

# Espacio vectorial

## CONCEPTOS BASICOS

Sean  $V$  un conjunto no vacío de vectores y  $K^n$  un cuerpo de escalares donde  $n$  representa la dimensión del espacio. Sean  $u = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $v = (v_1, v_2, v_3)$  y  $w = (w_1, w_2, w_3)$  vectores pertenecientes a  $V$ . Sean también  $a, b$  y  $c$  escalares pertenecientes a  $K^n$ . Un espacio vectorial es una terna formada por un conjunto de vectores que está establecido mediante una ley interna (suma de vectores) y una ley externa (producto de un escalar por un vector):

1ª **Ley interna:** o suma, a cada par  $(x, y)$  que pertenece a  $V \times V$  se le asocia su suma  $x + y$  (que pertenece a  $V$ ), de tal forma que el par  $(V, +)$  sea un grupo conmutativo:

- a) **Interna:**  $(u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$  que pertenece a  $V$
- b) **Conmutativa:**  $(u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) = (v_1, v_2, v_3) + (u_1, u_2, u_3)$
- c) **Asociativa:**  $[(u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3)] + (w_1, w_2, w_3) = (u_1, u_2, u_3) + [(v_1, v_2, v_3) + (w_1, w_2, w_3)]$
- d) **Elemento neutro:**  $(u_1, u_2, u_3) + (0, 0, 0) = (u_1, u_2, u_3)$
- e) **Elemento simétrico:**  $(u_1, u_2, u_3) + (-u_1, -u_2, -u_3) = (0, 0, 0)$

2ª **Ley externa:** o producto, a cada par  $(a, x)$  que pertenece a  $K \times V$  se le asocia su producto  $a \cdot x$  (que pertenece a  $V$ ), de tal forma que verifique:

- a) **Asociativa escalares:**  $a \cdot [b \cdot (u_1, u_2, u_3)] = (a \cdot b) \cdot (u_1, u_2, u_3)$
- b) **Distributiva escalares:**  $(a + b) \cdot (u_1, u_2, u_3) = a \cdot (u_1, u_2, u_3) + b \cdot (u_1, u_2, u_3)$
- c) **Distributiva vectores:**  $a \cdot [(u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3)] = a \cdot (u_1, u_2, u_3) + a \cdot (v_1, v_2, v_3)$
- d) **Elemento unidad:**  $1 \cdot (u_1, u_2, u_3) = (u_1, u_2, u_3)$

## Comprobación de un espacio vectorial

Sea  $V = \{(a, b)\}$  donde  $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$  y  $k \cdot (a, b) = (a^k, k \cdot b)$ . Comprobar que  $V$  es un espacio vectorial.

- Conmutativa:  
 $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$   
 $(c, d) + (a, b) = (c + a, d + b)$
- Asociativa:  
 $[(a, b) + (c, d)] + (e, f) = (a + c, b + d) + (e, f) = (a + c + e, b + d + f)$   
 $(a, b) + [(c, d) + (e, f)] = (a, b) + (c + e, d + f) = (a + c + e, b + d + f)$
- Elemento neutro:  
 $(a, b) + (e_1, e_2) = (a + e_1, b + e_2) = (a, b)$   
 $a + e_1 = a \quad || \quad b + e_2 = b \quad || \quad e_1 = 0 \quad || \quad e_2 = 0$
- Elemento simétrico:  
 $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') = (0, 0)$   
 $a + a' = 0 \quad || \quad b + b' = 0 \quad || \quad a' = -a \quad || \quad b' = -b$
- Asociativa escalares:  
 $k \cdot (l \cdot (a, b)) = k \cdot (a^l, l \cdot b) = ((a^l)^k, k \cdot l \cdot b) = (a^{kl}, k \cdot l \cdot b)$   
 $(k \cdot l) \cdot (a, b) = (a^{kl}, k \cdot l \cdot b)$
- Distributiva escalares:  
 $(k + l) \cdot (a, b) = (a^{k+l}, (k + l) \cdot b) = (a^{k+l}, k \cdot b + l \cdot b)$   
 $k \cdot (a, b) + l \cdot (a, b) = (a^k, k \cdot b) + (a^l, l \cdot b) = (a^{k+l}, k \cdot b + l \cdot b) = (a^{k+l}, k \cdot b + l \cdot b)$
- Distributiva vectores:

$$k \cdot [(a, b) + (c, d)] = k \cdot (ac, b + d) = [(ac)^k, k \cdot (b + d)] = (a^k \cdot c^k, k \cdot b + k \cdot d) = (a^k, k \cdot b) + (c^k, k \cdot d) = (a^k \cdot c^k, k \cdot b + k \cdot d)$$

