

TEORÍA DE AUTÓMATAS I

Informática de Sistemas

Soluciones a las cuestiones de examen del curso 2003/2004

Febrero 2003, 1ª semana

1. La concatenación de lenguajes tiene las siguientes propiedades:

- a) Asociativa y conmutativa
- b) Asociativa y elemento neutro
- c) Asociativa, conmutativa y elemento neutro

Solución: B. Es asociativa porque $x^\circ(y^\circ z)$ es igual a $(x^\circ y)^\circ z$. El elemento neutro es el lenguaje que sólo contiene la cadena vacía. Es muy fácil ver que no es conmutativa; por ejemplo, tomando los lenguajes $\{a\}$ y $\{b\}$.

2. La unión de dos lenguajes decidibles (por máquinas de Turing), ¿es decidible?

- a) Sí, siempre
- b) No, nunca
- c) Depende de los casos

Solución: A. Sea M_1 la máquina que decide el primero y M_2 la que decide el segundo. Podemos construir una máquina de Turing M (de dos cintas) que simule primero M_1 sobre la primera cinta y luego M_2 sobre la segunda; si el contenido de al menos una de las cintas es Y , la máquina M limpia la segunda cinta y escribe Y en la primera; si las dos cintas contienen N , la máquina M limpia la segunda cadena y se detiene.

3. Dado un alfabeto Σ , llamamos L_1 al conjunto de lenguajes de Σ aceptados por máquinas de Turing deterministas con una sola cinta, L_2 al conjunto de lenguajes de Σ aceptados por máquinas de Turing deterministas con varias cintas y L_3 al conjunto de lenguajes de Σ aceptados por máquinas de Turing no deterministas y con varias cintas. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

- a) $L_1 = L_2 \subset L_3$
- b) $L_1 \subset L_2 = L_3$
- c) Ninguna de las afirmaciones anteriores es cierta

Solución: C. Toda máquina de Turing de una cinta no determinista es equivalente (en cuanto al lenguaje que acepta) a una máquina de Turing determinista de una cinta, y ésta es equivalente a su vez a una máquina de varias cintas.

4. Para un alfabeto Σ no vacío, el conjunto de lenguajes finitos es

- a) Finito
- b) Infinito contable (numerable)
- c) Infinito no contable (no numerable)

Solución: B. Es un subconjunto infinito de los lenguajes regulares, que son contables.

5. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:

- a) La tesis de Turing implica que para todo lenguaje existe una máquina de Turing que lo acepta, ya sea el alfabeto finito o infinito.
- b) La tesis de Turing implica que los lenguajes más generales que existen son los lenguajes estructurados por frases.
- c) Las dos afirmaciones anteriores son falsas.

Solución: C. Existen lenguajes no computables, que no son estructurados por frases y que ninguna máquina de Turing acepta.

6. Los palíndromos (palabras capicúas) del idioma castellano, tales como “a”, “y”, “dad”, “oso”, “erre”, etc., constituyen un

- a) lenguaje regular.
- b) lenguaje independiente del contexto (en sentido estricto).
- c) lenguaje estructurado por frases (en sentido estricto).

Solución: A. Es un lenguaje finito, y por tanto, regular.

7. Decidir si es verdadera o falsa la siguiente afirmación: “Dado un lenguaje regular L existe una gramática independiente de contexto en forma normal de Chomsky que genera el mismo lenguaje.”

- a) Siempre.
- b) Nunca.
- c) Depende de L .

Solución: C. Una gramática en forma normal de Chomsky no puede generar la cadena vacía.

8. El número de estados mínimo para una máquina de Turing no determinista es

- a) Uno
- b) Dos
- c) Ninguno de los anteriores

Solución: B.

9. Considere el conjunto de autómatas finitos deterministas de 3 estados (p,q,r) con estado inicial “p”, un solo estado de aceptación “r” y alfabeto $\Sigma = \{0,1\}$. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es **falsa**:

- a) Existen 729 funciones de transición (δ) diferentes para dicho conjunto de autómatas
- b) Existen 9 funciones de transición diferentes con $\delta(r,0)=p$, $\delta(r,1)=q$, $\delta(p,1)=\delta(q,1)=r$
- c) Existen 6 funciones de transición diferentes con $\delta(r,0)=p$, $\delta(r,1)=q$, $\delta(p,1)=\delta(q,1)=r$, $\delta(p,0)=\delta(q,0)$

Solución: C. Desde cada estado puede darse una transición hacia cada uno de los tres estados, y etiquetada por dos posibles símbolos, lo que supone 6 posibilidades por estado. El número de funciones de transición posibles es por tanto: $3^6 = 729$. Fijando las transiciones que parten del estado r , y las que parten de los estados p y q etiquetadas por el valor 1, sólo quedan tres posibles transiciones partiendo del estado p y otras tantas partiendo del estado q ; lo que permite $3 \times 3 = 9$ funciones de transición posibles. Con la condición adicional $\delta(p,0) = \delta(q,0)$ sólo quedan tres funciones de transición alternativas, una por estado.

10. Sea L el lenguaje de alfabeto $\Sigma = \{a,b,c\}$ y cadenas de forma wcv , donde w y v son cadenas de a 's y b 's y w y v tienen la misma longitud pero v **no** es la cadena inversa de w . Dicho lenguaje coincide con el generado por la gramática

- a) $S \rightarrow aSa, S \rightarrow bSb, S \rightarrow aRb, S \rightarrow bRa, R \rightarrow aRa, R \rightarrow bRb, R \rightarrow aRb, R \rightarrow bRa, R \rightarrow c$.
- b) $S \rightarrow aSa, S \rightarrow bSb, S \rightarrow aRb, S \rightarrow bRa, R \rightarrow aRb, R \rightarrow bRa, R \rightarrow c$.
- c) $S \rightarrow aSa, S \rightarrow bSb, S \rightarrow aRb, S \rightarrow bRa, R \rightarrow aRa, R \rightarrow bRb, R \rightarrow c$.

