

CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA

2/

- 1º lo primero es comprobar que la matriz es regular (determinante $\neq 0$) ya que si fuera singular (determinante $= 0$), no se puede calcular su inversa.
- 2º Calculamos la matriz transpuesta (A^t)
- 3º calculamos los adjuntos de la matriz transpuesta. El adjunto de un valor es lo que queda en la matriz cuando tachamos su fila y columna.
- 4º Ajustamos signos. Tenemos que cambiar los signos de todos los valores, si procede, siguiendo la regla de paridad.

+	-	+	-	...
-	+	-	+	...
- 5º Dividimos cada valor de la adjunta de la transpuesta entre el determinante
- 6º Con esas operaciones, tendríamos la inversa, que para comprobarlo sabemos que cumple lo siguiente:

$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

$A \cdot A^{-1} = I$

Ejemplo.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = -5, \text{ es una matriz regular, por tanto tiene inversa.}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Adj}(A^t) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \\ 7 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{6}{-5} & \frac{5}{-5} & \frac{2}{-5} \\ -\frac{4}{-5} & \frac{5}{-5} & \frac{3}{-5} \\ \frac{7}{-5} & \frac{5}{-5} & \frac{4}{-5} \end{pmatrix}$$

SISTEMAS DE ECUACIONES

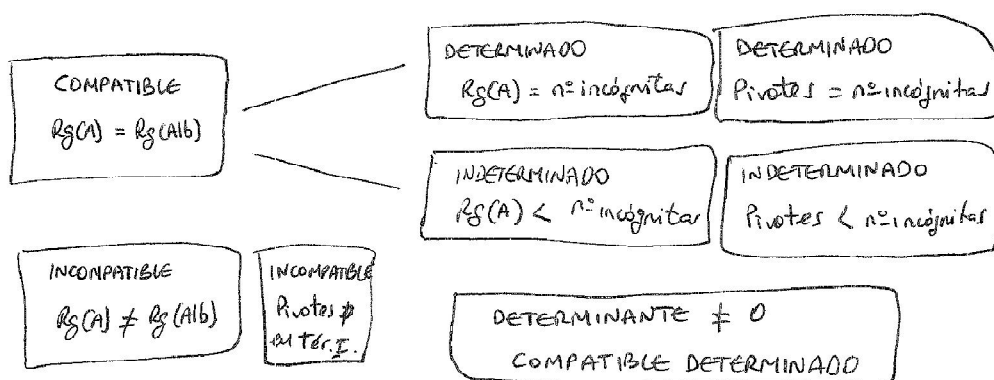
HOMOGÉNEOS \rightarrow Cuando los términos independientes son 0.

NO HOMOGÉNEOS \rightarrow El resto de sistemas.

Cualquier sistema puede convertirse en homogéneo, haciendo cero los términos independientes.

TEOREMA DE ROUCHÉ-FROBENIUS

- Un sistema tiene solución si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b)$ (Compatible)
- Un sistema tiene solución única si $\text{rg}(A) = \text{número incógnitas}$ (Compatible Det.)



Rango de matriz ampliada:

Desde un menor de orden dos, vamos ampliando. Se puede ampliar mientras encuentres determinantes distintos de 0.

CRAMER

Para que un sistema se pueda solucionar por este método, tiene que ser una matriz regular ($\det \neq 0$) y n° incógnitas = n° ecuaciones.

GAUSS

Eliminar ecuaciones, o hacer ceros hasta que sea triangular superior y luego usar sustitución.

SISTEMA GENERADOR

Todos sus vectores son independientes, es decir, tiene determinante $\neq 0$

VECTORES DEPENDIENTES

Determinante = 0.

FEBRERO 2006 1ª semana

- (2) Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal que respecto de las bases $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ y $C = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ tiene por matriz asociada:

$$A_f = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Hallar la matriz de f respecto de las bases $B_1 = \{\bar{e}_2 + \bar{e}_3, \bar{e}_1 + \bar{e}_3, \bar{e}_1 + \bar{e}_2\}$ y $C_1 = \left\{ \frac{(\bar{v}_1 + \bar{v}_2)}{2}, \frac{(\bar{v}_1 - \bar{v}_2)}{2} \right\}$.