- Elemento unidad:  
 $I \cdot (a, b) = (a^I, I \cdot b) = (a, b)$

### Subespacio vectorial

Dado un subconjunto  $S$  de un espacio vectorial  $V$  sobre el cuerpo  $K$ , se dice que  $S$  es un subespacio vectorial de  $V$ , si con las mismas leyes definidas en  $V$ ,  $S$  tiene estructura de espacio vectorial sobre  $K$ . La condición necesaria y suficiente para que  $S$  sea subespacio vectorial es que se verifique:

- Para todo  $x, y$  que pertenecen a  $S$ , la suma  $x + y$  también pertenece a  $S$ .
- Para todo  $a$  de  $K$ , para todo  $x$  de  $S$ , el producto  $a \cdot x$  pertenece a  $S$ .

### Comprobación de un subespacio vectorial

Sea  $S = \{(x, 2x, z)\}$  donde se cumple que:

$$(x, 2x, z) + (x', 2x', z') = [x + x', 2 \cdot (x + x'), z + z'] \text{ pertenece a } S$$
$$k \cdot (x, 2x, z) = (k \cdot x, 2 \cdot k \cdot x, k \cdot z) \text{ pertenece a } S$$

## COMBINACION LINEAL

Una **familia** de vectores es un subconjunto de vectores de un subespacio vectorial:

$$F = \{(u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3), (w_1, w_2, w_3)\}$$

Si un vector puede expresarse en función de dicha familia, se llama **combinación lineal**:

$$(x_1, x_2, x_3) = a \cdot (u_1, u_2, u_3) + b \cdot (v_1, v_2, v_3) + c \cdot (w_1, w_2, w_3)$$

Si una combinación lineal da lugar al vector nulo, entonces se dice que es un **sistema linealmente independiente**:

$$(0, 0, 0) = a \cdot (u_1, u_2, u_3) + b \cdot (v_1, v_2, v_3) + c \cdot (w_1, w_2, w_3)$$

Se llama **variedad lineal** al conjunto de todos los vectores resultantes de la combinación lineal. Si dicha variedad genera el subespacio vectorial, entonces es un **sistema generador**:

$$L(F) = S$$

### Comprobación de un sistema libre

Comprobar si es libre o ligado el sistema de vectores  $F = \{(1, -1, 3), (0, -1, 2)\}$

- $a \cdot (1, -1, 3) + b \cdot (0, -1, 2) = (0, 0, 0)$
- $a = 0 \parallel -a - b = 0 \parallel 3a + 2b = 0 \parallel a = b = 0$
- El sistema es libre

### Base de un espacio vectorial

Una **base** es un sistema libre de generadores:

$$B = \{(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3), (z_1, z_2, z_3)\}$$

Un vector tiene de **coordenadas** con respecto a la base:

## Apuntes de Álgebra

$$u_1 = a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot y_1 + a_3 \cdot z_1$$

$$u_2 = a_1 \cdot x_2 + a_2 \cdot y_2 + a_3 \cdot z_2$$

$$u_3 = a_1 \cdot x_3 + a_2 \cdot y_3 + a_3 \cdot z_3$$

Se llama **dimensión** del espacio vectorial al número de vectores de la base:

$$\dim(V)$$

Se llama **rango** de un sistema a la dimensión del subespacio vectorial generado por dicho sistema:

$$\text{rg}(F)$$

### ***Cambio de base de un vector***

Hallar las coordenadas del vector  $a(3, 5, 2)$  respecto de la base  $B' = \{b, c, d\}$ , siendo  $b(1, 1, 0)$ ,  $c(0, 0, 1)$  y  $d(1, 0, 3)$ .