Solución: A. Como w y v no pueden ser cadenas inversas, al menos debe existir un par de caracteres de w y v que ocupen posiciones simétricas con respecto al centro de la cadena y sean diferentes. Por tanto, toda cadena de L puede ser generada por la gramática, y toda cadena generada por la gramática pertenece a L . La respuesta **b** no es correcta porque esa gramática no genera la cadena $aacab$, y la **c** no es correcta porque la gramática no genera la cadena $aacbb$.

11. Sea L_{100} el conjunto de los lenguajes que tienen al menos 100 cadenas. Sea L_R el conjunto de los lenguajes regulares, L_I el conjunto de los lenguajes independientes del contexto y L_E el conjunto de los lenguajes estructurados por frases. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

- a) $L_{100} \subset L_R$
- b) $L_{100} \not\subset L_R, L_{100} \subset L_I$
- c) $L_{100} \not\subset L_E$

Solución: C. L_{100} contiene, entre otros, todos los lenguajes no estructurados por frases.

12. Considere el lenguaje definido por el conjunto de cadenas de 0's y 1's que representan en binario números divisibles por 4. El tipo de autómata más sencillo que reconoce este lenguaje es:

- a) Autómata finito determinista
- b) Autómata de pila
- c) Máquina de Turing

Solución: A. Se trata del lenguaje representado por la expresión regular $(0 \cup 1)^*00 \cup 0$.

13. Se define la diferencia simétrica de dos lenguajes L y L' como el conjunto de cadenas que están exclusivamente en L o exclusivamente en L' . Si L y M son regulares, el lenguaje definido por su diferencia simétrica:

- a) Siempre es regular
- b) No siempre es regular, pero siempre es independiente del contexto
- c) Puede no ser estructurado por frases

Solución: A. Para probar este resultado, basta con expresar la diferencia simétrica en función de otras operaciones entre lenguajes que preservan la regularidad. La diferencia simétrica entre L y M coincide con: $(L \cup M) - (L \cap M)$.

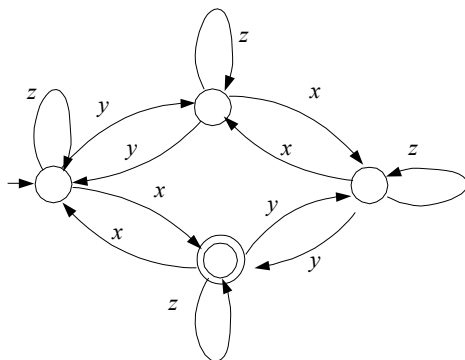
14. El lenguaje $L = \{w | w \text{ contiene un número par de } 0's, \text{ o exactamente dos } 1's\}$ de alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$, es generado por la expresión regular:

- a) $(1^*0 \cdot 1^*0 \cdot 1^*0^*) \cup (0^*1 \cdot 0^*1 \cdot 0^*)$
- b) $(1^*0 \cdot 1^*0 \cdot 1^*)^* \cup (0^*1 \cdot 0^*1 \cdot 0^*)$
- c) $(1 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 1)^* \cup (0^*1 \cdot 0^*1 \cdot 0^*)$

Solución: B. $(1^*0 \cdot 1^*0 \cdot 1^*)^*$ genera el lenguaje $L = \{w | w \text{ contiene un número par de } 0's\}$ y $(0^*1 \cdot 0^*1 \cdot 0^*)$ el lenguaje $L = \{w | w \text{ contiene exactamente dos } 1's\}$. Contraejemplo para A: no debería generar 000. Contraejemplo para C: no genera 00.

15. El lenguaje reconocido por el autómata de la figura, de alfabeto $\Sigma = \{x, y, z\}$ es el conjunto de las cadenas generadas por la expresión regular

- a) $(x^*y^*)^* \cup (y^*x^*)^*$
- b) $(y \cdot x \cdot x^*)^* \cup (xx \cdot y \cdot y^*)^*$
- c) Ninguna de las anteriores



Solución: C. El lenguaje aceptado por el autómata de la figura consiste en el conjunto de las cadenas con un número impar de xs y un número par de ys .

16. La máquina de Turing definida como: $M = \{\{l, q, p, r, s\} \{a, b\} \{a, b, \Delta\}, \delta, l, r\}$

$\delta(l, \Delta) = (q, R)$
 $\delta(q, a) = (q, R)$
 $\delta(q, b) = (p, R)$
 $\delta(q, \Delta) = (r, R)$
 $\delta(p, b) = (p, R)$
 $\delta(p, a) = (s, R)$
 $\delta(p, \Delta) = (r, R)$
 $\delta(s, a) = (s, R)$
 $\delta(s, b) = (s, R)$
 $\delta(s, \Delta) = (s, R)$

- a) Siempre termina sus cálculos
- b) Reconoce el lenguaje $a^* \cdot b^*$
- c) Reconoce el lenguaje $a^n b^m$, $n \geq 0$, $m > 0$

Solución: B. La **A** es falsa porque con la configuración inicial $\underline{a}b\Delta\Delta\Delta\Delta\dots$ no termina nunca sus cálculos. La **C** es falsa porque la máquina acepta todas las cadenas de la forma a^* , que no pertenecen a ese lenguaje.

Febrero 2000, 2ª semana

17. El resultado de concatenar dos lenguajes independientes de contexto, ¿es siempre un lenguaje independiente de contexto?

- a) Sí, siempre
- b) No, nunca
- c) Depende de los casos

Solución: A.

18. La estrella de Kleene de un lenguaje independiente de contexto, ¿es siempre un lenguaje independiente de contexto?

- a) Sí, siempre
- b) No, nunca
- c) Depende de los casos

Solución: A. Partiendo de una gramática independiente de contexto que genere L , renombramos S como S' , y añadimos las reglas $S \rightarrow S'S$ y $S \rightarrow \lambda$.

19. Las máquinas de Turing se diferencian de los autómatas finitos y de los autómatas de pila en que

- a) En las máquinas de Turing la cabeza lectora puede retroceder.
- b) Las máquinas de Turing pueden escribir sobre su cinta.

- c) Las dos afirmaciones anteriores son ciertas

Solución: C.

20. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:

- a) El número total de lenguajes no regulares es finito
- b) El número total de lenguajes regulares es finito
- c) Ninguna de las afirmaciones anteriores es cierta

Solución: C.

21. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:

- a) En un diagrama completo que represente a un autómata finito determinista, de cada estado sale un arco por símbolo y sólo uno
- b) Los autómatas finitos no deterministas son más potentes que los autómatas finitos deterministas
- c) Ninguna de las afirmaciones anteriores es cierta

Solución: A.

22. Un lenguaje generado por una gramática independiente de contexto

- a) Es siempre regular
- b) Nunca es regular
- c) Depende de los casos

Solución: C.

23. Sea L un lenguaje generado por una gramática independiente del contexto en forma normal de Chomsky. ¿Existe otra gramática en forma normal de Chomsky que genere el complemento de L ?

- a) Sí, para todo L
- b) No, nunca
- c) Depende de L

Solución: B. El complemento de L contiene la cadena vacía.

24. El número mínimo de estados de un autómata finito no determinista es

- a) Uno.
- b) Dos.
- c) Depende del alfabeto sobre el que está definido.

Solución: A.

25. Sea L un lenguaje y a un símbolo. Denominamos L/a al lenguaje de las cadenas w tales que wa está en L . Si L es regular, entonces L/a :

- a) Siempre es regular
- b) No siempre es regular, pero siempre es independiente del contexto
- c) Puede no ser estructurado por frases

Solución: A. L puede expresarse como la unión de dos lenguajes regulares: el lenguaje de las cadenas de L que terminan en a , L_a , y el lenguaje de las cadenas de L que no terminan en a . L_a coincide con la concatenación del lenguaje L/a con el lenguaje $\{a\}$, de donde se deduce que L/a es un lenguaje regular. La demostración de esto se basa en que, si existe un autómata finito determinista que reconoce L_a , a partir de este autómata es fácil encontrar el autómata finito determinista que reconoce L/a . Sea M el diagrama que representa a un autómata que reconoce a L_a . Necesariamente, a todo estado final de M llega un arco etiquetado por a . Podemos obtener el diagrama de un autómata que reconozca a L/a sin más que eliminar todos los estados finales de M y los arcos que a ellos llegan, convertir en estados finales los estados de los que partían los citados arcos, y añadir un arco en forma de bucle etiquetado por a en cada uno de estos nuevos estados finales en caso de que los estados finales de M incluyeran un tal bucle.

26. Considere el lenguaje formado por cadenas que consisten en bloques de 0's y bloques de 1's, de forma que cada bloque de n ceros va seguido de un bloque de al menos n 1's. Un ejemplo de cadena de este lenguaje es la cadena 00110001111011. La cadena vacía se considera incluida en el lenguaje. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es **verdadera**:

- a) Existe una expresión regular que representa el lenguaje
- b) El lenguaje coincide con el generado por la gramática: $S \rightarrow AAS$, $S \rightarrow \lambda$, $S \rightarrow A$, $A \rightarrow 0AI$, $A \rightarrow 0BI$, $B \rightarrow BI$, $B \rightarrow \lambda$
- c) Existe una gramática no regular en forma normal de Chomsky que genera el lenguaje

Solución: B. : En toda cadena generada por la gramática, cada 0 que aparece es resultado de aplicar la regla $A \rightarrow 0AI$ o la $B \rightarrow 0BI$. Por eso todas las cadenas generadas por la gramática pertenecen al lenguaje del enunciado. Para toda cadena que pertenece al lenguaje, con m bloques de 0's, si m es par la cadena se puede generar aplicando $m/2$ veces la regla $S \rightarrow AAS$; si m es impar, puede generarse aplicando $(m-1)/2$ veces la regla $S \rightarrow AAS$ y una vez la regla $S \rightarrow A$. Cada bloque de n 0's ($n \geq 1$) se genera aplicando $n-1$ veces la regla $A \rightarrow 0AI$, una vez la regla $A \rightarrow 0BI$; si hay más 1's que 0's se aplica la regla $B \rightarrow BI$ tantas veces como sea necesario.

27. El lenguaje $L = \{0^i 1^j 2^k \mid i < j < k\}$:

- a) Es independiente del contexto determinista
- b) Es independiente del contexto no determinista
- c) Es estructurado por frases y no independiente del contexto

Solución: C. El lenguaje no verifica el lema de bombeo.

28. Considere la gramática: $S \rightarrow 0S$, $S \rightarrow IS$, $S \rightarrow S0$, $S \rightarrow \lambda$. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es **falsa**:

- a) Existen derivaciones distintas que generan cadenas idénticas
- b) No existe un autómata de pila que reconozca el lenguaje generado y vacíe siempre su pila antes de llegar a un estado de aceptación
- c) La gramática es equivalente a $S \rightarrow 0S$, $S \rightarrow IS$, $S \rightarrow \lambda$.

Solución: B. La cadena 0, p.e., admite dos derivaciones. La regla $S \rightarrow S0$ es innecesaria. Es fácil diseñar un autómata de pila que reconozca el lenguaje generado y vacíe siempre su pila antes de llegar a un estado de aceptación (de hecho la gramática genera un lenguaje regular, el representado por la expresión regular $(0 \cup 1)^*$).

29. Si k es el número de estados de un autómata finito no determinista, siempre es posible diseñar un autómata finito determinista equivalente con un número de estados:

- a) $k+2$
- b) $2k$
- c) 2^k

Solución: C. Es fácil encontrar ejemplos donde las opciones **A** y **B** no son posibles. La opción **C** queda garantizada por el procedimiento de obtención de un autómata determinista equivalente a un autómata no determinista presentada en el texto de Brookshear.