Solución:

Representamos los vectores de la base original con los valores de su matriz:

$$\begin{aligned} f(\bar{e}_1) &= 2\bar{v}_1 + 3\bar{v}_2 && \text{corresponde a la primera columna de la matriz.} \\ f(\bar{e}_2) &= -1\bar{v}_1 + 2\bar{v}_2 \\ f(\bar{e}_3) &= 1\bar{v}_1 + 3\bar{v}_2 \end{aligned}$$

Hacemos el cambio de base. El vector \bar{e}_1 en la nueva base es $(\bar{e}_2 + \bar{e}_3)$ por tanto vamos a la representación actual y operamos:

$$\begin{aligned} f(\bar{e}_2 + \bar{e}_3) &= (-1\bar{v}_1 + 1\bar{v}_1) + (2\bar{v}_2 - 3\bar{v}_2) = 0\bar{v}_1 - 1\bar{v}_2 \\ f(\bar{e}_1 + \bar{e}_3) &= (2\bar{v}_1 + 1\bar{v}_1) + (3\bar{v}_2 - 3\bar{v}_2) = 3\bar{v}_1 + 0\bar{v}_2 \\ f(\bar{e}_1 + \bar{e}_2) &= (2\bar{v}_1 - 1\bar{v}_1) + (3\bar{v}_2 + 2\bar{v}_2) = 1\bar{v}_1 + 5\bar{v}_2 \end{aligned}$$

Con estos resultados, representamos la combinación lineal de los vectores de la base C_1 :

$$a) f(\bar{e}_2 + \bar{e}_3) = -\bar{v}_2 = \alpha \left(\frac{\bar{v}_1 + \bar{v}_2}{2} \right) + \beta \left(\frac{\bar{v}_1 - \bar{v}_2}{2} \right) = \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \bar{v}_1 + \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \bar{v}_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\alpha + \beta}{2} = 0 \\ \frac{\alpha - \beta}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{primera columna de la matriz de la nueva base}$$

$$b) f(\bar{e}_1 + \bar{e}_3) = 3\bar{v}_1 = \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \bar{v}_1 + \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \bar{v}_2 = \begin{cases} \frac{\alpha + \beta}{2} = 3 \\ \frac{\alpha - \beta}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{2ª columna}$$

$$c) f(\bar{e}_1 + \bar{e}_2) = \bar{v}_1 + 5\bar{v}_2 = \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \bar{v}_1 + \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \bar{v}_2 = \begin{cases} \frac{\alpha + \beta}{2} = 1 \\ \frac{\alpha - \beta}{2} = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 6 \\ \beta = -4 \end{cases} \Rightarrow \text{3ª columna}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

FEBRERO 2010

1.ª semana

- ⑤ Dada la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y) = (x+y, 2x-y, x+3y)$, calcular la matriz de f en las bases $B = \{(1,1), (0,1)\}$ y $B' = \{(1,1,0), (0,-1,0), (0,1,2)\}$.

Solución:

- ¿Qué hace la función con el primer vector?

$$\begin{aligned} \text{para el primer término, } x+y &: f(1,1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \text{" " segundo término, } 2x-y &: f(1,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \text{" " tercer término, } x+3y &: f(1,1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Confeccionamos la matriz, donde el vector obtenido el vector de coeficientes, y los vectores de B' serán los vectores columna:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{matrix} x=2 \\ y=3 \\ z=2 \end{matrix}$$

El resultado de este sistema será el vector columna en la ^{matriz} ~~base~~ solicitada.

Mismas operaciones con el segundo vector:

$$f(0,1) \rightarrow (1, -1, 3)$$

La matriz a resolver queda: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{array} \right)$ resolveremos y

$$\text{queda: } \begin{matrix} x=1 \\ y=7/2 \\ z=3/2 \end{matrix}$$

que será el segundo vector de la matriz requerida.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7/2 \\ 2 & 3/2 \end{bmatrix} //$$

FEBRERO 2009

Semana 1

- ③ Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por $f(1,0,-1) = (0,3)$; $f(1,-2,3) = (6,-4)$; $f(0,-2,1) = (-3,2)$. Calcular la matriz de f en las bases canónicas de \mathbb{R}^3 y \mathbb{R}^2

$$\left. \begin{aligned} f(1,0,-1) &= (0,3) \rightarrow x - z = (0,3) \\ f(1,-2,3) &= (6,-4) \rightarrow x - 2y + 3z = (6,-4) \\ f(0,-2,1) &= (-3,2) \rightarrow -2y + z = (-3,2) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Resolvemos este} \\ \text{sistema realizando} \\ \text{múltiples sustituciones} \end{array}$$

$$x = (0,3) + z; \quad (0,3) + z - 2y + 3z = (6,-4); \quad -2y + z = (-3,2)$$

$$x = (0,3) + (3,-3) \quad (0,3) + 4z - 2y = (6,-4) \quad -2y = (-3,2) - z$$

$$x = (3,0)$$

$$4z - 2y = (6,-4) - (0,3)$$

$$4z - 2y = (6,-7)$$

$$4z + (-3,2) - z = (6,-7)$$

$$3z = (6,-7) - (-3,2)$$

$$3z = (9,-9)$$

$$z = \left(\frac{9}{3}, -\frac{9}{3}\right)$$

$$z = (3,-3)$$

$$-2y + (3,-3) = (-3,2)$$

$$-2y = (-3,2) - (3,-3)$$

$$-2y = (-6,5)$$

$$y = \left(\frac{-6}{-2}, \frac{5}{-2}\right)$$

$$y = \left(3, -\frac{5}{2}\right)$$

Los valores de x, y, z serán las columnas de la matriz requerida:

$$\left. \begin{aligned} x &= (3,0) \\ y &= \left(3, -\frac{5}{2}\right) \\ z &= (3,-3) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x & y & z \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & -5/2 & -3 \end{pmatrix}$$