- $3 = a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot y_1 + a_3 \cdot z_1 = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 1 = a_1 + a_3$
- $5 = a_1 \cdot x_2 + a_2 \cdot y_2 + a_3 \cdot z_2 = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 = a_1$
- $2 = a_1 \cdot x_3 + a_2 \cdot y_3 + a_3 \cdot z_3 = a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 3 = a_2 + 3a_3$

Resolviendo el sistema de ecuaciones resultante:

$$a_1 = 5 \quad \parallel \quad a_3 = -2 \quad \parallel \quad a_2 = 8$$

$$a'(5, 8, -2)$$

# Matrices

## CONCEPTOS BASICOS

Se llama matriz a una forma reticular compuesta de filas ( $m$ ) y columnas ( $n$ ), donde cada elemento lleva asociado un doble índice, el primero ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) para indicar la fila y el segundo ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) para indicar la columna.

El orden de una matriz ( $m \times n$ ) expresa las filas y columnas que componen la matriz. Se designa como  $A_{m \times n}$  o como un conjunto de sus elementos ( $a_{ij}$ ):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

## TIPOS DE MATRICES

Las matrices se clasifican según la disposición de sus elementos. Pueden ser:

### Rectangular

Es aquella que el número de filas es distinto al número de columnas ( $m \neq n$ ).

$$\begin{vmatrix} a & a & a \\ a & a & a \end{vmatrix}$$

### Cuadrada

Es aquella que tiene el mismo número de filas que de columnas ( $m = n$ ).

$$\begin{vmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{vmatrix}$$

### Fila

Es aquella que contiene solamente una fila ( $1 \times n$ ).

$$\begin{vmatrix} a & a & a \end{vmatrix}$$

### Columna

Es aquella que contiene solamente una columna ( $m \times 1$ ).

$$\begin{vmatrix} a \\ a \\ a \end{vmatrix}$$

### Triangular superior

Es aquella que tiene todos los elementos por debajo de la diagonal principal igual a cero ( $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$ ).

## Apuntes de Álgebra

$$\begin{vmatrix} a & a & a \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

### Triangular inferior

Es aquella que tiene todos los elementos por encima de la diagonal principal igual a cero ( $i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$ ).

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ a & a & 0 \\ a & a & a \end{vmatrix}$$

### Opuesta

Es aquella que tiene todos los elementos cambiados de signo con respecto a la matriz original ( $a_{ij} = -a_{ij}$ ).

$$\begin{vmatrix} -a & -a & -a \\ -a & -a & -a \\ -a & -a & -a \end{vmatrix}$$

### Transpuesta ( $A^t$ )

Es aquella que resulta de cambiar las filas por las columnas ( $a_{ij} = a_{ji}$ ).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

### Nula

Es aquella que tiene todos sus elementos igual a cero ( $i, j \Rightarrow a_{ij} = 0$ ).

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

### Diagonal

Es aquella que tiene todos sus elementos igual a cero excepto en la diagonal principal ( $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$ ).

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$$

### Escalar

Es una matriz diagonal con los elementos de la diagonal principal iguales ( $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$  ||  $i = j \Rightarrow a_{ij} = k$ ).

$$\begin{vmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{vmatrix}$$

### Unidad

Es una matriz escalar con los elementos de la diagonal principal igual a 1 ( $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0 \parallel i = j \Rightarrow a_{ij} = 1$ ).

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

### Simétrica

Es una matriz transpuesta excepto en los elementos de la diagonal principal ( $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = a_{ji} \parallel i = j \Rightarrow a_{ij} = x$ ).

$$\begin{vmatrix} x & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & x & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & x \end{vmatrix}$$

### Antisimétrica o hemisimétrica

Es una matriz simétrica con los elementos simétricos opuestos y con los elementos de la diagonal principal igual a cero ( $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = -a_{ji} \parallel i = j \Rightarrow a_{ij} = 0$ ).

$$\begin{vmatrix} 0 & -a_{21} & -a_{31} \\ -a_{12} & 0 & -a_{32} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{vmatrix}$$

### Comprobar el tipo de una matriz

Dada la matriz siguiente, averiguar de qué tipo se trata:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 6 \\ -2 & -6 & 0 \end{vmatrix}$$

