

## Capítulo 1

# Funciones de varias variables: límites y continuidad



# Capítulo 1

## Funciones de varias variables: límites y continuidad

### 1.1 Función: definición, dominio e imagen

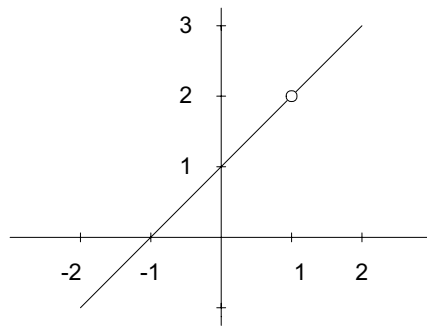
Se entiende por *función* toda regla o ley de correspondencia  $f : D \subseteq X \rightarrow Y$  entre dos conjuntos que asigne un único elemento  $y$  del conjunto de llegada  $Y$  a cada elemento  $x$  del *dominio* o *campo* de definición  $D$  del conjunto inicial  $X$ ; que consiste precisamente en el subconjunto  $D \subseteq X$  formado por todos los elementos  $x \in X$  que tienen *imagen* (correspondencia)  $y = f(x)$  por la función  $f$ . El conjunto de imágenes  $f(x)$  se denomina *recorrido* o *imagen* de la función.

En nuestro caso, trataremos con espacios reales de dimensión finita,  $\mathbb{R}^n$ , cuyos elementos son  $n$ -uplas o vectores de  $n$  componentes,  $(x_1, \dots, x_n)$ . Así, una función  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  será una ley que asigne a cada vector  $(x_1, \dots, x_n)$  de  $D$  un único vector  $(y_1, \dots, y_m) = f(x_1, \dots, x_n)$  de  $\mathbb{R}^m$ . Las  $n$  variables de que dependen las coordenadas del conjunto inicial  $\mathbb{R}^n$  se suelen denominar *independientes*, y las  $m$  variables del conjunto de llegada  $\mathbb{R}^m$  *dependientes*, puesto que vienen dadas como funciones de las primeras.

Con normalidad, entenderemos que el *dominio* de una función es el conjunto total de uplas sobre las que está bien definida: como es natural, los denominadores de funciones racionales han de tomar valores distintos de cero, las funciones radicales pares sólo están definidas para valores no negativos, los logaritmos sólo están definidos para valores estrictamente positivos, etc.

**Ejemplo 1.1.1** La función  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ .

Tiene a  $D = \mathbb{R} - \{1\}$  por dominio y a  $\mathbb{R} - \{2\}$  por imagen. Nótese que se trata de la recta  $y = x + 1$  a falta del punto  $(1, 2)$ . Posteriormente veremos que esta función se puede extender de manera continua hasta coincidir con la recta  $y = x + 1$ , que en verdad resulta de efectuar el cociente  $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ : de hecho, una práctica habitual con funciones racionales como la que nos lleva es la de simplificar antes de calcular los ceros del denominador, porque en otro caso se puede excluir puntos del dominio de definición de manera indebida.

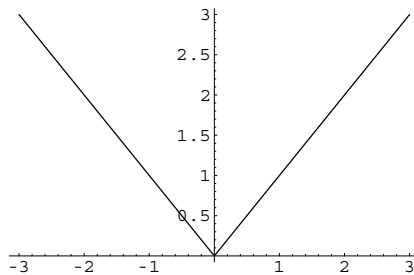


**Figura 1.1:** Se trata de la recta  $y = x + 1$  menos un punto

■

**Ejemplo 1.1.2** La función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \sqrt{x^2}$ .

Tiene a todo  $\mathbb{R}$  como dominio de definición, y al intervalo  $[0, +\infty)$  como imagen. Nótese que  $f(x) = |x|$ , de manera que  $\sqrt{x^2} \neq x$  en general.



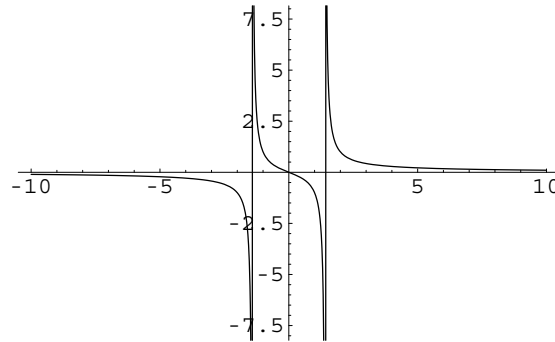
**Figura 1.2:** Gráfica de la función dada por  $\sqrt{x^2} = |x|$

$$\text{De hecho, } \sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

■

**Ejemplo 1.1.3** La función  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida según  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2}$ .

Tiene por dominio a  $D = \mathbb{R} - \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ , y por imagen a todo  $\mathbb{R}$ .



**Figura 1.3:** Representación gráfica de la función dada por  $\frac{x}{x^2 - 2}$

■

**Ejemplo 1.1.4** La función  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \frac{|x+1| - |x-1|}{x}$ .

Tiene a  $\mathbb{R} - \{0\}$  por dominio de definición, y al intervalo  $(0, 2]$  por imagen.

Es importante saber utilizar la función valor absoluto, tal que  $|x| = x$  si  $x \geq 0$  y  $|x| = -x$  si  $x < 0$ . De este modo, para saber qué valor asigna la función  $f(x)$  hay que estudiar cómo se comportan los valores absolutos  $|x+1|$  y  $|x-1|$  según qué intervalos. Así,  $|x+1| = x+1$  para  $x+1 \geq 0$  (esto es,  $x \geq -1$ ) y  $|x+1| = -(x+1) = -x-1$  para  $x+1 < 0$  (i.e.  $x < -1$ ). Del mismo modo,  $|x-1| = x-1$  para  $x-1 \geq 0$  (esto es,  $x \geq 1$ ), mientras que  $|x-1| = -(x-1) = 1-x$  para  $x-1 < 0$  (i.e.  $x < 1$ ).

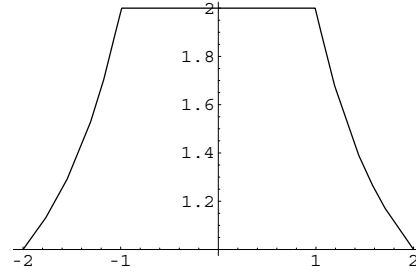
Por tanto,

$$|x+1| - |x-1| = \begin{cases} x+1 - (x-1) = 2, & \text{si } x \geq 1, \\ x+1 - (1-x) = 2x, & \text{si } -1 \leq x < 1, \\ -x-1 - (1-x) = -2, & \text{si } x < -1. \end{cases}$$

Luego la función  $f(x)$  resulta ser

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{|x|}, & \text{si } |x| \geq 1, \\ 2, & \text{si } |x| < 1, x \neq 0. \end{cases}$$

Ahora es visible que la función se puede extender de manera natural en  $x = 0$  definiendo  $f(0) = 2$ .

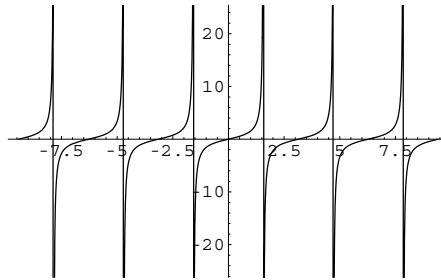


**Figura 1.4:** Gráfica de la función dada por  $\frac{|x+1| - |x-1|}{x}$

■

**Ejemplo 1.1.5** La función  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida según  $f(x) = \operatorname{tg} x$ .

Tiene a  $\mathbb{R} - \{\frac{2k+1}{2}\pi : k \in \mathbb{Z}\}$  por dominio, y a todo  $\mathbb{R}$  por imagen. Hay que tener en cuenta que los valores iniciales representan **radianes** y no grados: todas las funciones trigonométricas que se consideren en el curso se han de entender dadas en radianes y no en grados. En caso necesario, se puede recurrir a la regla de equivalencia  $\pi$  radianes = 180 grados.

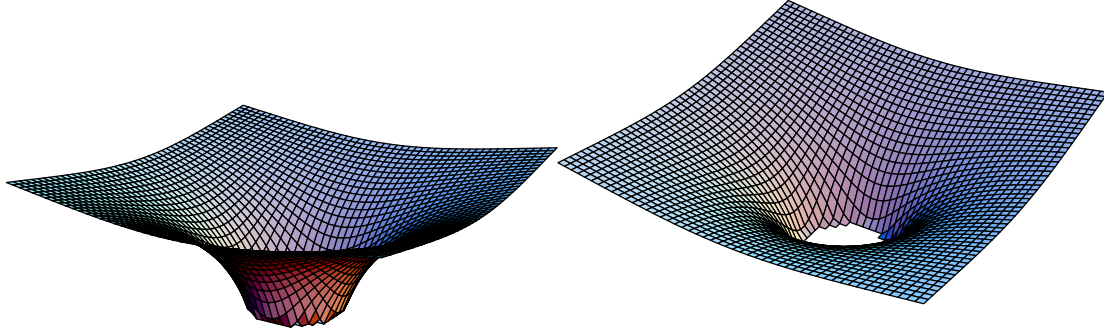


**Figura 1.5:** Gráfica de la función  $\operatorname{tg} x$

■

**Ejemplo 1.1.6** La función  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y) = \sqrt{\ln(x^2 + y^2)}$ .

Tiene por dominio a todo el plano  $\mathbb{R}^2$  a excepción del interior del círculo centrado en el origen y de radio 1 (esto es, el campo de definición coincide con el conjunto de puntos  $\{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 1\}$ ), mientras que la imagen rellena el intervalo  $[0, +\infty)$ .

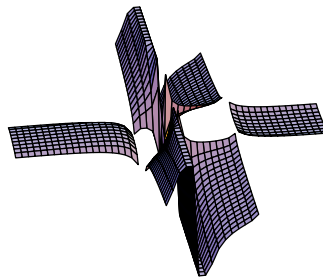


**Figura 1.6:** Dos vistas de la superficie dada por  $z = \sqrt{\ln(x^2 + y^2)}$

■

**Ejemplo 1.1.7** La función  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f(x, y) = \frac{\ln[(x^2 + x - 2)(1 - y^2)]}{x}$

La imagen recorre todo  $\mathbb{R}$ , mientras que el dominio de definición consiste en seis bandas,  $((-2, 0) \cup (0, 1)) \times ((-\infty, -1) \cup (1, +\infty))$  y  $((-\infty, -2) \cup (1, +\infty)) \times (-1, 1)$ .



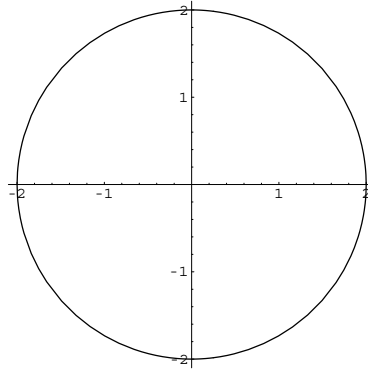
**Figura 1.7:** Vista de la superficie dada por  $z = \frac{\ln[(x^2 + x - 2)(1 - y^2)]}{x}$

■

En ocasiones, una función puede venir dada de manera *implícita*, de modo que resulta difícil (a veces imposible) determinar su dominio. Por manera implícita entendemos una función del tipo  $F(\mathbf{x}) = 0$ , donde alguna(s) de las variables  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  queda(n) caracterizada(s) como función(es) de las restantes.

**Ejemplo 1.1.8** Sea la circunferencia  $x^2 + y^2 - 4 = 0$ .

Determina  $y$  como dos funciones implícitas de  $x$ , cuales son  $y_1(x) = \sqrt{4 - x^2}$  e  $y_2(x) = -\sqrt{4 - x^2}$ .



**Figura 1.8:** Representación simultánea de las funciones  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$

■

En lo que sigue, nos centraremos en funciones del tipo  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , incidiendo sobremanera en los casos  $n = 1, 2$ ; dado que el estudio de la continuidad, diferenciabilidad e integrabilidad de funciones  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  se reduce al estudio análogo de las  $m$  funciones componentes,  $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i \leq m$ , con

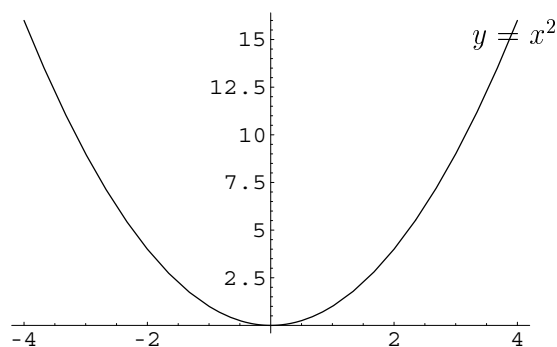
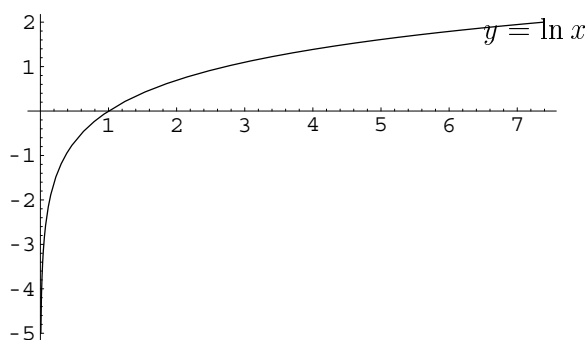
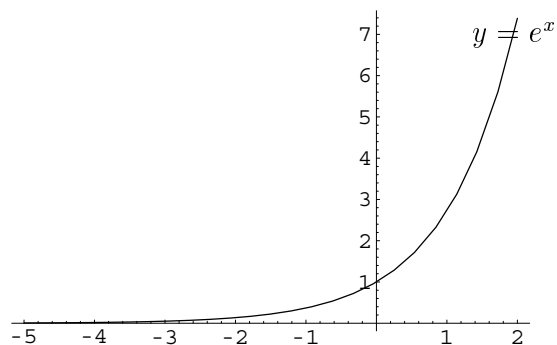
$$g(x_1, \dots, x_n) = (g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)).$$