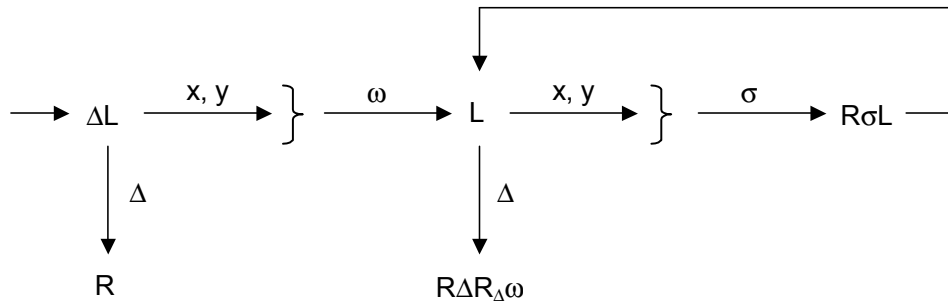
30. El lenguaje $L = \{w | w \text{ contiene al menos dos } 0\text{'s y un } 1\}$ de alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$, es generado por la expresión regular:

- a) $(1 \cdot 0 \cdot 0 \cup 0 \cdot 1 \cdot 0 \cup 0 \cdot 0 \cdot 1)(1 \cup 0)^*$
- b) $(1 \cup 0)^*(1 \cdot 0 \cdot 0 \cup 0 \cdot 1 \cdot 0 \cup 0 \cdot 0 \cdot 1)(1 \cup 0)^*$
- c) Ninguna de las anteriores

Solución: C. Ninguna de las dos expresiones representa la cadena 0110.

31. La máquina de Turing de la figura:

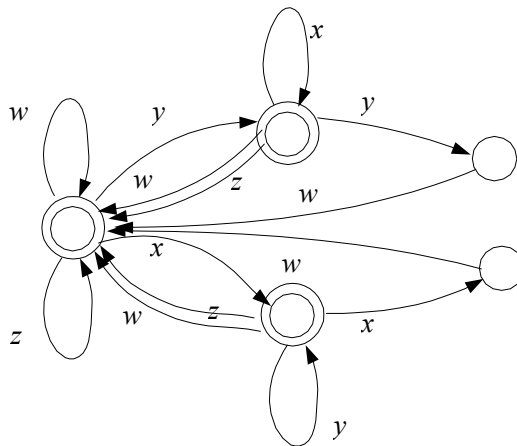
- a) Desplaza una celda hacia la derecha a los símbolos contenidos en las celdas situadas entre la celda actual, y la primera celda en blanco que se encuentra a la izquierda de la celda actual
- b) Desplaza una celda hacia la derecha a todo símbolo distinto de Δ que esté contenido en una celda situada a la izquierda de la celda actual
- c) Ninguna de las afirmaciones anteriores es cierta.



Solución: A. Se trata de la máquina S_R

32. El lenguaje reconocido por el autómata de la figura, de alfabeto $\Sigma = \{x, y, z, w\}$ es:

- a) El conjunto de las cadenas donde el patrón xy va seguido de una w y el patrón yx siempre sigue a una z
- b) El conjunto de las cadenas donde el patrón yx va seguido de una w y el patrón yx siempre sigue a una z
- c) Ninguno de los anteriores



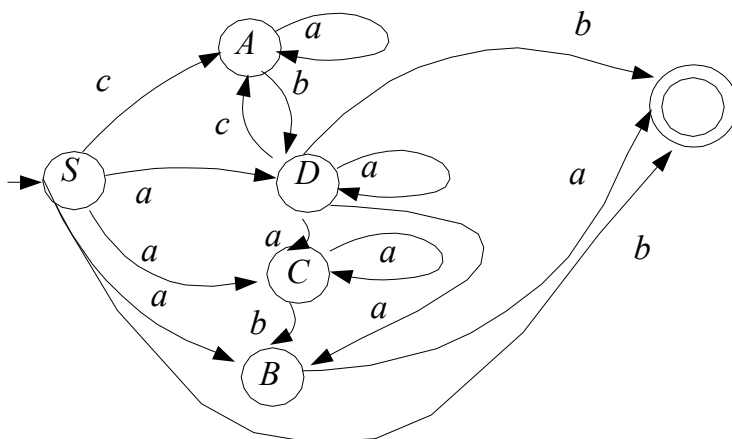
Solución: C. El autómata acepta, p.e., las cadenas xy^*

Septiembre 2004, original

33. Si L_1 es el lenguaje generado por la gramática G y L_2 el reconocido por el autómata M , entonces (Nota: el símbolo \subset denota la relación de inclusión estricta):

- a) $L_1 \subset L_2$
- b) $L_2 \subset L_1$
- c) $L_1 = L_2$

$G = \{S \rightarrow aD, S \rightarrow b, S \rightarrow cA, S \rightarrow aB, S \rightarrow aC, D \rightarrow aD, D \rightarrow b, D \rightarrow cA, D \rightarrow aB, D \rightarrow aC, A \rightarrow aA, A \rightarrow bD, B \rightarrow a, C \rightarrow aC, C \rightarrow bB\}$.

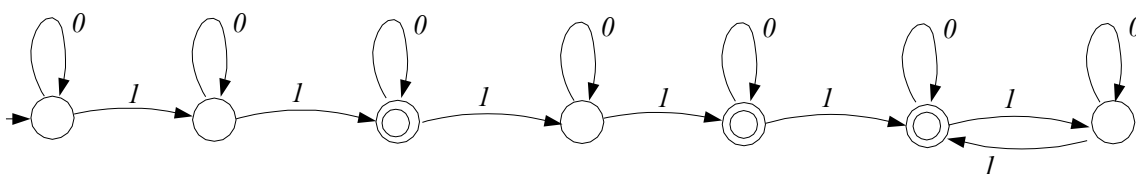


Solución: C. Nótese que el autómata se deriva de la gramática aplicando el procedimiento indicado en la página 55 del texto de Brookshear.

34. Sea L el lenguaje sobre el alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ cuyas cadenas verifican las siguientes restricciones: “si una cadena tiene menos de cinco 1’s, entonces tiene un número par de 1’s; si una cadena tiene cinco 1’s o más, entonces contiene un número impar de 1’s; cualquier cadena contiene al menos un 1”. El lenguaje L :

- a) Es regular
- b) Es independiente del contexto determinista y no es regular
- c) Es independiente del contexto no determinista en sentido estricto

Solución: A. Es reconocido por el siguiente autómata finito determinista:



35. Sean las expresiones regulares $R_1 = (ab^* \cup ba^*)^* \cdot ab^*$ y $R_2 = (a \cup b)^* \cdot ab^*$ que generan, respectivamente, los lenguajes L_1 y L_2 . Entonces:

- a) $L_1 \subset L_2$
- b) $L_1 = L_2$
- c) $L_2 \subset L_1$

Solución: B. Ambas expresiones regulares generan el lenguaje de las cadenas de a 's y b 's que tienen por lo menos una a .