SEPTIEMBRE 2006

1) Indicar cuál de los siguientes conjuntos no son subespacios vectoriales de \mathbb{R}^3 :

$$A = \{(x, y, z) \mid z = 0\}$$

$$B = \{(x, y, z) \mid xy = 0\}$$

$$C = \{(x, y, z) \mid x + y - z = 1\}$$

sol.

Para ser subespacio tiene que cumplir las 3 siguientes opciones:

$$1) \vec{0} \in A$$

$$2) \vec{u} + \vec{v} \in A$$

$$3) \alpha \vec{u} \in A$$

Veamos si A lo cumple:

1) Fabricamos el vector $\vec{0} \rightarrow (0, 0, 0)$, vemos que en z vale 0.

2) Fabricamos dos vectores $\rightarrow \vec{u} = (a, b, 0)$
 $\vec{v} = (\alpha, \beta, 0)$

operamos (suma): $\vec{u} + \vec{v} = (a + \alpha, b + \beta, 0)$, vemos que en z es 0.

3) Fabricamos ~~dos~~ ^{un} vector: $\vec{u} = (a, b, 0)$

operamos (multiplicar por escalar): $\alpha(a, b, 0) = (\alpha a, \alpha b, 0)$ también es 0 en z .

Cumple las tres normas, por tanto si es ~~esp~~ subespacio.

Veamos B

1) vector $\vec{0} \rightarrow (0, 0, 0)$, $0 \cdot 0 = 0$ lo cumple

2) $\vec{u} = (1, 0, 0)$ y $\vec{v} = (0, 1, 0)$, operamos: $\vec{u} + \vec{v} = (1, 1, 0)$ $1 \cdot 1 \neq 0$

no lo cumple

no es subespacio vectorial.

Por último C:

1) fabricamos el vector $(0, 0, 0)$ y operamos:

$$0 + 0 - 0 \neq 1$$

no es ~~espacio~~ subespacio vectorial.

FEBRERO 2006 1ª sem

- ① Hallar a y b para que los siguientes vectores de \mathbb{R}^4 sean linealmente dependientes:

$$(1, 1, 0, a), (3, -1, b, -1), (-3, 5, a, -4)$$

Solución:

Para que los vectores sean dependientes el determinante de la matriz tiene que ser 0, o el rango ha de ser dos o menos. Sabemos que el rango coincide con los pivotes, así que lo calculamos por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 3 & -1 & b & -1 \\ -3 & 5 & a & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & -4 & b & -1-3a \\ 0 & 8 & a & -4+3a \end{pmatrix} \begin{matrix} F_2 - 3F_1 \\ F_3 + 3F_1 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 1 & 0 & a \\ 0 & \textcircled{-4} & b & -1-3a \\ 0 & 0 & a+2b & -6-3a \end{pmatrix}$$

1 y -4 son pivotes, si la 3ª fila fuera nula, el rango sería 2.

Pues hacemos como los parámetros de la 3ª fila para poder anularla:

$$\begin{aligned} a+2b &= 0 \Rightarrow \\ -6-3a &= 0 \Rightarrow \end{aligned} \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases} //$$

Resolución por determinante:

Si un determinante de orden 3 dentro de la matriz es 0, entonces sus vectores serán linealmente dependientes.

Escojamos cualquier menor de orden

3, por ejemplo: 1ª, 2ª y 4ª columna (intentamos evitar columnas donde estén los dos parámetros):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 3 & -1 & -1 \\ -3 & 5 & -4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow a = -2 //$$

Ya sabemos que a vale -2, sustituimos a por su valor en toda la matriz y elegimos otro menor de orden 3 para encontrar b .