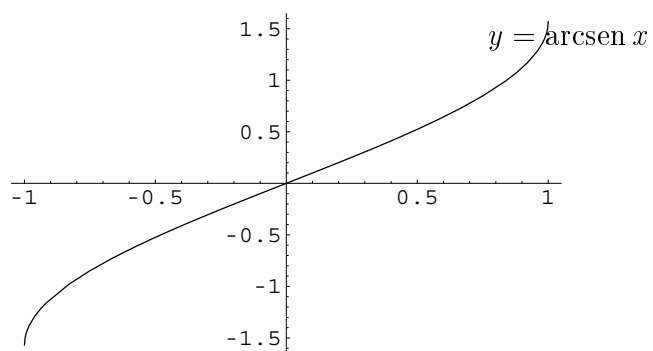
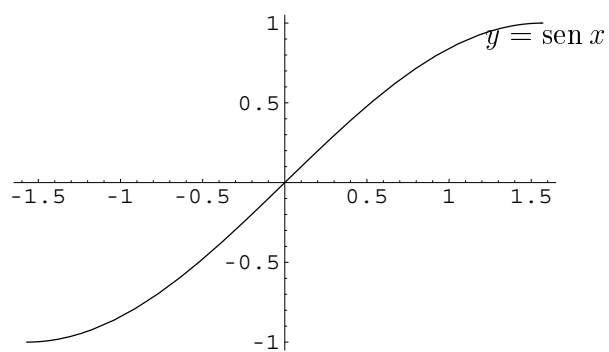
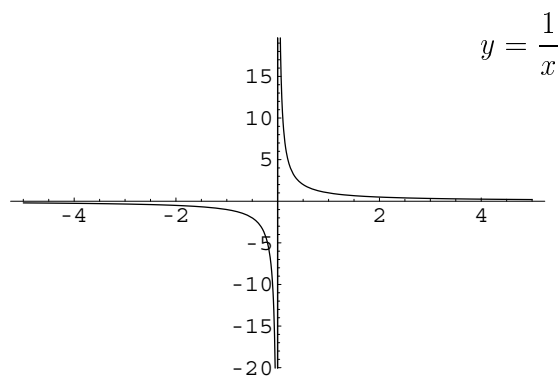
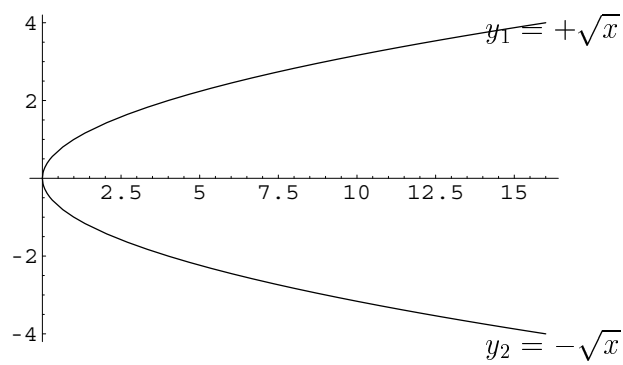
## 1.2 Representación de funciones: trazas y curvas de nivel

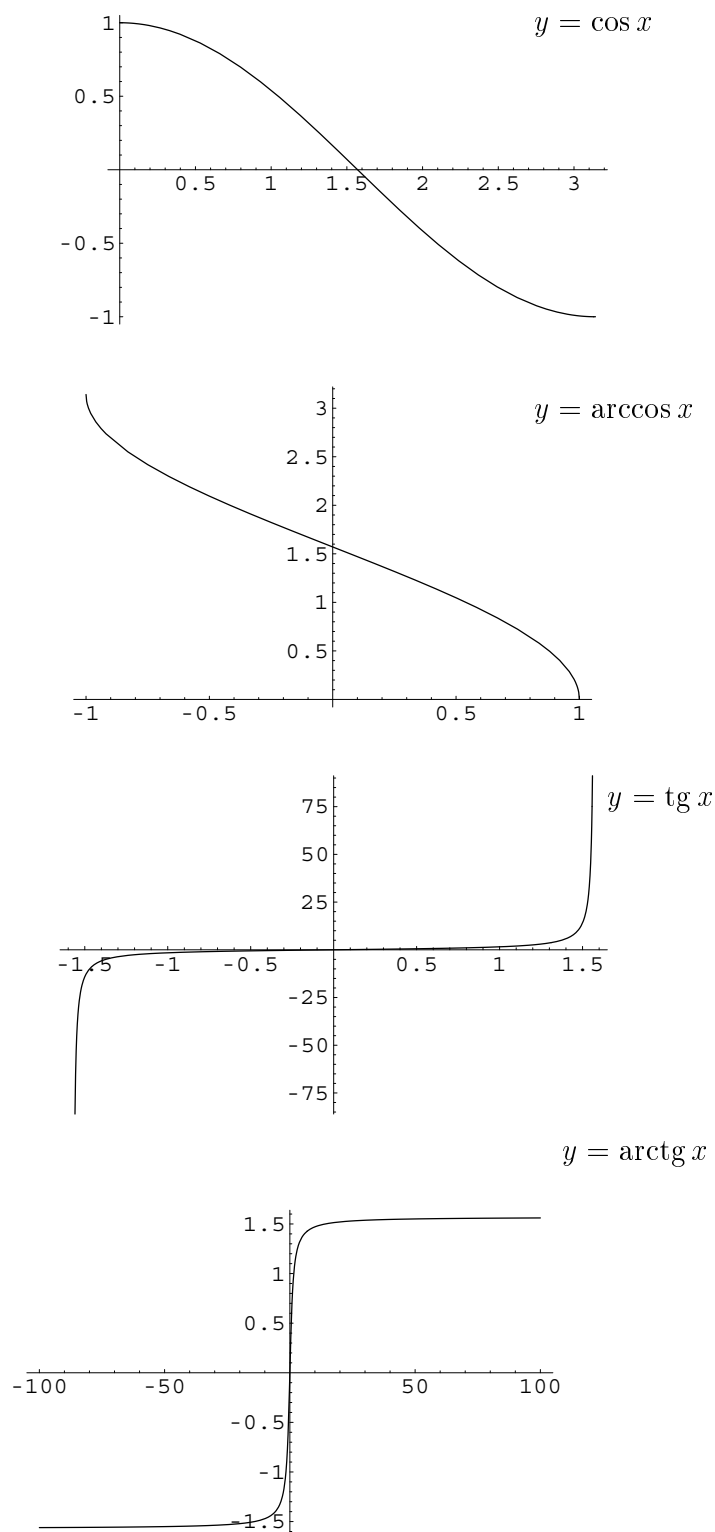
A la hora de estudiar el comportamiento de una función, puede resultar útil el saber qué disposición presentan en el espacio los puntos por los que pasa la función, lo que se conoce como gráfica de la función.



Es de común conocimiento la representación gráfica (que incluimos a continuación) de funciones tales como  $e^x$ ,  $\ln x$ ,  $x^2$ ,  $\pm\sqrt{x}$ ,  $\frac{1}{x}$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$ ,  $\arccos x$ ,  $\dots$ , y en general la de cualquier función real de una variable (basta estudiar el dominio de definición, la existencia de asíntotas o ramas parabólicas, los cortes con los ejes, las regiones en que es positiva o negativa, su crecimiento y la localización de extremos relativos, el comportamiento en el infinito, etc.). Para un repaso conciso recomendamos ver el Apéndice B. Nótese que las funciones que damos a continuación por parejas son una la inversa de la otra. Esto es fácil de reconocer porque han de ser necesariamente simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante.





**Figura 1.9:** Gráficas de las funciones elementales y sus inversas

En el caso de funciones de varias variables la representación gráfica resulta en general bastante más compleja. Por este motivo, una táctica que se suele emplear con frecuencia es la de analizar el comportamiento de la función  $z = f(x, y)$  según distintas secciones (*trazas*) por planos del tipo  $x = c$ ,  $y = c$  ó  $z = c$ , para distintas constantes dadas  $c$ .

También puede ayudar el estudio del *mapa de contorno* o de *curvas de nivel*, que consiste en el dibujo simultáneo en el plano de curvas del tipo  $f(x, y) = c$  para distintos valores constantes de  $c$ , a partir del cual es relativamente sencillo localizar extremos relativos y puntos de silla (a estudiar en el capítulo siguiente). Este tipo de representaciones es propio de mapas meteorológicos (isobaras de presión atmosférica) y topográficos (marcando los distintos accidentes del terreno, según las alturas).

Otra variedad de representación plana de una función, íntimamente ligada a la anterior, es el *mapa de densidad*, en el que se proyecta sobre el plano  $XY$  el valor de la función mediante grises de distinta intensidad, dependiendo del valor de la función en dicho punto. Este tipo de representación suele ser útil cuando se quiere analizar la intensidad de una cierta magnitud (impacto del sol por agujeros en la capa de ozono, temperaturas de una zona, índice pluviométrico, etc.). En definitiva, consiste en el sombreado de la zonas intermedias entre curvas de nivel consecutivas de un mapa de contorno, siguiendo la convención de que zonas que correspondan a valores cada vez más altos van sombreadas en un tono cada vez más claro; y recíprocamente, zonas que correspondan a valores cada vez más bajos de la función van sombreadas en un tono cada vez más oscuro.

**Ejemplo 1.2.1** Sea  $z_1 = e^{-xy}$ .

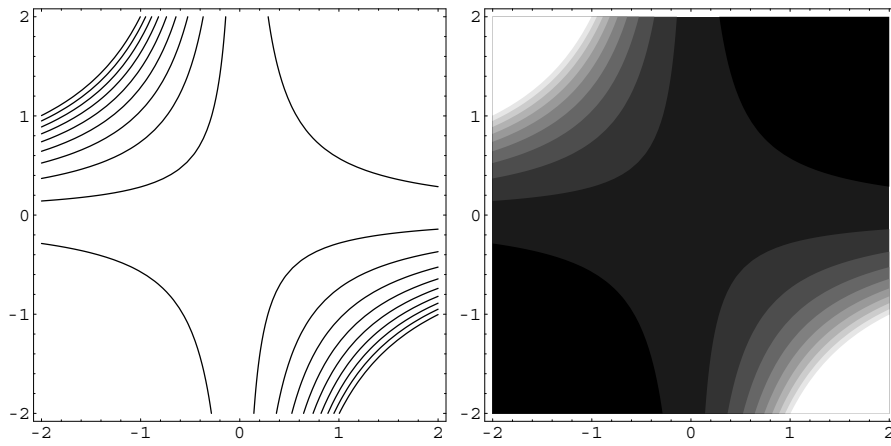
Las curvas de nivel de  $z_1 = e^{-xy}$  son de la forma  $c = e^{-xy}$ , para  $c > 0$  (recuérdese que el recorrido de la exponencial es el intervalo de números reales positivos). Es decir, las curvas de nivel de la función en el plano  $z = c$  vienen dadas por la ecuación  $c = e^{-xy} \Leftrightarrow -\ln c = xy$ , que constituyen hipérbolas para  $\ln c \neq 0$ , y el par de rectas de ejes cartesianos para  $\ln c = 0$ . Nótese que  $\ln c$  está bien definido, por ser  $c > 0$ .

Las hipérbolas del tipo  $xy = k$  con  $k > 0$  tienen gráficas similares a la función  $y = \frac{1}{x}$  (de hecho ésta es la hipérbola para  $k = 1$ ), más lejos o cerca del origen según sea mayor o menor el valor de  $k$  respecto de 1.

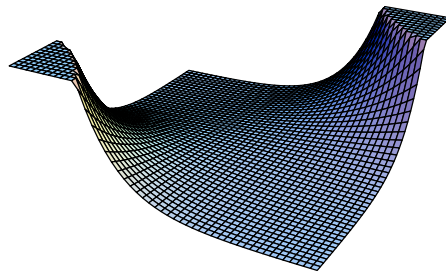
Las hipérbolas del tipo  $xy = k$  con  $k < 0$  tienen gráficas similares a la función  $y = -\frac{1}{x}$  (de hecho ésta es la hipérbola para  $k = -1$ ), más lejos o cerca del origen según sea menor o mayor el valor de  $k$  respecto de  $-1$ .

De modo que cuando  $k = -\ln c > 0$ , esto es, para  $0 < c < 1$ , las curvas de nivel son hipérbolas del tipo  $xy = k$  en el primer y tercer cuadrante, en las que la función toma el valor  $0 < e^{-k} < 1$ , que tiende a 0 cuando  $k \rightarrow \infty$ . Por otra parte, cuando  $k = -\ln c < 0$ , esto es, para  $1 < c$ , las curvas de nivel son hipérbolas  $xy = k$  en el segundo y cuarto cuadrantes, en las que la función toma el valor  $1 < e^{-k}$ , que tiende a infinito cuando  $k \rightarrow -\infty$ .

Ya tenemos formada una idea clara de cómo ha de ser la superficie  $z = e^{-xy}$ : en los ejes coordenados la función vale 1, disminuye su valor por valores positivos hasta tender a 0 según hipérbolas en los cuadrantes primero y tercero, y aumenta su valor a partir de 1 hasta infinito según hipérbolas en los cuadrantes segundo y cuarto.



**Figura 1.10:** Mapas de contorno y de densidad de  $z_1 = e^{-xy}$



**Figura 1.11:** Representación gráfica de la superficie  $z_1 = e^{-xy}$

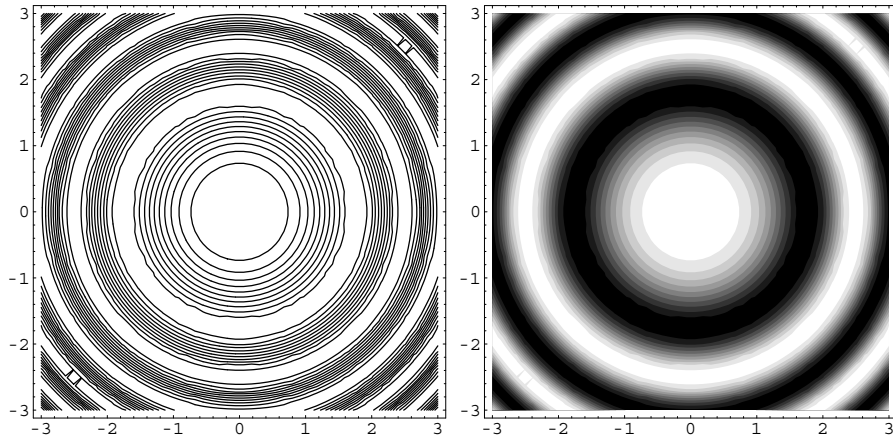
■

**Ejemplo 1.2.2** Sea  $z_2 = \cos(x^2 + y^2)$ .

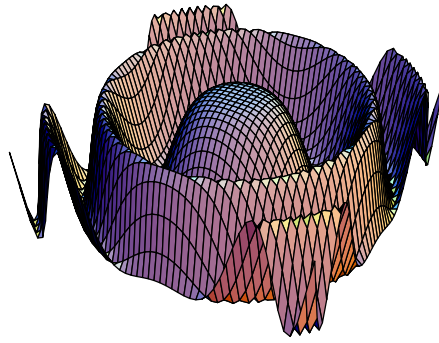
Las curvas de nivel de  $z_2 = \cos(x^2 + y^2)$  son de la forma  $c = \cos(x^2 + y^2)$ , para  $-1 \leq c \leq 1$  (el recorrido del coseno oscila en el intervalo  $[-1, 1]$ ). Es decir, las curvas de nivel de la función en el plano  $z = c$  vienen dadas por la ecuación  $x^2 + y^2 = \arccos c$ , que constituyen circunferencias de centro el origen de coordenadas y radio  $\sqrt{\arccos c}$ . Aquí abusamos al considerar  $x = \arccos y$  como una función, dado que como función inversa de la función periódica  $y = \cos x$ , sólo está definida en un intervalo básico del tipo  $[k\pi, (k+1)\pi]$  para un entero  $k$  prefijado; fijemos nosotros como intervalo básico el  $[0, \pi]$ . Así,  $\arccos c$  da el único ángulo en radianes dentro de  $[0, \pi]$  cuyo coseno vale  $c$ ; sin embargo hay infinitos ángulos en radianes cuyo coseno también vale  $c$  (al menos, los de la forma  $(\arccos c) + 2k\pi$ , con  $k$  entero. Abusando de la notación, para nosotros  $\arccos c$  representa **todos los ángulos** en radianes cuyo coseno vale  $c$ .

