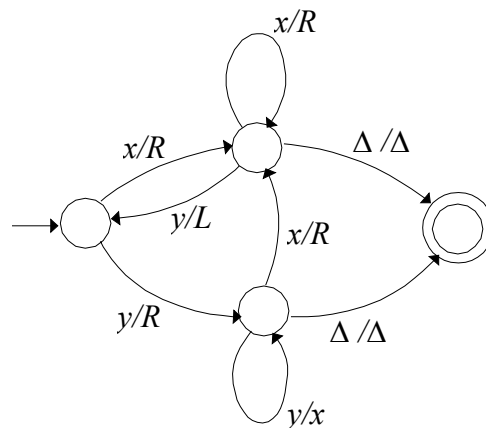
Considere el lenguaje: $L_2 = \{a^n b^n, | n \geq 1\} \cup \{a^n b a^n, | n \geq 1\}$ y señale cuál de las afirmaciones siguientes es cierta:

- a) $L_1 = L_2$
- b) $L_1 \subset L_2$
- c) $L_2 \subset L_1$
- d) No se verifica ninguna de las relaciones anteriores entre L_1 y L_2

Solución: C. Las reglas que contienen los no-terminales A o C generan el lenguaje $\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$. Las que contienen B generan $\{a^n b a^n \mid n \geq 0\}$. Por eso $L_1 = \{a^n b^n, \mid n \geq 1\} \cup \{a^n b a^n, \mid n \geq 0\}$.

60. Si iniciamos la máquina de Turing siguiente con la configuración de cinta $\underline{y}yxyxx\Delta\Delta\Delta\dots$:

- a) la máquina llega al estado de parada;
- b) la máquina entra en un bucle y no termina nunca;
- c) se produce una terminación anormal;
- d) la máquina abandona los cálculos.



Solución: B. Basta anotar el estado y dibujar la cinta para cada transición.

61. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es **falsa**:

- a) para toda máquina de Turing no determinista M existe una gramática estructurada por frases que genera $L(M)$;
- b) la tesis de Turing implica que los lenguajes más generales que existen son los lenguajes estructurados por frases;
- c) la tesis de Turing implica que ningún ordenador podrá reconocer un lenguaje no estructurado por frases;
- d) la unión de dos lenguajes decidibles (por máquinas de Turing) siempre es decidible.

Solución: B. Porque el conjunto más general de lenguajes es incontable, mientras que el conjunto de los lenguajes estructurados por frases es contable (como lo es el conjunto de todas las posibles máquinas de Turing). La A es verdadera porque para toda máquina de Turing no determinista existe una máquina determinista equivalente. La tesis de Turing implica que los lenguajes más generales que pueden reconocer las máquinas de Turing son los lenguajes estructurados por frases, y esta tesis define el límite de potencia computacional de cualquier ordenador, luego C es verdadera. También D es verdadera: sea M_1 la máquina que decide el primero y M_2 la que decide el segundo. Podemos construir una máquina de Turing M (de dos cintas) que simule primero M_1 sobre la primera cinta y luego M_2 sobre la segunda; si el contenido de al menos una de las cintas es Y , la máquina M limpia la segunda cinta y escribe Y en la primera; si las dos cintas contienen N , la máquina M limpia la segunda cadena y se detiene.

62. Indique cuál de los siguientes lenguajes genera esta gramática:

$$\begin{aligned}
S &\rightarrow X \\
X &\rightarrow Y \\
X &\rightarrow xXy \\
Y &\rightarrow xxYy \\
X &\rightarrow \lambda \\
Y &\rightarrow \lambda
\end{aligned}$$

- a) el lenguaje $x^m y^n$ tal que $n \leq m \leq 2n$;
- b) el lenguaje $x^m y^n$ tal que $2m = 3n$;
- c) el lenguaje $x^m y^n$ tal que $n \leq m < 2n$;
- d) el lenguaje $x^m y^n$ tal que $n < m \leq 2n$.

Solución: A. Para generar la cadena $x^m y^n$ hay que aplicar la primera regla, luego la tercera $2n-m$ veces, la segunda y después la cuarta $m-n$ veces.

63. Sea el alfabeto $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. El lenguaje formado por todas las cadenas tales que la suma de sus símbolos vale 100 es un lenguaje:

- a) regular;
- b) independiente del contexto determinista, en sentido estricto;
- c) independiente del contexto no determinista, en sentido estricto;
- d) estructurado por frases, no independiente del contexto.

Solución: A. Dentro de este lenguaje, las cadenas que no contienen el 0 forman un subconjunto finito. Para cada una de esas cadenas podemos construir una expresión regular para considerar la posibilidad de que haya 0's; por ejemplo, de 4323... pasaríamos a $0^*40^*30^*20^*30^*\dots$ Uniendo todas estas expresiones regulares obtenemos la expresión regular que representa el lenguaje. Otra forma de demostrarlo consiste en construir un autómata finito para el sublenguaje finito y después añadir un bucle rotulado con 0 para cada estado. También se puede hacer un razonamiento similar basado en una gramática regular.

64. Indique cuál de las siguientes afirmaciones, referidas a la máquina de Turing $\rightarrow R_x L_x$, es verdadera:

- a) al iniciar sus cálculos con la cabeza sobre la celda del extremo izquierdo de la cinta, la máquina tiene una terminación anormal si y sólo si hay una x registrada en algún lugar de la cinta;
- b) al iniciar sus cálculos con la cabeza sobre la celda del extremo izquierdo de la cinta, la máquina termina sus cálculos si y sólo si hay una x registrada en algún lugar de la cinta;
- c) el lenguaje aceptado por esta máquina es el lenguaje vacío;
- d) el lenguaje aceptado por esta máquina contiene sólo la cadena vacía.

Solución: C. La A es falsa porque puede haber una x en la primera celda de la cinta; en ese caso la cabeza se desplazaría hacia la derecha, en un bucle infinito. La B es falsa por la misma razón.