36. Dado el lenguaje $L = \{a, abb, ba, bbba, b\}$ indique cuántas cadenas de longitud estrictamente menor que 3 hay en L^* :

- a) 7
- b) 6
- c) 5

Solución: A. $L^* \cap \{w \in L^* \mid |w| < 3\} = \{\lambda, a, b, aa, ab, ba, bb\}$

37. Considere las gramáticas $G_1 = \{S \rightarrow Cbb, S \rightarrow a, S \rightarrow Ba, S \rightarrow \lambda, B \rightarrow a, B \rightarrow Ba, C \rightarrow Sa, C \rightarrow a, C \rightarrow ab\}$ y $G_2 = \{S \rightarrow CD, S \rightarrow a, S \rightarrow BF, S \rightarrow \lambda, B \rightarrow a, B \rightarrow BF, C \rightarrow SF, C \rightarrow a, C \rightarrow FE, D \rightarrow EE, E \rightarrow b, F \rightarrow a\}$. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

- a) G_2 genera el mismo lenguaje que G_1 y sólo G_2 está en forma normal de Chomsky
- b) Ninguna de las dos gramáticas está en forma normal de Chomsky
- c) Las gramáticas generan lenguajes distintos

Solución: B. La gramática G_2 se ha obtenido a partir de la gramática G_1 sustituyendo la regla $S \rightarrow Cbb$ por las reglas $S \rightarrow CD$, $D \rightarrow EE$ y $E \rightarrow b$; la regla $S \rightarrow Ba$ por las reglas $S \rightarrow BF$ y $F \rightarrow a$; la regla $C \rightarrow abB$ por las reglas $C \rightarrow FG$ y $G \rightarrow EB$ y las reglas $B \rightarrow Ba$, $C \rightarrow Sa$ y $C \rightarrow ab$ respectivamente por $B \rightarrow BF$, $C \rightarrow SF$ y $C \rightarrow FE$. Generan pues el mismo lenguaje, pero ninguna de ellas se encuentra en la forma normal de Chomsky, dada la inevitable presencia de una regla λ .

38. Sea un autómata finito $M = \{S, \Sigma, \iota, F\}$ que reconoce el lenguaje L , y sea $M^C = \{S, \Sigma, \iota, S-F\}$ (diferencia de los conjuntos S y F) el autómata finito que reconoce el lenguaje complementario de L , L^C (observe que M^C se ha obtenido a partir de M intercambiando estados de no aceptación por estados de aceptación y viceversa). Entonces:

- a) Si M es el autómata de menor número de estados que reconoce L , entonces M^C es el autómata de menor número de estados que reconoce L^C
- b) Si M es el autómata de menor número de estados que reconoce L , entonces siempre existe un autómata N con menor número de estados que M^C que reconoce L^C
- c) Si M es el autómata de menor número de estados que reconoce L , M^C podrá o no ser el autómata de menor número de estados que reconoce L^C

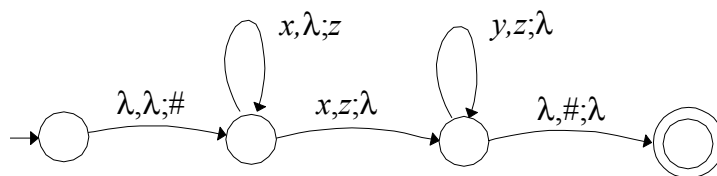
Solución: A. Demostración por reducción al absurdo: Supongamos que existe un autómata N tal que el lenguaje reconocido por N es L^C y su número de estados es menor que el de M^C . Dado que el autómata complementario de N reconoce el lenguaje $(L^C)^C = L$, y su número de estados es menor que el de M , entonces M no sería el autómata de menor número de estados que reconoce L .

39. Sea el lenguaje $L = \{a^m b^j c^{m-1} \mid m > 0, 0 < j \leq 3\}$. Indica cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

- a) L cumple el lema de bombeo de los lenguajes independientes del contexto y es independiente del contexto
- b) L cumple el lema de bombeo pero no es independiente del contexto
- c) L no cumple el lema de bombeo

Solución: A. Rescribamos la cadena $a^m b^j c^{m-1}$ como $aa^{m-1}b^j c^{m-1}$. La satisfacción del lema se verifica fácilmente considerando las subcadenas $s = a$, $v = a^{m-1}$, $u = b^j$, $w = c^{m-1}$, $t = \lambda$. La siguiente gramática independiente del contexto genera el lenguaje: $S \rightarrow aM$, $M \rightarrow B$, $B \rightarrow b$, $B \rightarrow bb$, $B \rightarrow bbb$, $M \rightarrow aMc$.

40. Considere el siguiente autómata de pila e indique cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:



- a) El autómata es determinista y acepta el lenguaje $x^{n+2}y^n$
- b) El autómata acepta el lenguaje $x^{n+2}y^n$ pero **no** es determinista
- c) El autómata no siempre llega al estado de aceptación con la pila vacía

Solución: B. El autómata no es determinista (se comprueba fácilmente al analizar la cadena xx) y siempre vacía la pila antes de llegar al estado de aceptación (la transición que lleva al estado de aceptación lee la almohadilla inicialmente introducida).

41. Indique cuál de los siguientes lenguajes **no** es regular

- a) $L = \{a^n b^m \mid n \geq 1, m \geq 0, n \text{ múltiplo de } 3, m \text{ par}\}$
- b) $L = \{v w v \mid v, w \in \{0, 1\}^*, |v| = 2\}$
- c) $L = \{0^n \mid n \text{ primo}\}$

Solución: C. El lenguaje $L = \{a^n b^m \mid n \geq 1, m \geq 0, n \text{ múltiplo de } 3, m \text{ par}\}$ es generado por la expresión regular $(aaa)^*aaa(bb)^*$, y el lenguaje $L = \{v w v \mid v, w \in \{0, 1\}^*, |v| = 2\}$ por $[00(0 \cup 1)^* 00] \cup [11(0 \cup 1)^* 11] \cup [01(0 \cup 1)^* 01] \cup [10(0 \cup 1)^* 10]$. El lenguaje $L = \{0^n \mid n \text{ primo}\}$ no verifica el lema de bombeo y por tanto no puede ser regular.