De este modo, para cada  $c$  entre  $-1$  y  $1$ , la curva de nivel  $\arccos c = x^2 + y^2$  consiste en realidad en infinitas circunferencias de centro el origen y radio  $\sqrt{\arccos c}$ , una por cada radián positivo (debe ser de la forma  $x^2 + y^2$ , por ende positivo) cuyo coseno sea  $c$ . En cada una de estas circunferencias la función toma el valor  $c$ . Como en el origen de coordenadas la función vale  $1$ , la superficie se extenderá desde este punto en todas direcciones mediante ondas sinusoidales del tipo del coseno, expandiéndose de manera radial por circunferencias. Intuitivamente, debería consistir, pues, en la superficie de revolución que engendra la gráfica de  $y = \cos x$  al girar sobre el eje  $z$ .

Incluimos mapas de contorno y de densidad de la función, amén de la superficie real.



**Figura 1.12:** Mapas de contorno y de densidad de  $z_2 = \cos(x^2 + y^2)$

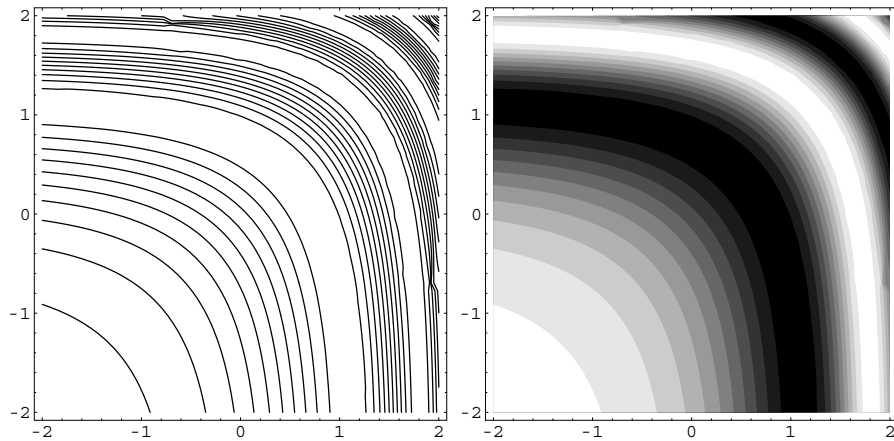


**Figura 1.13:** Gráfica de la superficie  $z_2 = \cos(x^2 + y^2)$

■

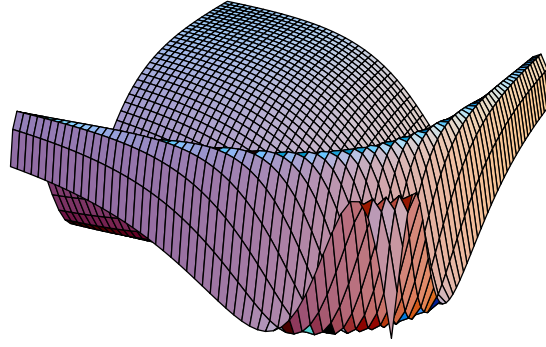
**Ejemplo 1.2.3** Sea  $z_3 = \cos(e^x + e^y)$ .

Las curvas de nivel de  $z_3 = \cos(e^x + e^y)$  son de la forma  $c = \cos(e^x + e^y)$ , para  $-1 \leq c \leq 1$ , de modo que  $e^x + e^y = \arccos c$ , donde nuevamente hemos de interpretar que  $\arccos c$  representa todos los radianes (positivos, puesto que  $e^x + e^y > 0$  para todo punto  $(x, y)$  del plano) cuyo coseno vale  $c$ . Para cada uno de estos radianes, digamos  $k > 0$ , tenemos una curva del tipo  $e^x + e^y = k$ , esto es,  $y = \ln(k - e^x)$ , cuyo dominio es  $(-\infty, \ln k)$ . En este intervalo, la función  $y = \ln(k - e^x)$  es estrictamente decreciente, presenta una asíntota horizontal en  $y = \ln k$  cuando  $x \rightarrow -\infty$  y una asíntota vertical en  $x = \ln k$ . Y la función  $f(x, y)$  toma el valor  $\cos k$  en toda la curva. De modo que la superficie  $z_3$  oscila entre 1 y  $-1$ , según ondas del tipo  $y = \ln(k - e^x)$ .



**Figura 1.14:** Mapas de contorno y de densidad de  $z_3 = \cos(e^x + e^y)$

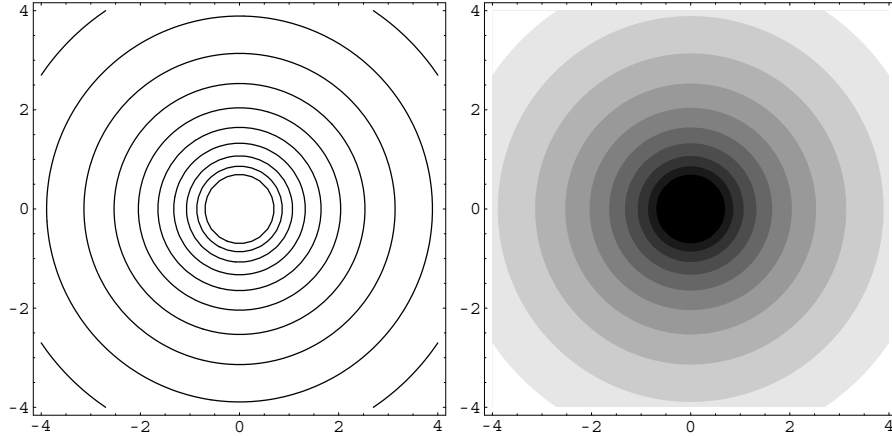
■



**Figura 1.15:** Gráfica de la superficie  $z_3 = \cos(e^x + e^y)$

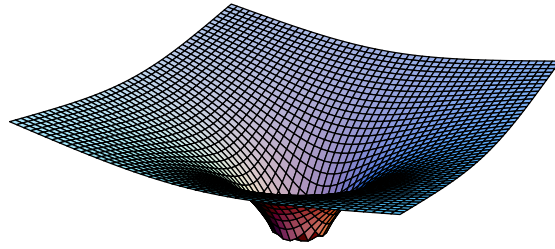
**Ejemplo 1.2.4** Sea  $z_4 = \ln(x^2 + y^2)$

Las curvas de nivel de  $z_4 = \ln(x^2 + y^2)$  son de la forma  $c = \ln(x^2 + y^2)$ , para  $c \in \mathbb{R}$ , de modo que  $x^2 + y^2 = e^c$ ; que constituyen circunferencias de centro el origen de coordenadas y radio  $r = \sqrt{e^c}$ . Como  $c = \ln r^2$ , para  $r$  el radio de las circunferencias, cuando  $r \rightarrow 0^+$ , se tiene que  $c \rightarrow -\infty$ ; por otra parte, cuando  $r$  se hace cada vez mayor,  $c$  se hace cada vez mayor. Así, la superficie debe ser una especie de embudo, que se abre en forma de logaritmo neperiano hasta el infinito, y se cierra hacia menos infinito en el origen de coordenadas, siempre según circunferencias. Intuitivamente, ha de corresponder con la superficie de revolución que se obtiene al girar la gráfica de  $y = \ln x$  alrededor del eje  $z$ .



**Figura 1.16:** Mapas de contorno y de densidad  $z_4 = \ln(x^2 + y^2)$





**Figura 1.17:** Gráfica de la superficie  $z_4 = \ln(x^2 + y^2)$

■

### 1.3 Límites de funciones en un punto

Antes de entrar en materia, hemos de hacer un alto en el camino para incidir brevemente en la función **valor absoluto** y en el manejo elemental de desigualdades, que tan relevante rol juegan en el cálculo de límites:

- La ecuación  $|x - a| = c$  se puede traducir en dos maneras equivalentes: dado que  $c$  mide la distancia entre  $x$  y  $a$ , se tiene que  $x = a \pm c$ ; de otro modo, si  $|x - a| = c$  entonces  $\pm(x - a) = c$ , de donde  $x = a \pm c$ .
- Se verifica la desigualdad triangular propia de cualquier aplicación distancia:  $|x + y| \leq |x| + |y|$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ .
- Por otra parte,  $|x - y| \geq |x| - |y|$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ .
- Asimismo,  $|xy| = |x||y|$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ .
- En multitud de ocasiones, las funciones de variable real vienen definidas sobre intervalos, los cuales admiten una representación natural por medio de valores absolutos: los puntos  $x$  tales que  $|x - a| < c$  determinan el intervalo  $(a - c, a + c)$ , dado que  $|x - a| < c$  equivale a  $0 \leq x - a < c$  y  $0 \leq -(x - a) < c$ , de donde  $x < a + c$  y  $a - c < x$ . El intervalo tendría sus extremos cerrados en el caso  $|x - a| \leq c$ . A partir de aquí es inmediato deducir que  $|x - a| > c$  se traduce en  $x \in (-\infty, a - c) \cup (a + c, \infty)$ .

- $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}.$
- $a \leq b \Leftrightarrow \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \text{ con } ab > 0.$
- $a \leq b \text{ y } c > 0 \text{ implican } ac \leq bc, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}.$
- $a \leq b \text{ y } c < 0 \text{ implican } ac \geq bc, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}.$
- $a \leq b \text{ y } c \leq d \text{ implican } ac \leq bd \text{ y } a + c \leq b + d, \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}.$

Téngase en cuenta que resolver una desigualdad significa encontrar el conjunto de todos los números reales que hace que la desigualdad sea verdadera. En contraste con una ecuación no lineal (cuyo conjunto solución por lo regular consiste en un número o un conjunto finito de números), el conjunto solución de una desigualdad viene dado en general por todo un intervalo o la unión de varios de ellos. Adjuntamos un resumen con las notaciones más usuales.

Notación de conjuntos	Notación de intervalo	Representación gráfica
$\{x : a < x < b\}$	$(a, b)$	
$\{x : a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	
$\{x : a \leq x < b\}$	$[a, b)$	
$\{x : a < x \leq b\}$	$(a, b]$	
$\{x : x \leq b\}$	$(-\infty, b]$	
$\{x : x < b\}$	$(-\infty, b)$	
$\{x : a \leq x\}$	$[a, \infty)$	
$\{x : a < x\}$	$(a, \infty)$	
$\mathbb{R}$	$(-\infty, \infty)$	

**Figura 1.18:** Convenciones usuales para denotar los distintos intervalos

**Ejemplo 1.3.1** Resolver la desigualdad  $4x^2 - 5x - 6 > 0$ .

Los dos ceros reales del polinomio  $P(x) = 4x^2 - 5x - 6$ , caso de existir (pudiera tratarse de una pareja de números *complejos conjugados*), son los únicos números reales que hacen nula la desigualdad, de modo que a derecha e izquierda de estos puntos la ecuación toma un signo constante. Basta probar el signo en un punto de cada uno de los tres intervalos para determinar el signo que toma la desigualdad

en cada uno de dichos intervalos. Dado que los ceros del polinomio son  $x_1 = 2$  y  $x_2 = -\frac{3}{4}$ , la solución de la desigualdad comprenderá ninguno o varios de los intervalos  $(-\infty, -\frac{3}{4})$ ,  $(-\frac{3}{4}, 2)$  y  $(2, \infty)$ .

Como  $P(-1) = 3 > 0$ ,  $P(0) = -6 < 0$  y  $P(3) = 15 > 0$ , la solución de la desigualdad consiste en la unión  $(-\infty, -\frac{3}{4}) \cup (2, \infty)$ . ■

**Ejemplo 1.3.2** Resolver  $|x - 4| < 2$ .

Se tiene que  $|x - 4| < 2 \iff -2 < x - 4 < 2 \iff 2 < x < 6$ , de donde hablamos del intervalo  $(2, 6)$ . Geométricamente, era fácil de prever:  $|x - 4| < 2$  caracteriza aquellos puntos  $x$  que distan a lo sumo 2 de 4, por ende aquellos entre 2 y 6. ■

Ya estamos en condiciones de hablar sobre el concepto de límite.

La noción de límite de una función en un punto es bastante intuitiva: sea  $f(\mathbf{x})$  una función definida para todos los valores de  $\mathbf{x}$  próximos a un punto  $\mathbf{a}$ , aunque no necesariamente en el propio punto  $\mathbf{a}$ . Supongamos que existe un número real  $l$  con la propiedad de que  $f(\mathbf{x})$  se acerca cada vez más a  $l$  cuando  $\mathbf{x}$  se acerca cada vez más a  $\mathbf{a}$ . En estas condiciones se dice que  $l$  es el *límite* de  $f(\mathbf{x})$  cuando  $\mathbf{x}$  tiende a  $\mathbf{a}$ . Nótese que en caso alguno hemos determinado la dimensión de los puntos  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{a}$ : pueden ser números reales o puntos de  $\mathbb{R}^n$  para  $n > 1$ .

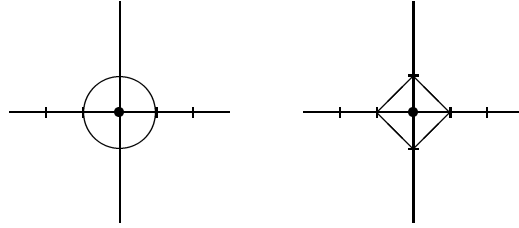
El concepto de límite envuelve pues las nociones de proximidad y cercanía. En dimensión 1 el concepto de distancia entre dos puntos es clara: la distancia entre dos números reales  $x$  y  $a$ ,  $d(x, a)$ , consiste en el valor absoluto de su diferencia,  $|x - a|$ .

Para puntos  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{a}$  en el plano (o cualquier espacio  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ ), la noción usual de distancia  $d(\mathbf{x}, \mathbf{a})$  viene dada por el módulo del vector de extremos  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{a}$ : si  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  y  $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ , entonces  $d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2}$ , conocida como *distancia euclídea*.