La matriz es antisimétrica

## OPERACIONES CON MATRICES

### Suma de matrices

La suma de dos matrices es otra matriz que resulta de sumar los elementos que correspondan a la misma fila y a la misma columna. Ambas matrices deben de ser del mismo orden:

$$A + B = C \Rightarrow (m \times n) + (m \times n)$$

## Apuntes de Álgebra

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

### Producto de una matriz por un escalar

El producto de una matriz por un escalar es otra matriz que resulta de multiplicar el escalar por cada uno de los elementos de la matriz:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{A}'$$

$$a_{ij}' = a_{ij} \cdot k$$

### Producto de matrices

El producto de dos matrices es otra matriz que tiene de orden el número de filas de la primera por el número de columnas de la segunda, por lo que no es conmutativo. La condición para hacer el producto de matrices es que el número de columnas de la primera debe ser igual al número de filas de la segunda. Es decir:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C} \Rightarrow (\mathbf{m} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{p})$$

$$c_{ij} = \text{Sumatorio de } k (1 \dots n) \text{ en } a_{ik} \cdot b_{kj}$$

### Multiplicar dos matrices

Dadas las siguientes matrices, hallar el producto  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 \cdot -2 + 3 \cdot 4 + -2 \cdot 5 & 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + -2 \cdot -2 & 2 \cdot -1 + 3 \cdot 1 + -2 \cdot 4 \\ -1 \cdot -2 + 0 \cdot 4 + -3 \cdot 5 & -1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + -3 \cdot -2 & -1 \cdot -1 + 0 \cdot -1 + -3 \cdot 4 \\ 4 \cdot -2 + 5 \cdot 4 + 2 \cdot 5 & 4 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 2 \cdot -2 & 4 \cdot -1 + 5 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 16 & -7 \\ -13 & 3 & -11 \\ 22 & 18 & 9 \end{pmatrix}$$

# Determinantes

## CONCEPTOS BASICOS

Es el escalar que resulta de sumar algebraicamente  $n!$  sumandos, de tal forma que cada sumando es el producto de  $n$  factores siendo cada factor un elemento de la matriz perteneciente a fila y columna de los restantes. Cada sumando estará afectado del signo  $+$  o  $-$ , según que la permutación que indica las filas y las que indica las columnas son del mismo o distinto orden respectivamente. Se designa por  $|A|$ . Partiendo de una matriz de orden 2, se puede calcular el determinante de cualquier matriz cuadrada, haciendo divisiones en submatrices cuadradas y multiplicando cada resultado de cada determinante por su menor adjunto.

Para una matriz de orden 2:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Para una matriz de orden 3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$|A| = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$|A| = a_{11} \cdot (a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}) - a_{12} \cdot (a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{31}) + a_{13} \cdot (a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31})$$

## APLICACIONES DE LOS DETERMINANTES

### Menor complementario

Es el determinante de la matriz de orden  $n - 1$  que resulta de eliminar en una matriz la fila  $i$  y la columna  $j$ , sin alterar los demás elementos.

$$M_{ij} = |A| - \{ a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}, a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj} \}$$

### Adjunto

Es el menor complementario de un elemento, que resulta de eliminar la fila y columna donde aparece dicho elemento, y que tiene por signo  $+$  si  $(i + j)$  es par, y  $-$  si  $(i + j)$  es impar.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

### Regular

Es una matriz cuadrada cuyo determinante es distinto de cero:

$$|A| \neq 0$$

### Determinante mediante adjuntos

Es la suma de todos los productos posibles de todos los menores complementarios que se pueden formar con las  $n$  filas o columnas por sus correspondientes adjuntos:



$$|A| = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \dots + a_{nj} \cdot A_{nj}$$

### Determinante de una matriz

Calcular el determinante de la siguiente matriz:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 2 \cdot 2 \cdot 0 - 1 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \cdot 0 - 4 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 1 - 4 \cdot 2 = 2 \cdot 0 - 3 - 0 - 12 + 1 - 8 = -6 - 24 - 7$$

$$|A| = -37.$$

### Matriz adjunta

Es la matriz que resulta de sustituir cada elemento de la matriz por su adjunto:

$$\text{adj } A = (A_{ij})$$

### Matriz inversa

Es la matriz tal que multiplicada por su original da la matriz unidad. La fórmula de la matriz inversa es:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (\text{adj } A)^t$$

Los pasos a seguir para calcular la matriz inversa de una matriz cuadrada regular es:

- Se calcula la matriz adjunta.
- Se halla la matriz transpuesta de la matriz adjunta.
- Se calcula el determinante.
- Se divide cada elemento de la matriz resultante por el determinante.
- Todos los elementos resultantes serán los elementos de la matriz inversa.