42. Sea L un lenguaje estructurado por frases decidable y $c(L)$ el complementario de L . la concatenación de ambos, $L \cdot c(L)$

- a) Siempre es decidable por máquinas de Turing
- b) Puede no serlo, porque el complementario de un lenguaje decidable puede no ser decidable
- c) Puede no serlo, porque la concatenación de dos lenguajes decidibles puede no ser decidable

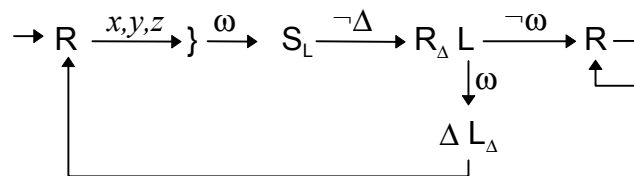
Solución: A. L es decidable por máquinas de Turing. Por tanto, $c(L)$ y $L \cdot c(L)$ también lo son.

43. Sea un lenguaje estructurado por frases L . El lenguaje formado al invertir cada cadena de L (por ejemplo, al invertir la cadena xyz se obtiene zyx):

- a) Es estructurado por frases si y sólo si L es independiente del contexto
- b) Puede **no** ser estructurado por frases aunque L sea independiente del contexto
- c) Siempre es estructurado por frases

Solución: C. Es sencillo diseñar una máquina de Turing que reconozca tal lenguaje: basta con diseñar una máquina que invierta cadenas y componerla con una máquina que reconozca L .

44. Dado el alfabeto $\{x, y, z\}$, la siguiente máquina de Turing:



- a) No reconoce ningún lenguaje
- b) Reconoce el lenguaje formado por los palíndromos de $\{x, y, z\}$
- c) Reconoce el lenguaje $\{x, y, z\}^*$

Solución: B. La máquina reconoce el lenguaje formado por los palíndromos de $\{x, y, z\}$

45. La unión de un lenguaje independiente de contexto con un lenguaje estructurado por frases y no independiente de contexto:

- a) Es estructurado por frases pero nunca es independiente del contexto
- b) Es independiente del contexto pero nunca es regular
- c) Puede ser regular

Solución: C. Escogemos un lenguaje L_1 independiente del contexto tal que su complementario, $c(L_1)$, no sea independiente del contexto. Como L_1 es estructurado por frases decidable, $c(L_1)$ es estructurado por frases. La unión de L_1 y $c(L_1)$ es Σ^* , que es regular.

46. Indique cuál de las siguientes situaciones **no** es posible cuando una máquina de Turing determinista examina una cadena:

- a) La máquina no se detiene nunca
- b) Se produce una terminación anormal (es decir, la cabeza lectora se desplaza a la izquierda de la primera celda de la cinta)
- c) La máquina abandona los cálculos por no encontrar ninguna transición aplicable

Solución: C. Puesto que la máquina es determinista, necesariamente encuentra siempre una transición aplicable.

47. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es **falsa**:

- a) Para toda máquina de Turing no determinista existe una gramática estructurada por frases que genera el mismo lenguaje que la máquina acepta
- b) La tesis de Turing implica que los lenguajes más generales que existen son los lenguajes estructurados por frases
- c) La tesis de Turing implica que ningún ordenador podrá reconocer un lenguaje no estructurado por frases

Solución: B. Existen lenguajes no estructurados por frases (ver la sección 3.4 del texto de Brookshear).

48. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:

- a) El número total de lenguajes no regulares es finito
- b) El número total de lenguajes no regulares es infinito contable

c) El número total de lenguajes regulares es infinito

Solución: C. El conjunto de los lenguajes regulares es infinito contable. Como el conjunto de todos los lenguajes posibles es infinito incontable, y este conjunto puede verse como la unión del conjunto de los lenguajes regulares y el conjunto de los lenguajes no regulares, entonces el conjunto de los lenguajes no regulares es infinito incontable (de otro modo, la unión de dos conjuntos contables sería un conjunto contable).

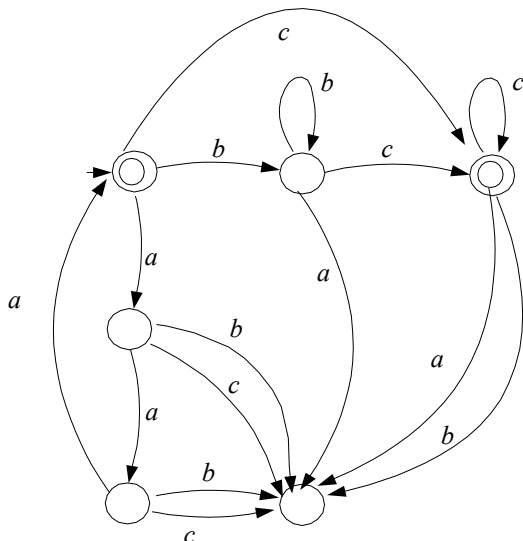
Septiembre 2004, reserva

49. Sea $L_1 = \{a^n b^m c^p \mid n \geq 0 \text{ y múltiplo de } 3, m \geq 0, p > 0\}$ y L_2 el reconocido por el autómata M de la figura, entonces (Nota: el símbolo \subset denota la relación de inclusión estricta):

a) $L_1 \subset L_2$

b) $L_2 \subset L_1$

c) $L_1 = L_2$



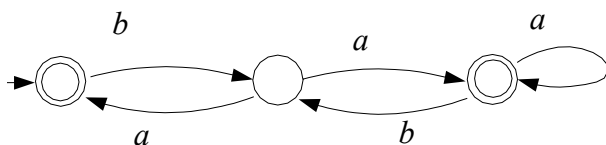
Solución: C.