Sin embargo, existen infinitas formas distintas de medir la proximidad de dos puntos en  $\mathbb{R}^2$ . Con normalidad, aparte de la distancia euclídea, nosotros nos serviremos de la que vamos a llamar *distancia 1*,  $d_1(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ , que consiste en la suma de los valores absolutos de la diferencia de coordenadas homólogas:  $d_1(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2|$ . Es obvio que para un par de puntos  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{a}$ , el valor de la distancia que los separa

será cuantitativamente distinto según se utilice la distancia euclídea o la distancia 1, aunque no así cualitativamente: si los dos puntos están próximos, lo están para cualquier distancia; análogamente, si los dos puntos están separados, lo están para cualquier distancia. Este hecho es crucial para que podamos utilizar indistintamente una distancia u otra a la hora de evaluar la existencia de un límite doble en el plano.

Utilizaremos la notación  $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$  para referirnos a la distancia entre  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{x}$ , sin distinción de la función métrica ( $d$  ó  $d_1$ ) que se utilice; por otra parte,  $\|\mathbf{a}\|$  hará referencia a la distancia de  $\mathbf{a}$  al origen de coordenadas. El conjunto de puntos que dista de  $\mathbf{a}$  menos de  $\delta$  se denomina *bola de centro  $\mathbf{a}$  y radio  $\delta$* , y lo denotaremos por  $B(\mathbf{a}, \delta)$ . En el caso de manejar la distancia euclídea,  $B(\mathbf{a}, \delta)$  consiste en la esfera  $n$ -dimensional (círculo, en caso de que  $n = 2$ ) de centro  $\mathbf{a}$  y radio  $\delta$ ; mientras que para  $d_1$  esa bola consiste en el cubo  $n$ -dimensional (cuadrado, en caso de que  $n = 2$ ) de centro  $\mathbf{a}$  y diagonal  $2\delta$ . Nótese que en el caso real,  $B(\mathbf{a}, \delta)$  consiste en el intervalo  $(a - \delta, a + \delta)$ , independientemente de la métrica utilizada,  $d$  ó  $d_1$  en dimensión 1.



**Figura 1.19:** Bolas en  $\mathbb{R}^2$  correspondientes a  $d$  y  $d_1$  respectivamente

La consideración de bolas como las anteriores permite definir varios conceptos esenciales propios de la *topología* de los espacios  $\mathbb{R}^n$ :

- En adelante, cuando hablemos de *entorno* de un punto  $\mathbf{a}$  entenderemos una bola de centro  $\mathbf{a}$  y radio positivo.
- En ocasiones interesa eliminar del entorno el propio punto  $\mathbf{a}$ . Se habla entonces de entorno *reducido*.
- Un conjunto será *abierto* cuando contenga un entorno de todos sus puntos.
- Será *cerrado*, cuando contenga a todos sus puntos *frontera*, que son aquellos puntos cuyos entornos contienen simultáneamente puntos que están dentro y

fuera del conjunto (esto equivale a que su complementario sea un conjunto abierto).

- Será *conexo*, cuando no pueda descomponerse como la unión de dos subconjuntos disjuntos separados por sendos abiertos.
- Será *compacto*, cuando sea simultáneamente *acotado* (esto es, contenido en una bola de radio finito) y cerrado.

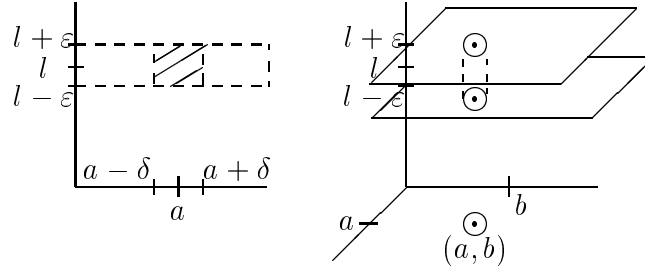
Una vez aclarada la noción de distancia y superadas las definiciones elementales de topología, podemos formalizar el concepto de *límite*:

- Se dice que  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = l$  cuando para cada entorno de  $l$ , existe un entorno de  $\mathbf{a}$  de modo que para cualquier punto  $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$  de dicho entorno se tiene que  $f(\mathbf{x})$  está dentro del entorno prefijado de  $l$ .
- Utilizando la sintaxis de símbolos matemáticos, esto equivale a decir que  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = l$  si, y sólo si, para todo  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que si  $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$  (esto es,  $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, \delta)$ ), entonces  $|f(\mathbf{x}) - l| < \varepsilon$  (esto es,  $f(\mathbf{x}) \in B(l, \varepsilon)$ ).

Apelando al significado geométrico, el hecho de que  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = l$  se traduce en que para cada *banda* horizontal  $\mathbb{R}^n \times (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$  (limitada por las rectas  $y = l + \varepsilon$  e  $y = l - \varepsilon$  en el caso  $n = 1$ , funciones de una variable; y por los planos  $z = l + \varepsilon$  y  $z = l - \varepsilon$  en el caso  $n = 2$ , funciones de dos variables), por estrecha que ésta sea, existe un *cilindro* vertical  $B(\mathbf{a}, \delta) \times \mathbb{R}$  tal que si los puntos  $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$  están dentro de esa bola, entonces la parte correspondiente de la gráfica de  $f(\mathbf{x})$  estará dentro de la banda horizontal, tal como se muestra en la Figura 1.20 para los casos  $n = 1$  y  $n = 2$ .

Hemos de reseñar que la existencia del límite de una función en un punto equivale a la existencia de todos los límites según cualquier trayectoria (curva) por la que nos aproximemos al punto: es decir,  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = l$  si, y sólo si,  $\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a} \\ y=g(x)}} f(\mathbf{x}) = l = \lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a} \\ x=h(y)}} f(\mathbf{x})$  para cualesquiera curvas  $y = g(x)$  ó  $x = h(y)$  que pasen por el punto  $\mathbf{a}$ .

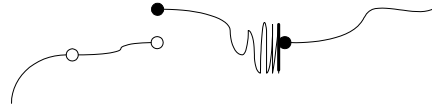
En particular, para funciones reales de variable real  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , la existencia del límite  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  equivale a la existencia de los *límites laterales*  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$  y



**Figura 1.20:** Interpretación gráfica de la noción de límite en  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{R}^2$

$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$ , cuando  $x$  se aproxima a  $a$  por defecto (i.e. por valores más pequeños que  $a$ ) y por exceso (esto es, por valores mayores que el propio  $a$ ), respectivamente.

**Ejemplo 1.3.3** *La siguiente función admite límites en todos sus puntos menos en dos, aunque sí existen todos los unilaterales, con la sola excepción de un punto. Por otra parte, la función está definida en todo  $\mathbb{R}$  menos un punto.*



**Figura 1.21:** Interpretación gráfica de la existencia o no de límites en un punto

■

Para instruirse acerca del cálculo de límites de funciones de una variable recomendamos visitar el Apéndice A.

Como ilustración del manejo de límites laterales, se puede estudiar los límites siguientes:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ .

En el caso de funciones de varias variables, exista o no el límite, puede resultar de mucha ayuda visualizar un mapa de contorno o de densidad en las proximidades del punto límite.

Para probar que un límite existe hay varias alternativas:

- Se puede utilizar la definición  $\varepsilon : \delta$  de límite.

- También es factible reducir el problema a la existencia de otro límite conocido. Para demostrar que  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = l$  es suficiente demostrar que  $|f(\mathbf{x}) - l| \leq g(\mathbf{x})$  para  $\mathbf{x}$  en un entorno reducido de  $\mathbf{a}$ , siendo  $g$  una función tal que  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = 0$ .
- Otra posibilidad, que engloba la anterior, es aplicar la *regla del emparedado*, de modo que si  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} h(\mathbf{x}) = l$  y  $g(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}) \leq h(\mathbf{x})$  en un entorno reducido de  $\mathbf{a}$ , entonces existe  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x})$  y coincide con  $l$ .
- En ocasiones, también da buenos resultados realizar cambios de variables. Por ejemplo, en caso de trabajar en  $\mathbb{R}^2$ , cambios a coordenadas polares, de manera que  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , donde  $r$  marca la distancia de  $(x, y)$  al origen, y  $\theta$  el ángulo que forma el vector director del punto  $(x, y)$  con respecto al eje de abscisas.

Téngase en cuenta que hay una diferencia fundamental en el caso de límites de funciones de más variables (en particular límites dobles), dado que en el caso real sólo hay dos posibles direcciones (por la derecha o por la izquierda), mientras que en el caso de  $n \geq 2$  variables hay **infinitas direcciones**  $(y - b) = m(x - a)$  para aproximarnos a un punto  $(a, b)$ ; más aún, hay **infinitas trayectorias** (no tenemos por qué aproximarnos según rectas: podemos utilizar parábolas, curvas polinomiales de cualquier grado, espirales o cualquier otra curva, **siempre que pase por el punto en cuestión**).

Por su especial relevancia, destacamos dos tipos de trayectorias peculiares a la hora de aproximarnos a un punto  $(a, b)$ :

- Los límites según rectas  $y - b = m(x - a)$  ó  $x - a = n(y - b)$ , llamados *límites direccionales*,

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ y-b=m(x-a)}} f(x,y) \quad \text{ó} \quad \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ x-a=n(y-b)}} f(x,y)$$

- Los llamados *límites reiterados*, que son aquellos límites cuando nos acercamos al punto  $(a, b)$  siguiendo una trayectoria horizontal y después una vertical, o viceversa:

$$\lim_{y \rightarrow b} (\lim_{x \rightarrow a} f(x, y)) \quad \text{ó} \quad \lim_{x \rightarrow a} (\lim_{y \rightarrow b} f(x, y))$$

Así como para que, en el caso de una variable, exista el límite es necesario y suficiente que existan los límites laterales y coincida su valor; para probar con generalidad en  $\mathbb{R}^n$  que un límite dado no existe, basta encontrar dos trayectorias en las que los límites resultantes difieran. Es usual utilizar para este fin límites direccionales, aunque en otras ocasiones son necesarias trayectorias según curvas polinomiales.

Por otra parte, es una tentación tratar de reducir el cálculo de un límite doble al de los límites reiterados, en el sentido de que intuitivamente parecen ciertas las relaciones

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow a} (\lim_{y \rightarrow b} f(x,y)) = \lim_{y \rightarrow b} (\lim_{x \rightarrow a} f(x,y)).$$

Nada más lejos de la realidad: en verdad, esta relación sólo funciona en un sentido.

Si  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  está definida sobre un punto  $(a,b)$  interior de  $D$  (esto es, de modo que existe una bola de radio suficientemente pequeño con centro en  $(a,b)$  y completamente contenida en  $D$ ); se tiene que si existe  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = l$  y si, adicionalmente, en un entorno reducido de  $b$  existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x,y)$  entonces existe y vale  $l$  el límite reiterado

$$\lim_{y \rightarrow b} (\lim_{x \rightarrow a} f(x,y)).$$

Del mismo modo, si existe  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = l$  y si, adicionalmente, en un entorno reducido de  $a$  existe  $\lim_{y \rightarrow b} f(x,y)$  entonces existe y vale  $l$  el límite reiterado

$$\lim_{x \rightarrow a} (\lim_{y \rightarrow b} f(x,y)).$$

Es importante saber leer (entender, en definitiva) lo que se dice en el párrafo anterior, puesto que a veces se dan circunstancias que se prestan a ser malinterpretadas como contradicciones, como se analizan en los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 1.3.4** *La función tiene límite en un punto, pero no existe uno (o ninguno) de los límites reiterados.*

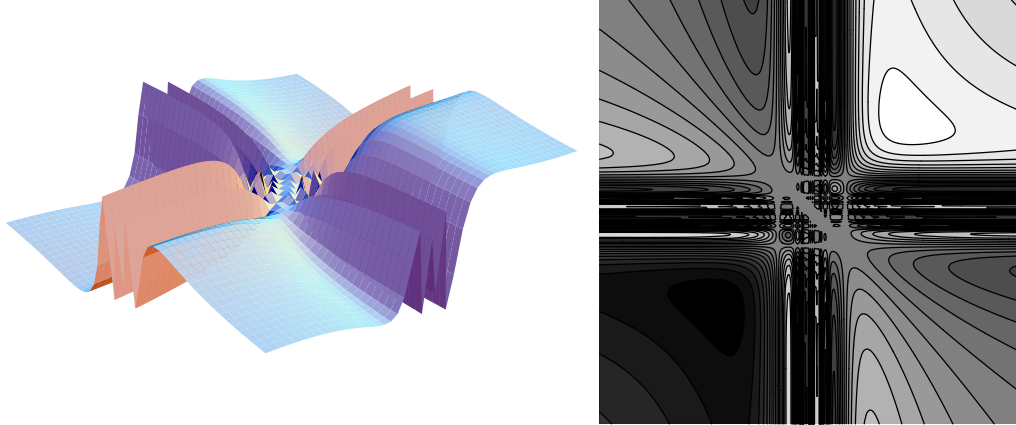
Es el caso de la función  $g : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(x,y) = (x+y) \cdot \sin \frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{y}$ .

Así,  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x,y) = y \cdot \sin \frac{1}{y} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ , que no existe; de donde no tiene sentido el límite reiterado  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} g(x,y)$ . Del mismo modo ocurre con el otro límite reiterado, por ser  $g(x,y)$  una función simétrica respecto del plano  $y = x$ .



Sin embargo,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) = 0$ , puesto que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x+y) = 0$  y la función  $\frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{y}$  está acotada en un entorno del origen.

En la Figura 1.22 se observa que la función tiene límite en el origen, como se constata en el mapa de densidad adjunto.



**Figura 1.22:** Gráficamente se comprueba que existe límite en el origen

■

**Ejemplo 1.3.5** *Los límites reiterados de una función existen en un punto y coinciden, pero la función no tiene límite en dicho punto.*

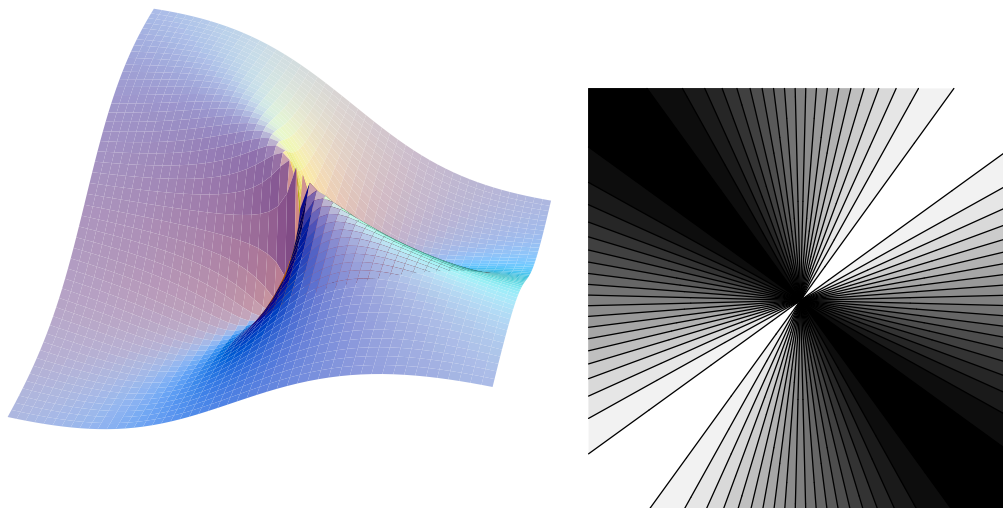
Es el caso de la función  $f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$  en el punto  $(0,0)$ .