1ª, 2ª y 3ª columnas:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & b \\ -3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow b = 1 //$$

SEP 2008

ej 1

Encontrar los valores de t para los cuales los

vectores: $\vec{u} = (t, 1, -2)$

$\vec{v} = (1, t, 2)$

$\vec{w} = (2t, 1, 0)$

son un sistema de generadores del espacio vectorial \mathbb{R}^3

Para que sean linealmente independientes, el determinante de la matriz que forman tiene que ser $\neq 0$.

$$\begin{vmatrix} t & 1 & -2 \\ 1 & t & 2 \\ 2t & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 4t - 2 + 4t^2 - 2t - 0 = 4t^2 + 2t - 2 = 0$$

Aplicamos la fórmula $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

~~XXXXXXXXXXXX~~

$$\frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 4 \cdot (-2)}}{2 \cdot 4} =$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{8} = \frac{-2 \pm 6}{8} = \frac{-8}{8} = -1 \quad \text{y} \quad \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Si $t \neq -1$ y $t \neq \frac{1}{2}$, los vectores son independientes por tanto forman un sistema generador de \mathbb{R}^3

FEBRERO 2009 2ª semana

- (4) Sea V el subespacio generado por los vectores $\{(3, \alpha, 0) (0, 2, 1) (0, \beta, 1)\}$ y W el subespacio determinado por las ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + z = 0 \\ \alpha x + 2y + z = 0 \\ x + \beta y + z = 0 \end{array} \right\} \text{ Calcular los valores de } \alpha \text{ y } \beta \text{ para que } \dim V = 2 = \dim W$$

Solución: Para el primer subespacio podemos calcular el determinante para ver el rango. Sabemos que la dimensión coincide con el rango de la matriz, así como con sus vectores linealmente independientes:

$$V = \begin{vmatrix} 3 & \alpha & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & \beta & 1 \end{vmatrix} : 6 - 3\beta = 0 ; \beta = 2$$

Si $\beta = 2$, el determinante es ~~no~~ 0, por tanto el rango de la matriz será 2.

Lo vemos claramente sustituyendo el 2 en la matriz y mirando que quedan solo dos vectores l.i.

$$\begin{vmatrix} 3 & \alpha & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \text{ eliminamos 1 y quedan 2 vectores l.i.}$$

Seguimos con el mismo proceso en W . Ahora que sabemos lo que vale β , sustituimos

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \alpha & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 2\alpha + 2 - 2 - 2 - 2\alpha = 0$$

~~el valor 0 para~~ El determinante vale 0 para cualquier valor de α . Ya sabemos que el $\text{rg}(W) < 3$, probamos a ver si es dos o uno.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \alpha & 2 \end{vmatrix} 2 - 2\alpha = 0. \text{ Para que no sea } 0, \alpha \text{ tiene que ser } \neq 1.$$

Se ve claramente en la matriz que si $\alpha = 1$, los tres vectores serían iguales.

SEPTIEMBRE 2009

- (21) Sea S el subespacio vectorial de \mathbb{R}^3 generado por los vectores $(1,2,3)$, $(3,2,1)$ y T el subespacio vectorial de \mathbb{R}^3 generado por los vectores $(1,0,1)$, $(3,4,3)$. Determinar unas ecuaciones no paramétricas de $S \cap T$.

Solución:

Montamos la matriz de cada espacio vectorial. Para ello ponemos como primera fila, las incógnitas correspondientes. el resto de fila son los vectores del subespacio:

$$S = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Hacemos los determinantes e igualamos a cero.



intersección
vector combina-
ción de S y T
lo llamamos
 (x, y, z)

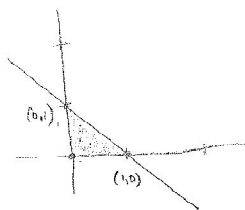
$$S = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2x + 9y + 2z - 6z - 6x - y = -4x - 8y - 4z = 0 //$$

$$T = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3y + 4z - 4x - 3y = -4x + z = 0 //$$

Un vector que esté en la intersección $S \cap T$ deberá verificar las ecuaciones resultantes, que dan lugar al sistema:

$$\left. \begin{array}{l} -4x - 8y - 4z = 0 \\ -4x + z = 0 \end{array} \right\} //$$

- Solución:

$$x + 1 = 1 \rightarrow \begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}$$

$$\rho_{10}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ ok}$$

$f = 0 + 0 = 0$ — mínimo
 $f = 1 + 0 = 1$
 $f = 0 + 1 = 1$ — máximos

FEBRERO 2009, Sem 1

- ⑤ Hallar el valor máximo y el valor mínimo de la función $z = 3x + 2y$ con las restricciones:
- $$\begin{cases} x - 4 \geq 0 \\ y - x - 2 \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Solución:

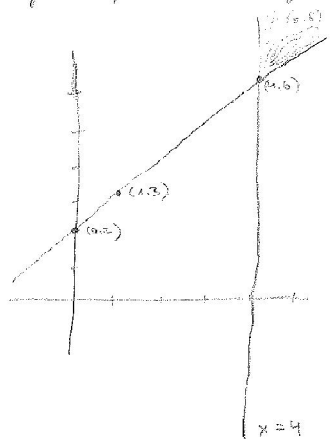
Primero despejamos para saber los valores de x e y :

$$x - 4 \geq 0 \rightarrow \boxed{x \geq 4}$$

$$y - x - 2 \geq 0 \rightarrow \boxed{y \geq 6}$$

Las rectas que se cortan en el punto $x=4, y=6$.