### Calcular la matriz inversa

Dada la siguiente matriz, calcular su matriz inversa:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$$

- Matriz adjunta:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

- Matriz transpuesta de la matriz adjunta:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

- Determinante:

$$1 \cdot 4 - (-2 \cdot -3) = 4 - 6 = -2$$

- División de elementos por determinante:

$$\begin{vmatrix} 4/-2 & 2/-2 \\ 3/-2 & 1/-2 \end{vmatrix}$$

- Matriz inversa:

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -3/2 & -1/2 \end{vmatrix}$$

### Rango de una matriz

Es el orden mayor de los menores complementarios no nulos de una matriz.

$$\text{rg}(A) = \text{Max}(M_{ij})$$

### Rango de una matriz

Calcular el rango de la siguiente matriz:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Se calcula todos los menores complementarios distintos de cero:

- $M_{i1} = |0 \cdot 1 - 3 \cdot 2| = 0 - 6 = -6$
- $M_{i2} = |1 \cdot 1 - 3 \cdot 0| = 1 - 0 = 1$
- $M_{i3} = |1 \cdot 2 - 0 \cdot 0| = 2 - 0 = 2$

Como los menores complementarios son de orden y hay por lo menos uno distinto de cero, entonces:

$$\text{rg}(A) = 2$$

# Aplicaciones lineales

## CONCEPTOS BASICOS

Una aplicación lineal u homomorfismo es una aplicación ( $f: U \rightarrow V$ ) de un espacio vectorial sobre otro en el mismo cuerpo de definición si para cualquier par de vectores  $u, v$  de un espacio vectorial y todo escalar  $a, b$  se verifica:

- $f(u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) = f(u_1, u_2, u_3) + f(v_1, v_2, v_3)$
- $f(a \cdot u_1, a \cdot u_2, a \cdot u_3) = a \cdot f(u_1, u_2, u_3)$

Si cumple además  $f(a \cdot u_1 + b \cdot v_1, a \cdot u_2 + b \cdot v_2, a \cdot u_3 + b \cdot v_3) = a \cdot f(u_1, u_2, u_3) + b \cdot f(v_1, v_2, v_3)$ , entonces se habla de homomorfismo.

## Comprobar una aplicación lineal

Probar si la aplicación siguiente  $f: R^2 \rightarrow R^2$  es aplicación lineal o no:

$$f(x, y) = (2x, y)$$

$$f[a \cdot (x_1, y_1) + b \cdot (x_2, y_2)] = f(a \cdot x_1 + b \cdot x_2, a \cdot y_1 + b \cdot y_2) = [2 \cdot (ax_1 + bx_2), ay_1 + by_2]$$

$$a \cdot f(x_1, y_1) + b \cdot f(x_2, y_2) = a \cdot (2x_1, y_1) + b \cdot (2x_2, y_2) = (2 \cdot ax_1 + 2 \cdot bx_2, ay_1 + by_2)$$

Luego sí es una aplicación lineal

## Propiedades

- $f(0) = 0$
- $f(-u) = -f(u)$
- Si  $S$  es un subespacio vectorial,  $f(S)$  también es un subespacio vectorial
- Si  $L$  es un sistema de generadores,  $f(L)$  también es un sistema de generadores
- Si  $L$  es un sistema ligado,  $f(L)$  también es un sistema ligado

## Imagen de una aplicación

Es un subconjunto del espacio vectorial  $V$  en el que tienen aplicación todos los elementos del espacio vectorial  $U$  utilizado en la aplicación:

$$\text{Im}(f) = f(U)$$

## Núcleo de una aplicación

Es el conjunto de vectores que tienen como imagen el vector nulo:

$$N(f) = \{ (u_1, u_2, u_3) \text{ pertenece a } V \mid f(u_1, u_2, u_3) = (0, 0, 0) \} = f^{-1}(0, 0, 0)$$