Efectivamente,  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x,y) = 0$ , pero no existe el límite de la función en el origen: tomando como direcciones las rectas  $y = mx$ ,  $m \neq 0$ , (que pasan por el origen), se tiene que

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=mx}} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{x^2(1+m^2)} = \frac{m}{1+m^2},$$

que depende de la dirección (parámetro  $m$ ) tomada.

Este hecho se puede constatar de manera gráfica, analizando la superficie y el mapa de densidad correspondiente, adjuntos en la figura dada.



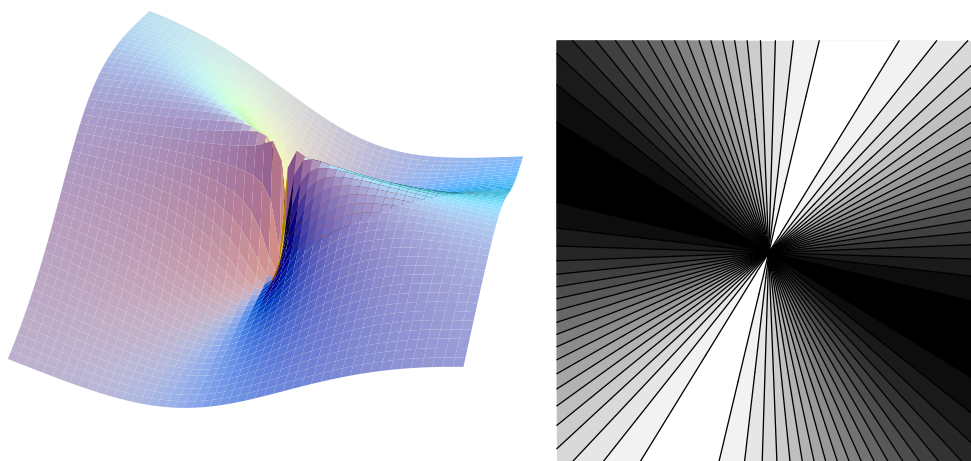
**Figura 1.23:** La información gráfica es concluyente

■

**Ejemplo 1.3.6** *La función tiene en un punto sus dos límites reiterados, aunque estos difieren (y por tanto no existe límite de la función en dicho punto).*

Es el caso de la función  $f(x, y) = \frac{xy + y^2}{x^2 + y^2}$  en el punto  $(0, 0)$ .

En efecto,  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2}{y^2} = 1$ , pero  $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^2} = 0$ .



**Figura 1.24:** Gráficamente, se comprueba que la función no tiene límite en el origen

Mucho cuidado con pensar que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^2} = 0$  es una indeterminación del tipo  $\frac{0}{0}$ : la función  $\frac{0}{x}$ , de dominio  $\mathbb{R} - \{0\}$ , vale 0 en todos sus puntos del dominio de definición; de modo que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0$ . ■

En general, el procedimiento a seguir a la hora de estudiar la existencia del límite doble de una función  $f(x, y)$  en un punto  $(a, b)$  es el siguiente:

1. Determinar los límites unidimensionales  $\lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$  y  $\lim_{y \rightarrow b} f(x, y)$ . La no existencia de alguno de estos límites no indica nada en relación con la existencia o no del límite doble.
2. En caso de que proceda (i.e. si el límite unidimensional correspondiente existe), determinar los límites reiterados  $\lim_{y \rightarrow b} (\lim_{x \rightarrow a} f(x, y))$  y  $\lim_{x \rightarrow a} (\lim_{y \rightarrow b} f(x, y))$ .

Si existe un unidimensional pero no existe (o existe y es infinito) el reiterado asociado, entonces el límite doble no existe. Por otra parte, si existen los dos reiterados pero valen distinto, entonces el límite doble no existe.

En caso de que existan ambos límites reiterados y valgan  $l$ , no podemos extraer otra conclusión más que el límite doble, en caso de existir (lo puede hacer o no, no tenemos información al respecto), ha de valer necesariamente  $l$ .

3. Para demostrar que el límite no existe, hay que encontrar dos trayectorias que pasen por  $(a, b)$  que determinen límites distintos en  $(a, b)$ , o bien una trayectoria para la que el límite no exista. Recuérdese que el límite doble existe y vale  $l$  si, y sólo si, existe el límite según cualquier trayectoria y vale asimismo  $l$ .
4. Para demostrar que el límite existe, primero hay que determinar cuál es el candidato  $l$  a límite (bien mediante los límites reiterados, bien probando por una trayectoria cualquiera que pase por  $(a, b)$ ). Después, podemos seguir cualquiera de los pasos siguientes:
  - (a) Recurrir a la definición  $\epsilon : \delta$  de límite.
  - (b) Encontrar una función  $g(x, y)$  con  $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} g(x, y) = 0$  tal que, en un entorno reducido de  $(a, b)$ , sea  $|f(x, y) - l| \leq g(x, y)$ .
  - (c) Demostrar que el límite por cualquier trayectoria existe y vale  $l$ .

- (d) Realizar un cambio de variable (por ejemplo coordenadas polares) y demostrar que el límite resultante existe y vale  $l$ .

A modo de ilustración, probemos que los siguientes límites no existen:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x + y}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{y}{x + y - 1}.$$

**Ejemplo 1.3.7** Sea  $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x + y}$ .

Los límites reiterados en el origen existen y valen (ambos, por ser la función simétrica en las variables  $x$  e  $y$ ) cero:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2}{y} = 0.$$

Los límites direccionales según las rectas  $y = mx$  también valen 0:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=mx}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1 + m^2)}{x(1 + m)} = 0.$$

Incluso si probamos con direcciones del tipo  $y = cx^n$  también saldrá cero. Sin embargo, el límite no existe. En estos casos es cuando resulta de gran ayuda construir las curvas de nivel.

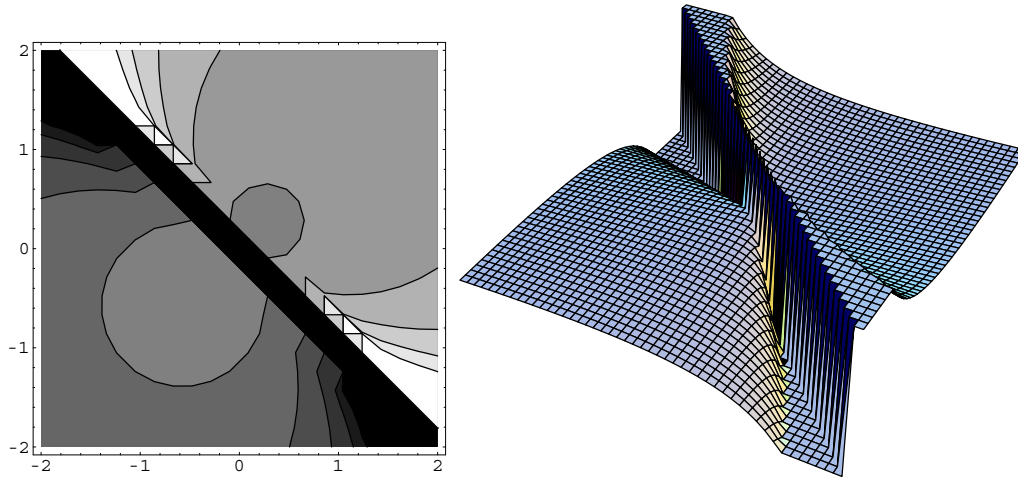
Las curvas de nivel (ver Figura 1.25) de la función son del tipo

$$c = \frac{x^2 + y^2}{x + y} \equiv x^2 + y^2 - cx - cy = 0 \equiv \left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{c}{2}\right)^2 = \frac{c^2}{2},$$

circunferencias de centro  $\left(\frac{c}{2}, \frac{c}{2}\right)$  y radio  $\frac{c}{\sqrt{2}}$ , que pasan todas ellas por el origen de coordenadas:  $\left(0 - \frac{c}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{c}{2}\right)^2 = \frac{c^2}{2}$ .

De modo que la función no puede tener límite en  $(0, 0)$ , puesto que por ese punto pasan **infinitas** curvas de nivel que corresponden a cortes de la superficie  $f(x, y) = 0$  con distintos planos  $z = c$ . Es decir, los límites según las trayectorias que definen estas circunferencias valen distinto:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x-\frac{c}{2})^2 + (y-\frac{c}{2})^2 = \frac{c^2}{2}}} f(x, y) = c.$$



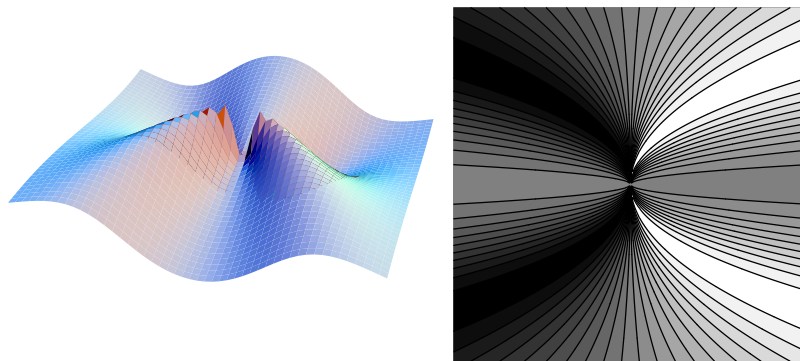
**Figura 1.25:** La no existencia del límite en el origen es clara

**Ejemplo 1.3.8** El límite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$  no existe.

En efecto, si calculamos el límite según las parábolas  $x = my^2$ , se tiene que

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=my^2}} f(x,y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{my^4}{(m^2 + 1)y^4} = \frac{m}{m^2 + 1},$$

lo que nos hace concluir que el límite propuesto  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$  no existe, pues según las parábolas propuestas se obtienen valores distintos (en función del parámetro  $m$ ).



**Figura 1.26:** Superficie y mapa de densidad asociados a  $z = f(x, y)$

**Ejemplo 1.3.9** El límite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{y}{x+y-1}$  tampoco existe.

Si tomamos la dirección  $y = x - 1$ , resulta que el límite direccional correspondiente queda

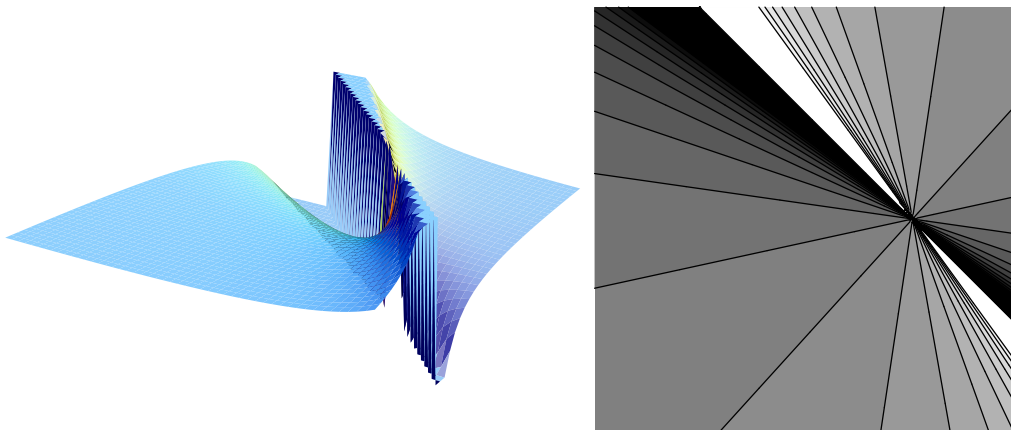
$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (1,0) \\ y=x-1}} \frac{y}{x+y-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{2(x-1)} = \frac{1}{2}.$$

Por otra parte, si tomamos la dirección  $y = x^2 - 1$ , se tiene que

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (1,0) \\ y=x^2-1}} \frac{y}{x+y-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2+x-2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x+2} = \frac{2}{3},$$

que difiere del valor  $\frac{1}{2}$  antes calculado.

Luego el límite en el origen no existe.



**Figura 1.27:** La representación gráfica es concluyente

■

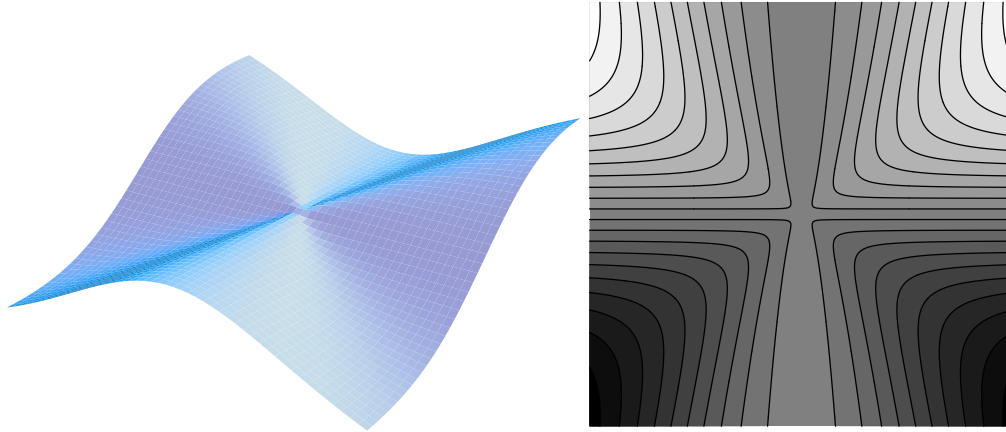
Ahora, probar la existencia de los siguientes límites:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{(x-1)^2 \ln x}{(x-1)^2 + y^2}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}.$$

**Ejemplo 1.3.10** Sea  $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ .

Calculemos primero los límites reiterados en el origen:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0$ , de modo que  $\lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)) = 0$ , por lo que el candidato a límite es 0.

Como  $\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leq \left| \frac{x^2 y}{x^2} \right| = |y|$  y  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |y| = 0$ , se tiene que existe  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$ .