50. Sea L_1 el lenguaje generado por la expresión regular $R = (b(aa^*b)^*a)^* \cup \lambda$ y L_2 el reconocido por el autómata de la figura. Entonces:

a) $L_1 \subset L_2$

b) $L_1 = L_2$

c) $L_2 \subset L_1$

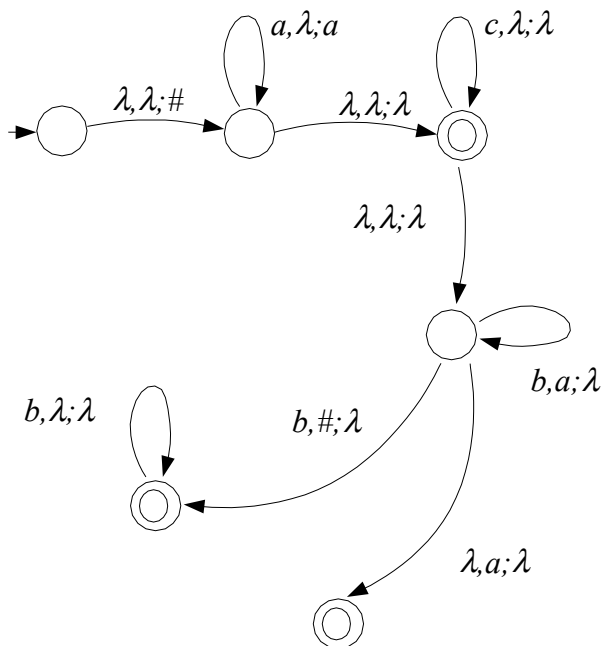


Solución: A. Toda cadena generada por la expresión regular es aceptada por el autómata. Sin embargo el autómata acepta, p.e., la cadena baa , que no genera la expresión regular.

51. Sea el lenguaje $L = \{(a^i c^j b^k \mid j \geq 0, i \neq k)\}$. El autómata más sencillo que reconoce L es:

- a) Un autómata finito
- b) Un autómata de pila
- c) Una máquina de Turing

Solución: B. El siguiente autómata de pila reconoce L :



52. Dado el alfabeto $\Sigma = \{0, 1, \lambda, \emptyset, (,), \cup, ^\circ, *\}$, el lenguaje formado por las cadenas que constituyen expresiones regulares válidas (esto es, el conjunto de expresiones regulares del alfabeto $\{0, 1\}$):

- a) Es un lenguaje regular
- b) Es un lenguaje independiente del contexto y no regular
- c) Es un lenguaje estructurado por frases y no independiente del contexto

Solución: B. El requisito de incluir paréntesis compensados hace imposible que se trate de un lenguaje regular. Una gramática independiente del contexto que genera el lenguaje es la siguiente: $G = \{S \rightarrow \lambda \mid \emptyset \mid 0 \mid 1 \mid S^c S \mid S^* \mid S \cup S \mid (S)\}$.

53. Sea el lenguaje $L_1 = \{a^n b^m c^p \mid n \geq 0, m \geq 1, p \geq n+m\}$, y el lenguaje L_2 el generado por la gramática $G = \{S \rightarrow aSc, S \rightarrow B, B \rightarrow bBc, B \rightarrow bC, C \rightarrow cC, C \rightarrow c\}$.

- a) $L_1 \subset L_2$
- b) $L_2 \subset L_1$
- c) $L_1 = L_2$

Solución: C. Nótese que las reglas garantizan que las cadenas de L_2 contienen al menos una c por cada a ó b , y que siguen el patrón de las cadenas del lenguaje L_1 .

54. Indique cuál de los siguientes lenguajes **no** es regular:

- a) $L = \{w \in \{0, 1, 2\}^* \mid \text{el número de 0's es distinto del número de 1's}\}$

- b) $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{el antepenúltimo símbolo de } w \text{ es un } 1\}$
- c) $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \text{tal que } w \text{ contiene un número par de } a\text{'s y un número par de } b\text{'s}\}$

Solución: A. La expresión regular que representa el lenguaje del apartado b) es $(0 \cup 1)^*(100 \cup 101 \cup 110 \cup 111)$. Para construir el autómata finito que reconoce el lenguaje del apartado c), puede seguirse el ejemplo del ejercicio 1 del primer capítulo.

55. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:

- a) Con un autómata de pila no puede reconocerse un lenguaje regular
- b) Para reconocer un lenguaje regular mediante un autómata de pila no es necesario que el alfabeto de la pila contenga ningún símbolo
- c) Para reconocer un lenguaje regular mediante un autómata de pila el alfabeto de la pila debe contener al menos un símbolo

Solución: B. Cualquier lenguaje independiente del contexto puede ser aceptado por un autómata de pila, y todos lenguajes regulares son independientes del contexto. Para reconocer un lenguaje regular mediante un autómata de pila no es necesario que el alfabeto de la pila contenga ningún símbolo, ya que en realidad no se necesita usar la pila.

56. Considere las gramáticas $G_1 = \{S \rightarrow aS, S \rightarrow bB, S \rightarrow \lambda, B \rightarrow bB, B \rightarrow aS\}$ y $G_2 = \{S \rightarrow aD, S \rightarrow bB, S \rightarrow a, S \rightarrow \lambda, B \rightarrow bB, B \rightarrow aD, B \rightarrow a, D \rightarrow aD, D \rightarrow bB, D \rightarrow a\}$. Siendo L_1 y L_2 los lenguajes generados, respectivamente, por G_1 y G_2 , indique cuál de las siguientes afirmaciones es **verdadera**:

- a) G_2 es el resultado de transformar G_1 para eliminar la regla $S \rightarrow aS$ pero no está en la forma normal de Chomsky, y $L_2 = L_1$
- b) G_2 es el resultado transformar G_1 para obtener la forma normal de Chomsky, y $L_2 = L_1$
- c) Ni G_1 ni G_2 están en la forma normal de Chomsky, y $L_2 \neq L_1$

Solución: A. La regla $S \rightarrow aS$ se ha sustituido por las reglas $S \rightarrow aD$ y $S \rightarrow a$, con el no terminal D definido por las reglas $D \rightarrow aD, D \rightarrow bB, D \rightarrow a$. En función de este nuevo no terminal la regla $B \rightarrow aS$ se escribe $B \rightarrow aD, B \rightarrow a$. Ambas gramáticas incluyen una regla λ y por tanto no responden a la forma normal de Chomsky.

57. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es **falsa**:

- a) Si L es un subconjunto de 0^* entonces L^* es un lenguaje regular
- b) El lenguaje constituido por las cadenas inversas de $L = \{0^m 1^n 0^{m+n} \mid n \geq 1, m \geq 1\}$ es regular
- c) El lenguaje complementario de $L = \{0^n \mid n \text{ primo}\}$ no es regular

Solución: B. El lenguaje $L = \{0^{m+n} 1^n 0^m \mid n \geq 1, m \geq 1\}$ no es regular.

58. Todo autómata finito de n estados, cuyo alfabeto Σ contiene m símbolos:

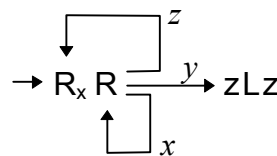
- a) Debe tener $m \times n$ transiciones
- b) Puede tener un número menor de $m \times n$ transiciones, aunque sea determinista

- c) Si es no determinista puede tener un número mayor o menor de $m \times n$ transiciones

Solución: C.

59. Dado el alfabeto $\{x, y, z\}$, indique cuál de las siguientes afirmaciones es cierta con respecto a la siguiente máquina de Turing:

- a) Busca en su cinta la secuencia xy y la sustituye por zz
- b) Siempre se detiene
- c) Nunca tiene una terminación anormal



Solución: C. Dada la configuración inicial $\underline{x}y\Delta\Delta\Delta\dots$, la máquina no se detiene nunca, ni sustituye la secuencia xy por zz . La máquina no puede tener nunca una terminación anormal porque sólo desplaza la cabeza de lectura hacia la izquierda después de haberla desplazado al menos dos veces hacia la derecha.

60. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es **falsa**:

- a) Si L es estructurado por frases y no contiene la cadena vacía **no** es posible encontrar una gramática en forma normal de Chomsky que genere L
- b) Si L es independiente de contexto y no contiene la cadena vacía, existe una gramática en forma normal de Chomsky que genera L
- c) La unión de un lenguaje independiente de contexto con un lenguaje estructurado por frases y no independiente de contexto, puede ser regular

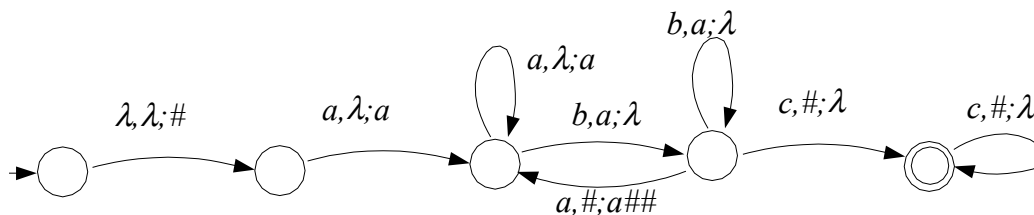
Solución: A. Si L es independiente de contexto y no contiene la cadena vacía, existe una gramática en forma normal de Chomsky que genera L . Para probar la certeza de la tercera definición escogemos un lenguaje L_1 independiente del contexto tal que su complementario, $c(L_1)$, no sea independiente del contexto. Como L_1 es estructurado por frases decidible, $c(L_1)$ es estructurado por frases. La unión de L_1 y $c(L_1)$ es Σ^* , que es regular.

61. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:

- a) La concatenación de un lenguaje regular con su complementario puede no ser regular.
- b) La concatenación de un lenguaje estructurado por frases decidible y su complementario puede no ser estructurado por frases.
- c) El complementario de un lenguaje independiente de contexto puede ser regular.

Solución: C. El complementario de un lenguaje regular es regular, y la concatenación de dos lenguajes regulares es siempre regular. El complementario de un lenguaje estructurado por frases decidible es estructurado por frases, y la concatenación de dos lenguajes estructurados por frases es un lenguaje estructurado por frases. Finalmente, p.e., el complementario de un lenguaje independiente del contexto que sea a su vez regular es regular, luego la afirmación c) es cierta.

62. Sea el lenguaje $L = \{(a^n b^n)^m c^m \mid n, m > 0\}$, y sea M el autómata de la figura. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es **falsa**:



- a) M vacía siempre su pila antes de llegar a un estado de aceptación
- b) M no reconoce L
- c) M acepta todas las cadenas de L

Solución: B. M reconoce L y por tanto acepta todas sus cadenas. Siempre vacía su pila antes de llegar al estado de aceptación, ya que sólo es posible llegar a este estado tras haber leído el símbolo $\#$.

63. Indique cuál de las siguientes Máquinas de Turing transforma una configuración de cinta $\underline{\Delta}xxy\Delta yxx\Delta\Delta\Delta\dots$ en $\underline{\Delta}xyyxx\Delta\Delta\Delta\dots$

- a) $\rightarrow R\Delta L\Delta yR\Delta R\Delta L\Delta L\Delta$
- b) $\rightarrow R_y R_y S_L L\Delta$
- c) $\rightarrow R_\Delta S_L L\Delta$

Solución: C. Las máquinas de Turing de los apartados a) y b) transforman la configuración de partida, respectivamente, en las configuraciones $\underline{\Delta}\Delta\Delta y\Delta yxx\Delta\Delta\Delta\dots$ $\Delta xxy\underline{\Delta}xx\Delta\Delta\Delta\dots$

64. Indique cuál es el tipo de autómata más sencillo (menos potente) capaz de aceptar el lenguaje $\{x^n\} \cup \{x^n y^n\}$, donde n es un número entero positivo.

- a) Un autómata finito
- b) Un autómata de pila determinista.
- c) Un autómata de pila no determinista

Solución: B. El siguiente autómata de pila determinista reconoce L :