## Dimensión y rango de una aplicación

La **dimensión** de la imagen y del núcleo de una aplicación viene dado por la siguiente fórmula:

$$\dim(N(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(V)$$

El **rango** de una aplicación es la dimensión del espacio vectorial imagen y coincide con la matriz asociada:

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)) = \dim(f(V)) = \text{rg}(Mf)$$

## **CAMBIO DE BASE**

Sean dos bases  $B_1 = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  y  $B_2 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  siendo  $n$  la dimensión del espacio vectorial  $V$ , donde los vectores de  $B_2$  en  $B_1$  son:

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{11} \cdot e_1 + a_{12} \cdot e_2 + \dots + a_{1n} \cdot e_n \\ u_2 &= a_{21} \cdot e_1 + a_{22} \cdot e_2 + \dots + a_{2n} \cdot e_n \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ u_m &= a_{m1} \cdot e_1 + a_{m2} \cdot e_2 + \dots + a_{mn} \cdot e_n \end{aligned}$$

Sea una aplicación de matrices  $M(f, B_1)$  y  $M(f, B_2)$  en las bases  $B_1$  y  $B_2$ . La relación entre ambas es:

$$M(f, B_2) = C^{-1} \cdot M(f, B_1) \cdot C$$

donde  $C$  es la matriz de cambio de base:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

es decir, sería  $M(B_2, B_1)$ .

# Sistemas de ecuaciones lineales

## EXPRESION MATRICIAL

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de  $m$  ecuaciones y  $n$  incógnitas cuya expresión general es  $A \cdot X = B$ , donde  $A$  es la matriz asociada al sistema,  $X$  la matriz columna de las incógnitas y  $B$  la matriz columna de los términos independientes.

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n &= b_2 \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n &= b_m \end{aligned}$$

Se llama **solución** del sistema a un conjunto de elementos  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$  tales que sustituidos en las incógnitas  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  verifican todas las ecuaciones. Este sistema de ecuaciones puede expresarse en forma matricial como:

$$A \cdot X = B \Rightarrow \begin{array}{c|cccc|c} x_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ x_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}$$

Por tanto, un sistema de  $m$  ecuaciones con  $n$  incógnitas puede interpretarse como la expresión de una aplicación lineal  $f: U \rightarrow V$ , de matriz asociada  $A$  donde  $U$  es un  $K$ -espacio vectorial de dimensión  $n$  y  $V$  es un  $K$ -espacio vectorial de dimensión  $m$ , y tal que la búsqueda de soluciones equivale a hallar vectores  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  que pertenecen a  $U$  que se aplican en el vector  $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$  que pertenece a  $V$ . La discusión del sistema puede realizarse según:

- $b$  no pertenece a  $\text{Im}(f)$ : no existen  $x$  tal que  $f(x) = b$ . El sistema no tiene solución (sistema **incompatible**).
- $b$  pertenece a  $\text{Im}(f)$ : existen  $x$  tales que  $f(x) = b$ . El sistema tiene solución (sistema **compatible**).

Si el sistema tiene solución, pueden darse varios casos:

- Que sea **indeterminado**: la solución no es única.
- Que sea **determinado**: la solución es única.
- Que sea **homogéneo**: la solución es cero ( $A \cdot X = 0$ ).

## METODOS DE RESOLUCION

### Sistemas equivalentes

Si en la matriz asociada a un sistema de ecuaciones lineales se efectúan operaciones elementales con las filas, la matriz obtenida corresponde a un sistema de ecuaciones equivalente al primero, es decir, tienen el mismo sistema de solución.

### Teorema de Rouché-Frobenius

La condición necesaria y suficiente para que un sistema sea compatible (que tenga solución) es que coincidan los rangos de la matriz  $A$  y de la matriz ampliada  $A | B$  que resulta de **ampliar**  $A$  con la matriz columna de los términos independientes  $B$ , siendo  $n$  el número de incógnitas:

- Si  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) = n$  el sistema es determinado.
- Si  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) < n$  el sistema es indeterminado.