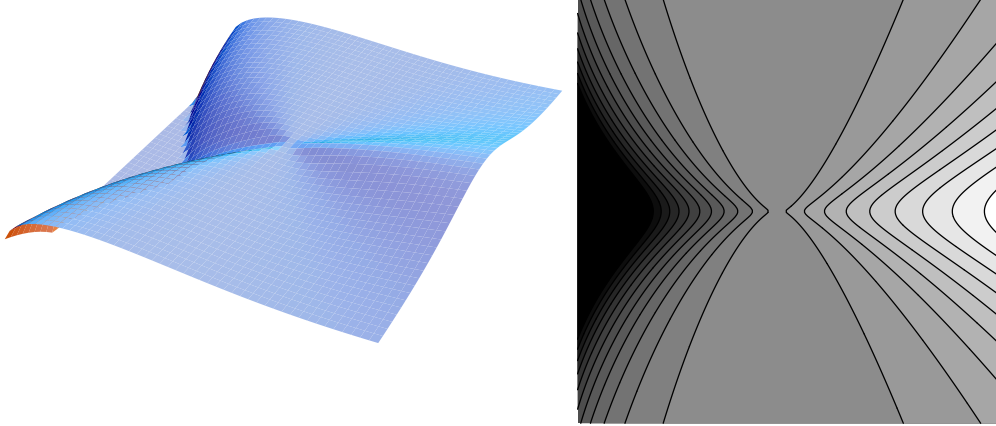
**Figura 1.28:** La convergencia de la función en el origen es incontestable

■

**Ejemplo 1.3.11** Sea  $g(x, y) = \frac{(x-1)^2 \ln x}{(x-1)^2 + y^2}$ .

Se tiene que  $\lim_{y \rightarrow 0} g(x, y) = \ln x$ , de modo que el reiterado correspondiente queda  $\lim_{x \rightarrow 1} (\lim_{y \rightarrow 0} g(x, y)) = \lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0$ . Así, el candidato a límite es  $l = 0$ .

De nuevo,  $\left| \frac{(x-1)^2 \ln x}{(x-1)^2 + y^2} - 0 \right| \leq \left| \frac{(x-1)^2 \ln x}{(x-1)^2} \right| = |\ln x|$ , siendo  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} |\ln x| = 0$ ; de donde existe  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{(x-1)^2 \ln x}{(x-1)^2 + y^2} = 0$ .



**Figura 1.29:** El mapa de densidad es clave: la función admite límite en el origen

**Ejemplo 1.3.12** Sea  $h(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$ .

Estudiemos primero los límites reiterados. Es claro que  $\lim_{y \rightarrow 0} h(x, y) = \frac{\sin x^2}{x^2}$ . De donde  $\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} h(x, y)) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} \stackrel{x \rightarrow 0}{\underset{\sin x^2 \sim x^2}{=}} 1$ , luego el candidato a límite es 1.

En esta ocasión, para demostrar que el límite doble existe y vale 1, vamos a demostrar que existe el límite según cualquier trayectoria  $g(x, y) = c$  y que vale 1.

En efecto, sea  $g(x, y) = c$  una trayectoria cualquiera pasando por  $(0, 0)$ . Si a lo largo de esa trayectoria cambiamos de variable según  $t = x^2 + y^2$ , resulta que

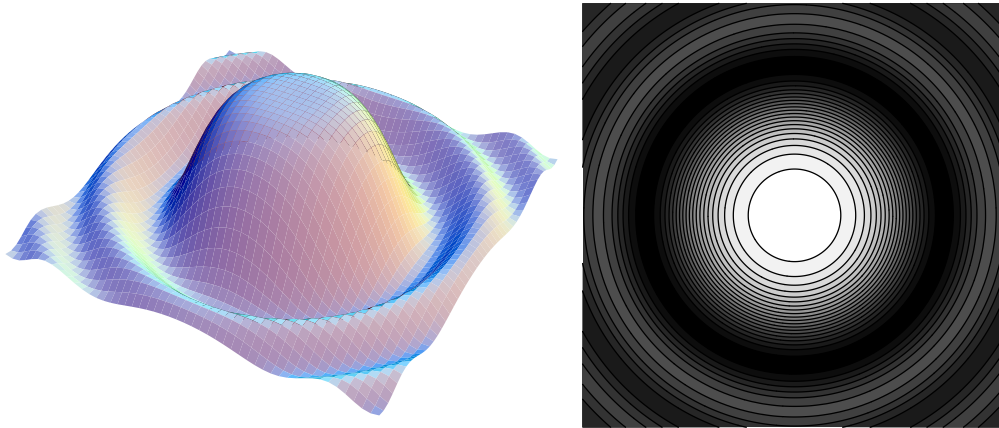
$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ g(x, y) = c}} g(x, y) = \lim_{\substack{g(x, y) = c \\ t \rightarrow 0}} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

De modo que sea cual sea la trayectoria  $g(x, y) = c$  pasando por  $(0, 0)$ , existe el límite según esa trayectoria y vale 1. De donde existe el límite doble de  $h(x, y)$  cuando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  y vale 1.

También podríamos haber usado el cambio a coordenadas polares,  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ . Así,  $(x, y) \rightarrow (0, 0) \Leftrightarrow (r, \theta) \rightarrow (0, -)$ , de manera que

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} h(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sin r^2}{r^2} = 1.$$





**Figura 1.30:** Gráficamente no hay lugar a dudas: el límite en el origen existe

■

Como en el caso de funciones de una variable, es fácil deducir la existencia de un álgebra elemental de límites dobles, en el que el límite de sumas/diferencias y productos/cocientes sea las sumas/diferencias y productos/cocientes de los límites correspondientes (en este último caso, siempre que el denominador no se anule en las proximidades del punto límite, en cuyo caso habría que hacer un estudio aparte).

## 1.4 Continuidad de funciones en un punto

La noción de continuidad de una función está íntimamente ligada a la de límite. Una función  $f$  es *continua* en un punto no asilado  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  cuando se dan las siguientes tres condiciones:

- La función está definida en el punto  $\mathbf{a}$ ,  $\exists f(\mathbf{a})$ .
- Existe el límite de la función cuando  $\mathbf{x}$  tiende a  $\mathbf{a}$ ,  $\exists \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = l$ .
- Este valor coincide con la imagen de  $f$  en el punto  $\mathbf{a}$ ,  $l = f(\mathbf{a})$ .

Se entiende que una función es continua en una región dada cuando lo es en cada uno de sus puntos. Se sobrentiende que una función es automáticamente continua en

sus puntos aislados.

La definición anterior requiere tres cosas: que la función esté definida en el punto, que exista el límite y que ambos valores coincidan. Se habla de *discontinuidad* en aquellos puntos en los que la función falla en ser continua. Dicha discontinuidad se dice *evitable* o *esencial* dependiendo de exista o no el límite de la función en el punto en cuestión. Las funciones que presentan discontinuidades exclusivamente del tipo evitable se pueden transformar en funciones continuas de pleno derecho, con tan sólo modificar convenientemente la definición de la función en estos puntos por el valor de los límites correspondientes.

El álgebra de límites se hereda para funciones continuas, de modo que las sumas/diferencias/productos/cocientes de funciones continuas definen funciones asimismo continuas. Más aún, la composición de funciones continuas también es continua: si  $f$  es continua en  $\mathbf{a}$  y  $g$  es continua en  $f(\mathbf{a})$  entonces  $g \circ f$  es continua en  $\mathbf{a}$ , siendo  $(g \circ f)(\mathbf{a}) = g(f(\mathbf{a}))$ .

Las funciones continuas por excelencia, en sus dominios de definición, son los polinomios (en una o varias variables), las trigonométricas, las exponenciales, las logarítmicas, las racionales (cuando no se anula el denominador), ..., y sus composiciones y combinaciones aritméticas.

A modo de ejemplo, determinar los puntos en los que son continuas las funciones siguientes:

$$g(x, y) = \frac{x}{x^2 - y}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4}{x(x^2 + y^2)}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

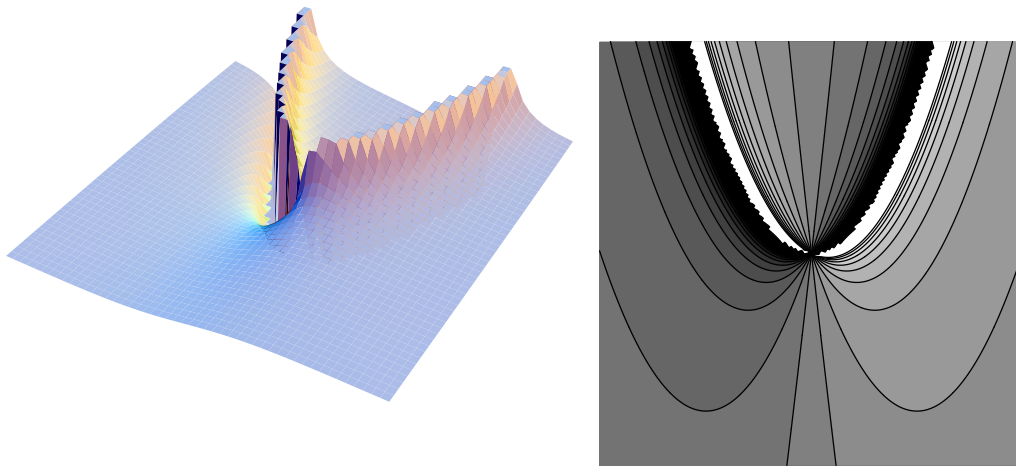
$$h(x, y) = \begin{cases} x^2 + 2y - 1, & \text{si } x \geq 0, \\ 3x + y^2, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

**Ejemplo 1.4.1** Sea  $g(x, y) = \frac{x}{x^2 - y}$

La función  $g : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(x, y) = \frac{x}{x^2 - y}$  es continua en todo su dominio de definición,  $D = \mathbb{R}^2 - \{(x, y) : y = x^2\}$ , por ser cociente de polinomios. Tenemos que estudiar si se puede extender de manera continua en algún punto de la parábola  $y = x^2$ .

En los puntos  $(c, c^2)$  con  $c \neq 0$  desde luego no se puede extender de manera continua, dado que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (c,c^2)} \frac{x}{x^2 - y} = \frac{c}{0} = \pm\infty$ , dependiendo de si nos acercamos a cero por la derecha o por la izquierda; de modo que el límite no existe, y aunque existiera sería infinito, por lo que la función tampoco podría definirse de manera continua en esos puntos.

En particular, entonces  $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x^2}} g(x, y)$  tampoco existe, de donde no puede existir el límite de la función en el cero.



**Figura 1.31:** La función tiene en  $\{(x, y) : y = x^2\}$  discontinuidades del tipo esencial

■

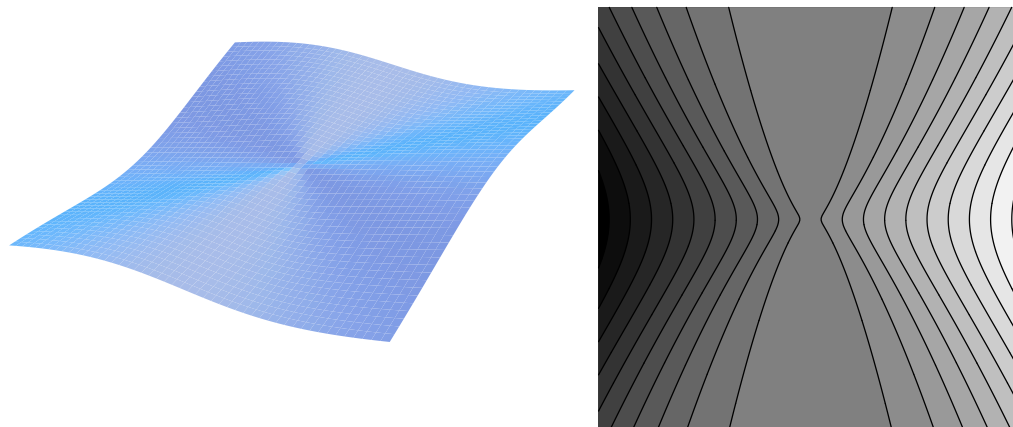
**Ejemplo 1.4.2** Sea ahora la función  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4}{x(x^2 + y^2)}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$

La función es continua en  $\mathbb{R} - \{0\}$ , por ser cociente de polinomios.

Además, también es continua en el origen, dado que

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = \left| \frac{x^4}{x(x^2 + y^2)} \right| \leq \left| \frac{x^3}{x^2} \right| \leq |x|,$$

que tiende a 0 cuando  $(x, y)$  tiende a  $(0, 0)$ .



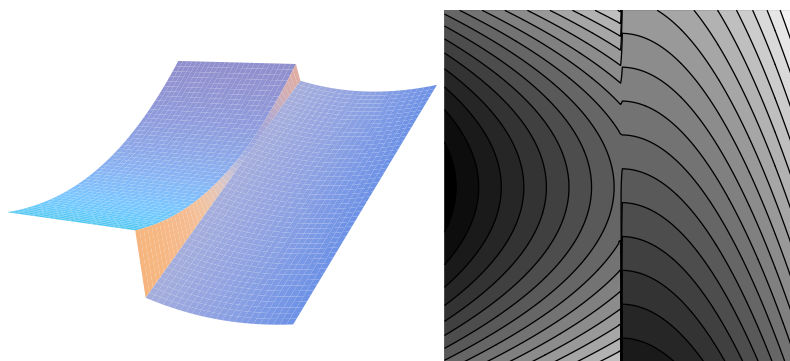
**Figura 1.32:** La continuidad es gráficamente palpable

De donde existe  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$ , por lo que la función se puede extender de manera continua en el origen definiendo  $f(0,0) = 0$ .

■

**Ejemplo 1.4.3** Sea ahora  $h(x,y) = \begin{cases} x^2 + 2y - 1, & \text{si } x \geq 0, \\ 3x + y^2, & \text{si } x < 0. \end{cases}$

Es obvio que la función es continua en todo  $\mathbb{R} - \{(x,y) : x = 0\}$ , por ser polinómica en esos puntos. Hay que estudiar si además es continua en la recta  $x = 0$ . Gráficamente no lo parece, salvo eventualmente en algún punto próximo a  $y = 1$ .



**Figura 1.33:** El único punto de  $x = 0$  donde la función es continua es  $(0,1)$

Dado que  $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,b) \\ x \rightarrow 0^+}} h(x,y) = 2b - 1$  y  $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,b) \\ x \rightarrow 0^-}} h(x,y) = b^2$ , para que pudiera ser continua habría de ser  $b^2 = 2b - 1$ ; esto es,  $b = 1$ . Así, el único punto de  $x = 0$  que podría optar a albergar continuidad es  $(0, 1)$ . Y de hecho, la función es continua en este punto, puesto que las funciones en que se desglosa son continuas en dicho punto y toman en él el mismo valor.

■

A continuación recopilamos algunos resultados clásicos que conciernen a las funciones continuas  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ :

1. Si  $f$  es continua en  $\mathbf{a}$ , entonces  $f$  está acotada en un entorno de  $\mathbf{a}$ .
2. Si  $f$  es continua en  $\mathbf{a}$  y  $f(\mathbf{a}) \neq 0$ , entonces  $f$  tiene signo constante (igual al de  $f(\mathbf{a})$ ) en un entorno de  $\mathbf{a}$ .
3. Si  $D$  es un conjunto compacto (cerrado y acotado) y  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua en  $D$ , entonces  $f(D)$  es un compacto de  $\mathbb{R}$ .
4. Si  $D$  es compacto y  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en  $D$ , entonces  $f$  alcanza en  $D$  valores máximo y mínimo: existen  $\mathbf{x}_0$  y  $\mathbf{x}_1$  en  $D$  tales que  $f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_1)$  para todo  $\mathbf{x} \in D$ . Este resultado se conoce como *Teorema de Weierstrass*.
5. Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua y  $f(a) \cdot f(b) < 0$  entonces existe  $c \in (a, b)$  con  $f(c) = 0$ . Este resultado se conoce como *Teorema de Bolzano*.
6. Si  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  es continua y  $D$  es conexo, dados  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in D$  y  $k \in \mathbb{R}$  con  $f(\mathbf{a}) < k < f(\mathbf{b})$  existe  $\mathbf{c} \in D$  con  $f(\mathbf{c}) = k$ . Esta propiedad se conoce con el nombre de *Propiedad de Darboux* ó *Teorema de los valores intermedios*.