Ahora lo dibujamos para ver la región:



1: Dibujamos $x \geq 4$
2: Sacamos valores de y en la ecuación despejada:
 $y = x + 2$

x	y
0	2
4	6

3: Sacamos valores en las distintas regiones
hay una zona de
que satisface las dos
funciones.

(5, 8)

$$5 - 4 \geq 0 \text{ OK}$$

$$8 - 5 - 2 \geq 0 \text{ OK}$$

Sabemos dónde se cortan, y sabemos que el punto (5, 8) pertenece a la zona, el mínimo va a ser claramente el situado en el punto (4, 6) y el máximo no existe para z , puesto que el recinto es infinito;

Sustituimos el punto en z para hallar el mínimo: $z = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 6 = \underline{24}$ (mín)

SEP 2006

- 5) Calcular $\min z = x + 3y$, y el punto en el que dicho mínimo se alcanza, estando las variables sometidas a las restricciones:

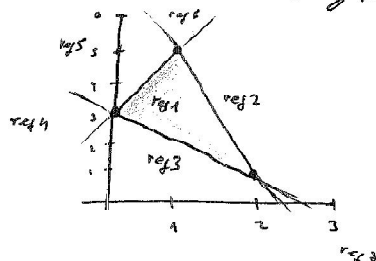
$$\begin{cases} x+y \geq 3, \\ -2x+y \leq 3, \\ 4x+y \leq 9 \end{cases} \quad x \geq 0, y \geq 0.$$

Solución:

1º: Hago todos los grupos de parejas de ecuaciones para ver dónde están los puntos de corte:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x+y=3 \\ -2x+y=3 \end{cases} & (0,3) & \begin{cases} -2x+y=3 \\ 4x+y=9 \end{cases} & (1,5) & \begin{cases} x+y=3 \\ 4x+y=9 \end{cases} & (2,1) \end{aligned}$$

2º: Dibujo las rectas de las ecuaciones y marco los puntos de corte:



3º: Busco la región determinada por las restricciones. Para ello cogo un punto de cada región y lo sustituyo en las restricciones dadas. El punto que lo cumpla me dirá cuál es la región.

Pruebo con el punto (1,3) de la región 1:

$$\begin{aligned} 1+3 &\geq 3 \quad \text{— lo cumple} \\ -2+3 &\leq 3 \quad \text{— lo cumple} \\ 4+3 &\leq 9 \quad \text{— lo cumple} \end{aligned}$$

4º: La región óptima no indica qué vértices tengo que coger, en este caso me valen los 3. Sustituyo estos vértices en la función objetivo que nos dan y estos resultados nos dirán los mínimos y máximos:

$$(0,3) \quad z = 0 + 3 \cdot 3 = 9$$

$$(1,5) \quad z = 1 + 3 \cdot 5 = 16$$

$$(2,1) \quad z = 2 + 3 \cdot 1 = 5$$

$\min z = x + 3y \rightarrow 5$, alcanzado en el punto (2,1) //

● FEBRERO 2006 1ª SEMANA

- ⑤ Con el producto escalar usual de \mathbb{R}^3 , calcular la matriz de Gram respecto de la base $B = \{(1, 1, 1) (1, -1, 1) (-1, 1, 1)\}$

Solución: los elementos de la matriz de gram se definen como:

$$g_{ij} = \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j$$

Tenemos la base: $\bar{e}_1 = (1, 1, 1)$

$$\bar{e}_2 = (1, -1, 1)$$

$$\bar{e}_3 = (-1, 1, 1)$$

1º $\rightarrow g_{11} = \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1 = (1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1) = (1+1+1) = 3$

primer componente de la matriz de gram multiplicamos los vectores cuyos índices coinciden con la primera componente de la matriz de gram. multiplicamos elemento a elemento y sumamos. (Nos han dicho producto escalar usual, si fuera otro producto, aquí operariamos según ese).