## Estudio de la compatibilidad de un sistema

Resolver el sistema:

$$x + 2y - z = 1$$

- $3x + y - 2z = 2$
- $x + 5y - 4z = -2$

$$(A|B) = \left/ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 5 & -4 & -2 \end{array} \right/$$

Como  $r(A) = 2$  y  $r(A|B) = 3$  el sistema es incompatible

## Regla de Cramer

Se aplica cuando tiene igual número de ecuaciones que de incógnitas, la matriz es regular y el sistema es compatible determinado. Su solución única es:

$$x_i = |A_i| / |A|$$

donde  $i = 1, 2, \dots, n$ , siendo  $A_i$  la matriz que resulta de **sustituir** en  $A$  la columna  $i$  por la matriz columna  $B$ :

$$A_i = A - \{a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni}\} + \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$$

## Estudio de la solución de un sistema compatible determinado

Resolver el sistema:

$$x + y + z = 1$$

- $2x + y - z = 2$
- $3x + y + 3z = 0$

Como  $r(A) = r(A|B) = 3$  y  $r(A|B) = 3$  el sistema es compatible determinado y por tanto, tiene solución única. Se resuelve por Cramer:

$$A_x = \frac{\left/ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right/}{\left/ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right/}} = 0 \quad A_y = \frac{\left/ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right/}{\left/ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right/}} = 3/2 \quad A_z = \frac{\left/ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right/}{\left/ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right/}} = -1/2$$

## Método de Gauss

Se trata de aplicar a la matriz ampliada  $(A|B)$  **transformaciones elementales** de las filas hasta conseguir una matriz triangular, cuyo sistema asociado es fácilmente resoluble:

$$\left| \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc|c} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & x_1 \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} & x_2 \end{array} \right|$$

$$\begin{array}{cccc|cccc|cccc|} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m & 0 & 0 & 0 & c_{mn} & x_n \end{array}$$

## Estudio de un sistema por solución de un sistema equivalente

Resolver el sistema:

$$x + y + 3z = 5$$

- $y + z = 3$

$$2x - y + 4z = 11$$

Se considera la matriz ampliada del sistema:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & 11 \end{array}$$

Se sustituye la última fila por ella misma menos la primera por 2. Se obtiene:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{array}$$

Se sustituye la última fila por ella misma menos 3 veces la segunda. Se obtiene:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -8 \end{array}$$

Y al final corresponde a un sistema equivalente al primero:

$$x + y + 3z = 5$$

- $y + z = 3$
- $5z = -8$

Donde  $z = 8/5$ , se sustituye en la segunda donde  $y = -7/5$  y sustituyendo ambos en la primera  $x = 8/5$

## Discutir y resolver un sistema según un valor determinado

Discutir y resolver el sistema:

$$\begin{array}{l} ax + y + z = a \\ x + ay + z = a^2 \\ x + y + az = a^3 \end{array}$$

Haciendo el determinante de la matriz A, tendremos:

$$\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & \\ 1 & a & 1 & \\ 1 & 1 & a & \end{array} \Rightarrow a = -2 \quad y \quad a = 1$$

1º Caso) Si  $a = -2$  entonces las matrices son:

$$\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & -2 \end{array}$$

## Apuntes de Álgebra

$$\begin{array}{c|ccc|c} 1 & -2 & 1 & & 4 \\ 1 & 1 & -2 & & -8 \end{array} \Rightarrow r(A) = 2 \text{ y } r(A/B) = 3 \Rightarrow \text{Sistema incompatible}$$

2º Caso) Si  $a = 1$  entonces las matrices son:

$$\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 1 & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & 1 & & 1 \end{array} \Rightarrow r(A) = r(A/B) = 1 \Rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

3º Caso) Si  $a \neq -2$  y  $a \neq 1$  entonces las matrices son:

$$r(A) = r(A/B) = 3 \Rightarrow \text{Sistema compatible determinado}$$

$$x = |A_x| / |A| = -a(a+1) / a+2$$

$$y = |A_y| / |A| = a / a+2$$

$$z = |A_z| / |A| = a(a+1)^2 / a+2$$

Donde si  $a = -2$  no existe solución