**Ejemplo 1.4.4** Demostrar que toda función continua  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  tiene un punto fijo  $c$  (i.e. tal que  $f(c) = c$ ).

Sea la función  $g(x) = x - f(x)$ , continua, definida en  $[0, 1]$ , con  $g(0) = -f(0) \leq 0$  y  $g(1) = 1 - f(1) \geq 0$ ; de manera que según el *Teorema de los valores intermedios* existe  $c \in [0, 1]$  con  $g(c) = 0$ , esto es,  $0 = g(c) = c - f(c)$ , de donde  $f(c) = c$ .

■



## Apéndice A

### Guía rápida sobre el cálculo de límites de funciones de una variable real





## Apéndice A

# Guía rápida sobre el cálculo de límites de funciones de una variable real

Llamaremos *entorno reducido* de un punto  $a \in \mathbb{R}$  a los intervalos que se forman al eliminar  $a$  de un intervalo abierto que contenga el punto  $a$ . Por ejemplo, para  $\delta > 0$ ,  $(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$ , conjunto de los puntos  $x \in \mathbb{R}$  tales que  $0 < |x - a| < \delta$ , constituye un entorno reducido de  $a$ , que llamamos  $\delta$ -entorno de  $a$ .

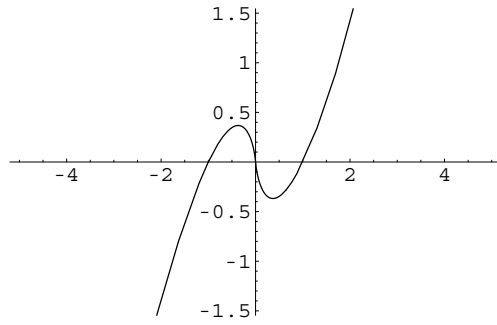
Un entorno reducido de  $\pm\infty$  es cualquier intervalo abierto con extremo  $\pm\infty$ . Por ejemplo, para  $\delta > 0$ ,  $(-\infty, -\delta)$  y  $(\delta, +\infty)$  son entornos reducidos de  $-\infty$  e  $\infty$ , respectivamente; que llamamos  $\delta$ -entornos de  $\pm\infty$ .

En adelante, para denotar que  $a \in \mathbb{R}$  ó  $a = \pm\infty$  escribiremos sencillamente que  $a$  es finito o infinito.

Sea  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida en un entorno reducido de  $a$ , para  $a$  finito o infinito. Se dice que la función  $f$  tiene *límite*  $l$  (finito o infinito) en el punto  $a$ , y se nota  $l = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , cuando para cada número real  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta$ -entorno reducido de  $a$  de modo que para todos los  $x$  de dicho entorno se tiene que  $f(x)$  pertenece al  $\varepsilon$ -entorno de  $l$ . En otras palabras:

- **Para  $a$  finito y  $l$  finito:** se tiene que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  si, y sólo si, para todo  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - l| < \varepsilon$  para todos los  $x \in D$  con  $0 < |x - a| < \delta$ .

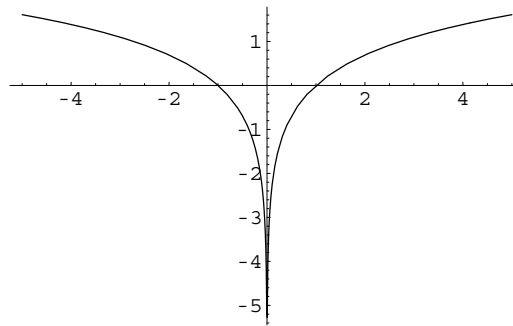
Por ejemplo, se tiene que  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln |x| = 0$ .



**Figura A.1:** Límite  $l$  finito en un punto  $a$  finito

- **Para  $a$  finito y  $l$  infinito:** se tiene que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  (resp.,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ), si para todo  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que  $f(x) > k$  (resp.,  $f(x) < -k$ ) para todos los  $x \in D$  con  $0 < |x - a| < \delta$ .

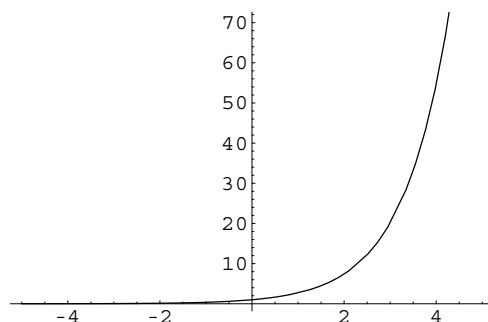
Por ejemplo, se tiene que  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln |x| = -\infty$ .



**Figura A.2:** Límite  $l$  infinito en un punto  $a$  finito

- **Para  $a$  infinito y  $l$  finito:** se tiene que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$  (resp.,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ ) si, y sólo si, para todo  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - l| < \varepsilon$  para todos los  $x \in D$  con  $x > \delta$  (resp.  $x < -\delta$ ).

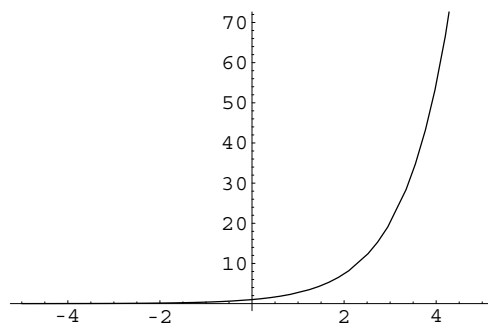
Por ejemplo, se tiene que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ .



**Figura A.3:** Límite  $l$  finito en un punto  $a$  infinito

- **Para  $a$  infinito y  $l$  infinito:** se tiene que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  (resp.,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ ) si, y sólo si, para todo  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que  $f(x) > \varepsilon$  para todos los  $x \in D$  con  $x > \delta$  (resp.  $x < -\delta$ ). Análogamente, se tiene que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$  (resp.,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ) si, y sólo si, para todo  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que  $f(x) < -\varepsilon$  para todos los  $x \in D$  con  $x > \delta$  (resp.  $x < -\delta$ ).

Por ejemplo, se tiene que  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$ .



**Figura A.4:** Límite  $l$  infinito en un punto  $a$  infinito

Es fácil demostrar que si  $f$  tiene límite en un punto  $a$ , dicho límite es único. Más aún, si  $l$  es finito, en ese caso  $f$  está acotada en un entorno de  $a$ , y si  $l \neq 0$  además  $f$  tiene el mismo signo que  $l$  en un entorno suficientemente pequeño de  $a$ .

Con normalidad, un límite se podrá calcular mediante sustitución directa, a veces previa manipulación algebraica:

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x+1} = \frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0.$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x - 2}{-3x^4 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{x^4} \cdot \frac{1 + \frac{1}{x}}{-3 + \frac{1}{x^4}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{3} \right) = 0.$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x - 2}$  no existe, puesto que en cualquier entorno reducido de 2 la función  $f(x)$  no toma valores alrededor de un mismo punto  $l$ : cuando  $x$  se aproxima a 2 por valores más pequeños que el propio 2,  $x - 2$  se aproxima a 0 por valores negativos, de donde  $\frac{1}{x - 2}$  se aproxima a  $-\infty$ ; por otra parte, cuando  $x$  se aproxima a 2 por valores mayores que 2,  $x - 2$  se aproxima a cero por valores positivos, de donde  $\frac{1}{x - 2}$  tiende a  $+\infty$ .

En este último ejemplo ha surgido la noción de *límite lateral*, por la izquierda o por la derecha, según nos aproximemos al punto  $a$  por valores estrictamente menores o mayores, respectivamente; que denotamos por  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ , según sea el caso. Así, existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  si, y sólo si, existen los límites laterales y coinciden con dicho valor,  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$ .

Por ejemplo,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{x^3 + 4x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x + 2)}{\sqrt{x^2} \sqrt{x + 4}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$ , que no existe, puesto que los límites laterales son distintos:  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{-x} = -1$ , mientras que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1 \neq -1$ .

En lo que sigue, indistintamente es  $a$  finito ó infinito. Algunas propiedades básicas concerniendo a límites y funciones son:

1. Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ , entonces para cualquier  $k$  real con  $k < l$  (resp.,  $k > l$ ) existe un entorno reducido de  $a$  de modo que  $k < f(x)$  (resp.,  $k > f(x)$ ).
2. Más aún, si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \in \mathbb{R}$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m \in \mathbb{R}$  con  $l < m$ , entonces  $f(x) < g(x)$  en un entorno reducido de  $a$ .
3. Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \in \mathbb{R}$  y  $k$  es un número real con  $k < f(x)$  (resp.,  $k > f(x)$ ) en un entorno reducido de  $a$ , entonces se tiene que  $k \leq l$  (resp.,  $k \geq l$ ).
4. Más aún, si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m \in \mathbb{R}$  y  $f(x) < g(x)$  en un entorno reducido de  $a$ , entonces  $l \leq m$ .

5. Si  $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$  en un entorno reducido de  $a$  y  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$ , entonces existe  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$ . Esta propiedad se conoce como *regla del sandwich* ó *del emparedado*.
6. El álgebra de límites se adapta a las operaciones aritméticas elementales, de modo que los límites de sumas, productos, cocientes, logaritmos y exponenciaciones resultan ser las sumas, productos, cocientes, logaritmos y exponenciaciones de los límites correspondientes, siempre que éstos estén definidos. En concreto, si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m$ , entonces:

- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = l + m$ , siempre que no dé lugar a una expresión del tipo  $\infty - \infty$ .
- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = l \cdot m$ , siempre que no dé lugar a una expresión del tipo  $\pm 0 \cdot \infty$ .
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$ , siempre que no dé lugar a una expresión del tipo  $\frac{0}{0}$  ó  $\pm \frac{\infty}{\infty}$ .
- $\lim_{x \rightarrow a} \log_b f(x) = \log_b l$ , para  $l, b > 0$ ,  $b \neq 1$ .
- $\lim_{x \rightarrow a} b^{f(x)} = b^l$ , para  $b > 0$ .
- $\lim_{x \rightarrow a} g(x)^{f(x)} = m^l$ , siempre que no dé lugar a una expresión del tipo  $1^\infty$ ,  $\infty^0$  ó  $0^0$ .

Hemos de hacer notar que las únicas *indeterminaciones* existentes en el cálculo de límites son las 7 contempladas en el apartado anterior:

$$\infty - \infty, 0 \cdot \infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 1^\infty, \infty^0 \text{ y } 0^0$$

En realidad, las tres últimas se reducen a las anteriores tomando logaritmos neperianos, de modo que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln(f(x))}$ .

Cualquier otra expresión involucrando los valores 0, 1 y  $\infty$  **no son indeterminaciones**, como por ejemplo los casos

$$\begin{aligned} &\infty + \infty (= +\infty), \quad -\infty - \infty (= -\infty), \quad \pm \infty \cdot \infty (= \pm \infty), \\ &\frac{0}{\infty} (= 0), \quad \frac{\infty}{0} (= \pm \infty), \quad \frac{c}{\infty} (= 0), \quad \frac{c}{0} (= \pm \infty), \quad \log_{b>1} \infty (= +\infty), \\ &\log_{b<1} \infty (= -\infty), \quad \log_{b>1} 0^+ (= -\infty), \quad \log_{b<1} 0^+ (= +\infty), \\ &(b > 1)^{+\infty} (= +\infty), \quad (|b| < 1)^{+\infty} (= 0), \quad (b \leq -1)^{+\infty} (= \nexists), \end{aligned}$$

$$(|b| > 1)^{-\infty}(= 0), \quad (0 < b < 1)^{-\infty}(= +\infty), \quad (-1 < b < 0)^{-\infty}(= \nexists), \quad 0^{+\infty}(= 0), \\ 0^{-\infty}(= +\infty), \quad +\infty^{+\infty}(= +\infty), \quad (-\infty)^{+\infty}(= \nexists), \quad (\pm\infty)^{-\infty}(= 0).$$

A la hora de resolver de manera efectiva un límite, se suele emplear el método de sustitución directa, siempre que no origine una indeterminación; en cuyo caso, a veces resulta ventajoso utilizar *infinitésimos* e *infinitos equivalentes*, o incluso la *regla de L'Hopital*.

Una función  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es un *infinitésimo* (resp., *infinito*) en  $a$  (finito o infinito) cuando existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  (resp.,  $= \pm\infty$ ).

Por ejemplo,  $x-a$ ,  $\sin(x-a)$ ,  $\operatorname{tg}(x-a)$ ,  $\ln(1+x-a)$ ,  $1-\cos(x-a)$ ,  $e-(1+x-a)^{\frac{1}{|x-a|}}$  son infinitésimos en  $x = a$ , para  $a \in \mathbb{R}$ , y  $\frac{1}{x}$ ,  $e^{-x}$ ,  $\frac{1}{\ln x}$ ,  $e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  son infinitésimos en  $x = \infty$ .

Por su parte,  $x$ ,  $e^x$ ,  $\ln x$  son infinitos en  $x = \infty$ , y  $\frac{1}{|x-a|}$ ,  $\ln|x-a|$  son infinitos en  $x = a$ , con  $a \in \mathbb{R}$ .

Podemos destacar las siguientes propiedades:

1. Si  $f$  es un infinitésimo en  $a$  y  $g$  está acotada en un entorno reducido de  $a$ , entonces su producto  $fg$  es un infinitésimo en  $a$ . Ejemplo:  $x$  es un infinitésimo en  $x = 0$  y  $\operatorname{sen} \frac{1}{x}$  está acotada en todo su dominio de definición, de donde  $x \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x}$  también es un infinitésimo en  $x = 0$ .
2. Si  $f$  es un infinito del tipo  $+\infty$  (resp.,  $-\infty$ ) en  $a$  y  $g$  está acotada inferiormente (resp., superiormente) en un entorno de  $a$ , entonces  $f+g$  es asimismo un infinito del mismo tipo. Ejemplo:  $-x$  es un infinito en  $x = -\infty$ , y  $e^x$  está acotada inferiormente (por 0), de donde  $e^x - x$  es un infinito en  $x = -\infty$ .
3.  $f$  es un infinito en  $a$  si, y sólo si,  $\frac{1}{f}$  es un infinitésimo en  $a$ . Hay que tener cuidado con este enunciado, porque no sería del todo cierto si cambiamos los nombres de sitio:  $f$  puede ser un infinitésimo en  $x = a$  y  $\frac{1}{f}$  no ser un infinito en  $x = a$ , por la sencilla razón de que no exista  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)}$ . Es el caso de  $f(x) = x$  en  $x = 0$ . Sí sería cierto que  $f$  es un infinitésimo en  $x = a$  si, y sólo si,  $\frac{1}{|f|}$  es

un infinito en  $x = a$ . Es importante entender la sutil diferencia al considerar  $\frac{1}{f}$  ó  $\frac{1}{|f|}$ , que pueden dar lugar a valores  $\pm\infty$  y exclusivamente  $\infty$  alrededor de un cero de  $f$ , respectivamente.