2º \rightarrow seguiremos con todos los elementos hasta formar la matriz completa:

$$g_{12} = \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 = (1, 1, 1) \cdot (1, -1, 1) = 1 - 1 + 1 = 1$$

$$g_{13} = \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_3 = (1, 1, 1) \cdot (-1, 1, 1) = -1 + 1 + 1 = 1$$

$$g_{22} = \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_2 = (1, -1, 1) \cdot (1, -1, 1) = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$g_{23} = \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_3 = (1, -1, 1) \cdot (-1, 1, 1) = -1 - 1 + 1 = -1$$

$$g_{33} = \bar{e}_3 \cdot \bar{e}_3 = (-1, 1, 1) \cdot (-1, 1, 1) = 1 + 1 + 1 = 3$$

3º \rightarrow Construimos la matriz con los resultados obtenidos:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Se da la circunstancia de que la matriz de Gram es simétrica, por tanto, al haber calculado g_{12} , nos da el mismo resultado que g_{21} y lo mismo con el resto.

FEBRERO 2009 semana 2

② Estudiar según los valores de x , el rango de la matriz:

$$\begin{pmatrix} x & 0 & x^2 & 1 \\ 1 & x^2 & x^3 & x \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & \textcircled{+} & - \\ - & + & - & + \end{matrix}$$

Operamos con la fila 3. Para operar con filas, tenemos en cuenta el valor y el signo.

Quitamos fila y columna de donde está nuestro valor y lo multiplicamos por el determinante de la matriz resultante:

$$+1 \cdot \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 1 & x^2 & x \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 - x^2 = 0 \quad \begin{matrix} < 1 \\ > -1 \end{matrix}$$

Recordamos que si el determinante de una matriz es $\neq 0$, entonces el rango = al orden de la matriz con la que hemos operado. Por tanto si $x \neq \pm 1$, el orden rango es 4.

Veamos qué ocurre cuando $x = 1$ ó $x = -1$:

$x = 1$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, como sabemos que no es de orden 4, probamos con 1 menor de orden 3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0. \text{ Rango 3.}$$

$x = -1$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0 \text{ Rango 3}$

Examen 2

Ej. 4) Estudiar según los valores de x , el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

1º → Calcular el determinante tal cual:

$$|A| = 18 + 4x + 3x^2 - 2x^2 - 12 - 9x = x^2 - 5x + 6.$$

2º → Igualamos el determinante a cero y sacamos las raíces:

$$x^2 - 5x + 6 = 0; \quad \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}$$

- Cuando x ~~vale~~ ^{distinto} 2 ó 3, el determinante ^{no} es 0, por tanto el rango es 3.
- Ahora vemos qué ocurre cuando x vale 2. (Ya sabemos que el determinante va a ser 0, así que tenemos que seguir mirando en las submatrices).

○ $x = 2$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ → Encontramos una submatriz suya de un orden menor, y calculamos su determinante.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \text{ no nos vale}$$

○ $x = 3$ $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ $\text{rg}(A) = 2$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ al ser distinto de cero, podemos asegurar que es el rango } 2.$$

Nota El rango de una matriz lo da siempre su determinante. Cuando es distinto de 0, el rango es igual al orden de la matriz. Si es cero, cogemos una submatriz que lo haga cero, si existe, ~~se~~ tenemos que seguir mirando submatrices con menor orden. Cuando el determinante de cualquiera de ellas sea distinto de cero, su rango valdrá igual que su orden.

SEPTIEMBRE 2008

- 4) Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ ax + (a+3)y + 3z = 1 \end{cases}$, calcular a para que sea incompatible.

Solución:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ a & a+3 & 3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - aF_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & a-3 & 3-a & 1-3a \end{array} \right)$$

Se ve claramente que si a fuera igual a 3, en la última fila habría un pivote en los coeficientes y sería un sistema incompatible.

SEPTIEMBRE 2008

- ⑤ Se define el producto escalar de los vectores $\vec{x} = (x_1, x_2)$ e $\vec{y} = (y_1, y_2)$ por $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 4 x_2 y_2$.
Hallar con ese producto escalar, un vector (a, b) que sea ortogonal a $(0, 1)$ y además unitario.

Solución: Hay que montar un sistema de ecuaciones donde una ecuación será el ortogonal y otra el unitario.

Ortogonal: $(a, b) \cdot (0, 1) = 0$ para que sea ortogonal. Multiplicamos según el producto escalar que nos dieron:

$$(a \cdot 0) + (a \cdot 1) + (b \cdot 0) + (4b \cdot 1) = 0 \Rightarrow a + 4b = 0$$

Unitario: $\|(a, b)\| = 1 \rightarrow \sqrt{(a, b) \cdot (a, b)} = 1$ Operamos:

$$\begin{aligned} a^2 + ab + ba + 4b^2 &= 1 \\ &= a^2 + 2ab + 4b^2 = 1 \end{aligned}$$

Ya tenemos las dos ecuaciones. Montamos el sistema y resolvemos:

$$\begin{cases} a + 4b = 0 \\ a^2 + 2ab + 4b^2 = 1 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} a = -4b, \text{ ahora sustituyo en la segunda ecuación:} \\ (-4b)^2 + 2(-4b) \cdot b + 4b^2 = 1 \\ = 16b^2 - 8b^2 + 4b^2 = 1 \\ = 12b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm \frac{1}{\sqrt{12}} // \end{array} \right\}$$

ahora sustituyo el valor de b en la primera ecuación:

$$a = -4 \left(\frac{1}{\sqrt{12}} \right) \begin{matrix} \swarrow -\frac{4}{\sqrt{12}} \\ \searrow \frac{4}{\sqrt{12}} \end{matrix}$$

Por tanto salen dos vectores: $\left(\frac{4}{\sqrt{12}}, -\frac{1}{\sqrt{12}} \right)$ y $\left(-\frac{4}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt{12}} \right) //$

FEBRERO 2009 2ª SEMANA

- (5) Sean $\vec{u} = (2, 0, 1)$, $\vec{v} = (1, 1, -1)$ dos vectores de \mathbb{R}^3 . Considerando el producto escalar usual en \mathbb{R}^3 , calcular un vector unitario que sea ortogonal a los vectores \vec{u} y \vec{v} .

Solución.

1: Buscamos el vector ortogonal.

Tiene que cumplir que multiplicado por los vectores \vec{v} y \vec{u} dé 0.

$$\begin{cases} (a, b, c) \cdot (2, 0, 1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (1, 1, -1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + c = 0 \\ a + b - c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -2a \\ b = 3a \end{cases}$$

Sabemos los valores de a en el ortogonal.

2: Buscamos el vector unitario.

Tiene que cumplir que elevado al cuadrado sea igual a 1.

$$(a, b, c) \cdot (a, b, c) = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

Como sabemos los valores de a , sustituimos.

$$a^2 + (3a)^2 + (-2a)^2 = 1$$

$$a^2 + 9a^2 + 4a^2 = 1$$

$$14a^2 = 1$$

$$a^2 = \frac{1}{14}; \text{ por el cuadrado, } a \text{ puede valer } \frac{1}{\sqrt{14}} \text{ o } -\frac{1}{\sqrt{14}}$$

Si sustituimos a en los resultados de nuestro sistema inicial, podemos obtener b y c :

$$a = \frac{1}{\sqrt{14}}; \quad b = 3a = \frac{3}{\sqrt{14}}; \quad c = -2a = -\frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$a = -\frac{1}{\sqrt{14}}; \quad b = -3a = \frac{3}{\sqrt{14}}; \quad c = 2a = -\frac{2}{\sqrt{14}}$$

SEPTIEMBRE 2006

4) En \mathbb{R}^2 se define el producto escalar de los vectores $\vec{x} = (x_1, x_2)$ e $\vec{y} = (y_1, y_2)$ como $\vec{x} \cdot \vec{y} = 4x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 7x_2y_2$. Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- a) la norma del vector $(1, -1)$ es $\sqrt{13}$
- b) el vector $(1/2, 0)$ es unitario
- c) los vectores $(-1, 0)$ y $(1, 2)$ son ortogonales

Solución:

a). la norma de un vector es la raíz de su producto escalar

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

$$\begin{aligned} & \text{~~4(1) - 2(1)(-1) - 2(-1)(1) + 7(-1)(-1) =~~ } \|(1, -1)\|^2 = (1, -1) \cdot (1, -1) = \\ & = 4 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot (-1) - 2 \cdot (-1) \cdot 1 + 7 \cdot (-1) \cdot (-1) = \\ & = 4 + 2 + 2 + 7 = 15. \end{aligned}$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{15} // \quad a = \text{falsa}$$

b): Un vector es unitario si su norma = 1.

$$\begin{aligned} \|(1/2, 0)\|^2 &= ((1/2), 0) \cdot ((1/2), 0) = \\ &= 4 \cdot (1/2) \cdot (1/2) - 2 \cdot (1/2) \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot (1/2) + 7 \cdot 0 \cdot 0 = 1 // \end{aligned}$$

b = verdadera

c): Dos vectores son ortogonales si su producto escalar es 0.

$$(-1, 0) \cdot (1, 2) = 4 \cdot (-1) \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 2 - 2 \cdot 0 \cdot 1 + 7 \cdot 0 \cdot 2 = 0 //$$

c = verdadera.

FEBRERO 2010

1ª semana

② En \mathbb{R}^2 se considera el producto escalar de los vectores

$$\bar{x} = (x_1, x_2), \bar{y} = (y_1, y_2) \text{ definido por } \bar{x} \cdot \bar{y} = x_1 y_1 - 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1 + 8x_2 y_2.$$

Calcular la norma del vector $\bar{v} = (2, -3)$.

Solución: Para calcular la norma, hacemos el cuadrado del vector, usando el producto definido, y al resultado le hacemos la raíz cuadrada:

$$\begin{aligned} \bar{v} = (2, -3) &\Rightarrow 2 \cdot 2 - 2(2) \cdot (-3) - 2(-3) \cdot 2 + 8(-3) \cdot (-3) = \\ &4 + 12 + 12 + 72 = 100 \end{aligned}$$

$$\|\bar{v}\| = \sqrt{100} = 10$$

FEBRERO 2010

Segunda semana

(1) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ a & a & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, calcular a para que sea diagonalizable

Solución: No había falta calcular el determinante para obtener los autovalores, puesto que, al igual que en una matriz triangular, la disposición de los ceros en esta, hace que sus autovalores sean los valores de la diagonal.

Por tanto si $a \neq 1, 3$, podemos asegurar que la matriz es diagonalizable. Ahora veamos los casos en que $a = 1$ o $a = 3$:

$$a = 1: \begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 2 \\ 1 & 1-1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 2 \text{ pivotes} \\ 1 \text{ libre} \\ 1 \text{ vector} \end{array}$$

como 1 tiene multiplicidad algebraica = 2 y multiplicidad geométrica = 1, no sería diagonalizable.

$$a = 3: \begin{pmatrix} 1-3 & 0 & 2 \\ 3 & 3-3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F1:2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\xrightarrow{F2-3F1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 2 \text{ pivotes} \\ 1 \text{ libre} \\ 1 \text{ vector} \end{array}$$

multiplicidad algebraica = 2, multiplicidad geométrica = 1, no diagonalizable

$a = 1 \rightarrow$ no diagonalizable

$a = 3 \rightarrow$ no diagonalizable

$a \neq 3, 1 \rightarrow$ diagonalizable

SEPTIEMBRE 2006

Ej 4

Encontrar los valores propios indicando su multiplicidad y estudiar si es diagonalizable.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución

No hace falta calcular los autovalores, puesto que al ser una matriz triangular, los autovalores son los valores de la diagonal.

De todos modos los calculamos según su ecuación característica:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda)(-1-\lambda) = 0$$

$\lambda = -1$ doble
 $\lambda = 1$ simple

¿Cómo saber si es diagonalizable?

- ① ¿es simétrica? No. Entonces no podemos afirmar que lo sea.
- ② ¿sus autovalores son distintos? No
- ③ ¿su multiplicidad geométrica coincide con su mult. algebraica?

$$\begin{bmatrix} 1-(-1) & 0 & 0 \\ 0 & -1-(-1) & 1 \\ 0 & 0 & -1-(-1) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} 2x = 0 \\ y = 0 \\ z = z \end{array}$$

Sólo z es libre, así que la multiplicidad geométrica es 1, distinta de la multiplicidad algebraica, por tanto NO ES

DIAGONALIZABLE

FEBRERO 2005 2º semana.

- (3) Dada la forma cuadrática $Q(x,y,z) = (a-1)x^2 + ay^2 + zyz + az^2$, calcular los valores del parámetro a para que sea definida positiva

Solución:

Para que sea definida positiva, sus tres menores han de ser positivos.

Montamos la matriz y comprobamos sus menores:

$$A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a-1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}$$

$$|A_1| = a-1 = 0 \rightarrow a \text{ tiene que ser mayor que } 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} a-1 & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} = 0; (a-1) \cdot a = 0 \rightarrow a \text{ tiene que ser mayor que } 1$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} a-1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = 0; (a-1)(a^2-1) = 0 \rightarrow a > 1$$

Solución $a > 1 //$

Febrero 2009 2ª sem.

FORMA BILINEAL

OK

ej 1/ Para que una matriz sea degenerada, el determinante de su matriz asociada tiene que ser 0.

$$\begin{aligned} f(\bar{e}_1, \bar{e}_1) &= 4 & f(\bar{e}_2, \bar{e}_2) &= 1 & f(\bar{e}_3, \bar{e}_3) &= -1 \\ f(\bar{e}_1, \bar{e}_2) &= 2m & f(\bar{e}_2, \bar{e}_3) &= 0 \\ f(\bar{e}_1, \bar{e}_3) &= 2m \end{aligned}$$

Hacemos la ~~mat~~ matriz, luego el determinante e igualamos a 0 para ver lo que vale m.

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 2m & 2m \\ 2m & 1 & 0 \\ 2m & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4 - 4m^2 - 4m^2 = 4 - 8m^2 = 0$$

$$4 = 8m^2$$

$$\frac{4}{8} = m^2$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{2}} &= m \\ -\sqrt{\frac{1}{2}} &= m \end{aligned}$$