Los infinitésimos (resp., infinitos), pueden compararse entre sí, para determinar la velocidad relativa con la que se aproximan a 0 (resp.,  $\pm\infty$ ). Así:

- Si  $f$  y  $g$  son dos infinitos (resp., infinitésimos) en  $a$  y  $\frac{f}{g}$  es asimismo otro infinito (resp., infinitésimo) en  $a$ , entonces se dice que  $f$  es de mayor orden que  $g$  y se nota  $\text{ord}_{x \rightarrow a}(f(x)) > \text{ord}_{x \rightarrow a}(g(x))$ . Al comparar los órdenes de los infinitos usuales, resulta que

$$\text{ord}_{x \rightarrow +\infty}(\ln^p x) < \text{ord}_{x \rightarrow +\infty}(x^q) < \text{ord}_{x \rightarrow +\infty}(b^x) < \text{ord}_{x \rightarrow +\infty}(x^{cx})$$

para  $b, c, p, q > 0$ . Es por eso que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^p x}{x^q} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^q}{b^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b^x}{x^{cx}} = \infty.$$

- Si  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$  se dice que  $g(x)$  es despreciable frente a  $f(x)$  en un entorno de  $a$ , y se denota  $g(x) = o(f(x))$ , siguiendo la notación de Landau. En definitiva,  $g(x)$  es de un orden inferior a  $f(x)$  en un entorno de  $a$ .
- Si  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = l \in \mathbb{R} - \{0\}$ , entonces  $f(x)$  y  $g(x)$  son del mismo orden en un entorno de  $a$  y se nota  $g(x) = O(f(x))$ . Por ejemplo,  $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{|x|}}$  y  $g(x) = e$  son del mismo orden en  $x = 0$ , de suerte que  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{|x|}} = e$ . Análogamente,  $h(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  y  $g(x) = e$  son del mismo orden en  $x = +\infty$ , dado que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ . De hecho, estos dos límites son de mucha ayuda para resolver en multitud de ocasiones indeterminaciones del tipo  $1^\infty$ .
- Si  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)^\alpha} = l \in \mathbb{R} - \{0\}$ , entonces  $\text{ord}_{x \rightarrow a}(f(x)) = \alpha \in \mathbb{R}$ . Análogamente, en el caso de infinitos, si  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} = l \in \mathbb{R} - \{0\}$ , entonces  $\text{ord}_{x \rightarrow \infty}(f(x)) = \alpha \in \mathbb{R}$ .

- Dos funciones  $f$  y  $g$  con el mismo límite en un punto  $a$  se dicen *equivalentes* en  $a$ , y se nota  $f \sim^a g$ , cuando  $f(x) = g(x) + o(g(x))$  en un entorno de  $a$ .

Funciones  $f$  y  $g$  equivalentes en  $a$  pueden sustituirse una por otra en el cálculo de límites en  $a$  de cocientes o productos:

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) \cdot f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) \cdot g(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x)}{g(x)}.$$

- Los infinitésimos equivalentes en  $x = 0$  más utilizados son del tipo

$$\epsilon(x) \sim e^{\epsilon(x)} - 1 \sim \sin \epsilon(x) \sim \operatorname{tg} \epsilon(x) \sim \ln(1 + \epsilon(x)) \quad \text{y} \quad 1 - \cos \epsilon(x) \sim \frac{\epsilon^2(x)}{2},$$

frecuentemente tomando  $\epsilon(x) = x$ .

Veamos algunos ejemplos:

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln(1 + (x - 1))}{(x + 1)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x + 1} = \frac{1}{2}.$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{x^2 - 1} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 0$ , puesto que  $-\ln x = \ln x^{-1} = \ln \frac{1}{x}$  y cuando  $x \rightarrow 0^+$  se tiene que  $y = \frac{1}{x} \rightarrow +\infty$ . Además, por otra parte, ya se vio antes que  $\operatorname{ord}_{y \rightarrow +\infty}(\ln y) < \operatorname{ord}_{y \rightarrow +\infty}(y)$ .
- $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\cot^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\cot^2 x \cdot \ln(\cos x)} = e^{-\frac{1}{2}}$ , ya que  $\lim_{x \rightarrow 0} \cot^2 x \cdot \ln(\cos x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x \ln(1 + \cos x - 1)}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2}$ , utilizando los infinitésimos equivalentes pertinentes en  $x = 0$ .

Para finalizar este breve repaso del cálculo de límites incluimos la *Regla de L'Hopital*. Este método sirve a veces, en funciones de comportamiento adecuado, para resolver indeterminaciones del tipo  $\frac{0}{0}$  ó  $\frac{\infty}{\infty}$ . Observemos que las restantes indeterminaciones siempre se pueden llevar a una de estos tipos, con una mínima manipulación algebraica.

**Regla de L'Hopital:** sean  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dos infinitos (resp., infinitésimos) en  $a$  (finito o infinito), ambos derivables en un entorno reducido de  $a$ , de modo que  $g'(x) \neq 0$  para todo  $x$  en dicho entorno reducido. Si existe  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ , finito



o infinito, entonces existe  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  y vale  $l$ . El enunciado también es válido si se sustituyen los límites por límites laterales.

Hemos de observar que si  $\frac{f'(x)}{g'(x)}$  carece de límite cuando  $x \rightarrow a$ , entonces no se puede asegurar nada acerca de la existencia o no del límite  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ . Éste es el caso de los límites  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$  (que existe y vale 0) y  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x \cos \frac{1}{x}}$  (que no existe).

Ejemplos de aplicación de la regla de L'Hopital los encontramos en la comparación de algunos infinitésimos e infinitos:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ . Aquí hemos podido aplicar la regla de L'Hopital porque tanto  $f(x) = \ln x$  como  $g(x) = \frac{1}{x}$  son funciones derivables en un entorno reducido de  $0^+$  con  $g'(x) \neq 0$  (por ejemplo, el intervalo  $(0, 1)$ ).
- Para  $p, q > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^p x}{x^q} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{px^{-1} \ln^{p-1} x}{qx^{q-1}} = \frac{p}{q} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^{p-1} x}{x^q} = \dots = 0$ , pues aplicando sucesivamente la regla de L'Hopital y simplificando, la función del denominador se mantiene fija,  $x^q$ , mientras que la del numerador va transformándose en  $\ln^k x$  para exponentes  $k$  cada vez más pequeños, de modo que llegará a ser  $k \leq 0$ ; resultando el límite entonces igual a 0. Aquí hemos podido aplicar la regla de L'Hopital porque tanto  $f(x) = \ln^k x$  como  $g(x) = x^q$  son funciones derivables en un entorno reducido de  $\infty$  con  $g'(x) \neq 0$  (por ejemplo, el intervalo  $(2, \infty)$ ).
- Para  $q, b > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^q}{b^x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{qx^{q-1}}{b^x \ln b} = \frac{q}{\ln b} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{q-1}}{b^x} = \dots = 0$ , pues aplicando sucesivamente la regla de L'Hopital y simplificando, la función del denominador se mantiene fija,  $b^x$ , mientras que la del numerador va transformándose en  $x^k$  para exponentes  $k$  cada vez más pequeños, de modo que llegará a ser  $k \leq 0$ ; resultando el límite entonces igual a 0. Aquí hemos podido aplicar la regla de L'Hopital porque tanto  $f(x) = x^k$  como  $g(x) = b^x$  son funciones derivables en un entorno reducido de  $\infty$  con  $g'(x) = \ln b \cdot b^x \neq 0$  (por ejemplo, el intervalo  $(2, \infty)$ ).

Hay que tener cuidado cuando se pretenda aplicar la regla de L'Hopital, porque

puede dar lugar a la aparición reiterada de indeterminaciones.

Por ejemplo, si  $b, c > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b^x}{x^{cx}} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b^x \ln b}{c(\ln x + 1)x^{cx}} \stackrel{L'H}{=} \dots$  lo que abre un proceso sin fin. Sin embargo, si directamente se hubiera planteado  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b^x}{x^{cx}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{b}{x^c}\right)^x = 0$ , pues es un límite del tipo  $0^\infty$ , que ni por asomo constituye una indeterminación.

También es frecuente cometer un error al tratar de aplicar la regla de L'Hopital a cocientes de funciones que no son simultáneamente infinitos o infinitésimos.

Por ejemplo,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^x - 1} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{e^x}$ . Muchos tendrán la tentación de aplicar nuevamente la regla de L'Hopital para decir que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{e^x} \stackrel{L'H?}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{e^x} = 2,$$

lo cual es absurdo, dado que, por sustitución directa, se tiene que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{e^x} = \frac{0}{1} = 0$ . El error sobreviene al aplicar la regla de L'Hopital indebidamente en el límite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{e^x}$ : aunque  $2x$  sí es un infinitésimo en  $x = 0$ , la función del denominador,  $e^x$ , **no lo es**, puesto que  $e^0 = 1 \neq 0$ .

Otro ejemplo lo tenemos en  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x\right)$ , que genera una indeterminación del tipo  $\infty - \infty$ . Podemos proceder de la siguiente manera:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x + 1}{x}$ . En este estadio, muchos estarán tentados por aplicar L'Hopital, para conseguir  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x + 1}{x} \stackrel{L'H?}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x + 1}{1} = -\infty$ ; lo cual sería un craso error, puesto que  $x \ln x + 1$  **no es un infinitésimo** en  $x = 0$ .

De hecho,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ . De modo que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x + 1) = 1 \neq 0$ , por lo que no es un infinitésimo en  $x = 0$ .

En cambio,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x + 1}{x} \rightarrow \frac{1}{0^+} = +\infty$ , puesto que hemos visto que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ .

**Apéndice B**

**Guía rápida sobre la  
representación gráfica de funciones  
de una variable real**



## Apéndice B

# Guía rápida sobre la representación gráfica de funciones de una variable real

En esta sección vamos a dar las directrices básicas para el estudio y representación gráfica de una función real de variable real,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

A tal fin, es conveniente atender al dominio y el recorrido, las simetrías respecto del origen o del eje de ordenadas, los puntos de corte con los ejes coordenados, las asíntotas y ramas parabólicas, las regiones por las que pasa o no la curva, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los máximos, mínimos y puntos de inflexión, la concavidad y convexidad; a veces, adicionalmente, resulta interesante estudiar la existencia eventual de función inversa.

### B.1 Dominio y recorrido

El dominio de una función  $f(x)$  consiste en el conjunto de puntos  $x \in \mathbb{R}$  para los que está definida la función. El recorrido o imagen consiste en el conjunto de puntos  $y \in \mathbb{R}$  para los que existen puntos  $x \in \mathbb{R}$  con  $y = f(x)$ .

Si se representa gráficamente la función  $y = f(x)$ , es obvio que el dominio coincide con la proyección de la gráfica sobre el eje de abscisas, mientras que el recorrido viene dado por la proyección de la gráfica sobre el eje de ordenadas.

A la hora de determinar el dominio de una función, hay que respetar tres reglas básicas:

1. Las funciones radicales pares,  $\sqrt[n]{g(x)}$ , están definidas para valores  $x$  con imagen no negativa,  $g(x) \geq 0$ . Hay que tener cuidado de no exigir esta condición para radicales de índice impar, puesto que éstos están definidos para números negativos:  $\sqrt[3]{-1} = -1$ , por ejemplo.
2. Los logaritmos,  $\log_b g(x)$ , están definidos sobre números estrictamente positivos,  $g(x) > 0$ , independientemente del valor de la base  $b > 0$ .
3. Las funciones racionales  $\frac{h(x)}{g(x)}$  están definidas sobre puntos que no anulan al denominador,  $g(x) \neq 0$ .

A veces una función presenta un comportamiento cíclico según un periodo  $p$ , de modo que  $f(x) = f(x + p)$  para todo  $x$  del dominio. En este caso, para representar gráficamente la función basta estudiar su comportamiento en un intervalo (periodo) básico del dominio, para después trasladar el resultado a los demás periodos. Éste es el caso de las funciones trigonométricas elementales.

**Ejemplo B.1.1** *Dominio de la función  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \frac{(x-1)^3}{x \ln x}$*

Como aparece un logaritmo, hemos de restringir el dominio a aquellos  $x \in \mathbb{R}$  que hacen positiva la entrada del logaritmo, en nuestro caso  $x > 0$ . Pero además tenemos una función racional, de modo que hemos de eliminar los ceros del denominador; como  $x \neq 0$  por ser  $x > 0$ , y  $\ln x = 0$  si, y sólo si,  $x = 1$ , el dominio de  $f(x)$  se reduce a  $D = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ y } x \neq 1\} = (0, 1) \cup (1, \infty)$ .

■

**Ejemplo B.1.2** *Dominio de la función  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = e^{\sqrt{2 \sin x - 1}}$*

La raíz cuadrada está definida para valores no negativos, de modo que el dominio vendrá dado por  $D = \{x \in \mathbb{R} : 2 \sin x - 1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : \sin x \geq \frac{1}{2}\}$ , lo que se traduce en la siguiente unión de intervalos  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5}{6}\pi + 2k\pi]$ .

■

**Ejemplo B.1.3** Dominio de  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \sqrt{\ln(2 \cos e^x)}$

La exponencial y el coseno tienen dominio en todo  $\mathbb{R}$ . El logaritmo está definido para valores estrictamente positivos, y la raíz cuadrada para valores no negativos. De modo que el dominio de  $f(x)$  se restringe a valores  $x$  que hacen  $\ln(2 \cos e^x) \geq 0$  (por tanto,  $2 \cos e^x \geq 1$ ) y  $2 \cos e^x > 0$  (condición incluida en la anterior). Así, el dominio viene dado por

$$D = \{x \in \mathbb{R} : 2 \cos e^x \geq 1\}.$$

Ahora,  $\cos e^x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^x \in [-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi], k \in \mathbb{Z}$ . Dado que el logaritmo neperiano sólo está definido sobre valores positivos, el dominio se reduce a la imagen por la función logaritmo neperiano de los intervalos  $(0, \frac{\pi}{3}] \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi]$ , de modo que

$$D = (-\infty, \ln \frac{\pi}{3}] \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [\ln(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi), \ln(\frac{\pi}{3} + 2k\pi)].$$

■

En cuanto a la determinación del recorrido de una función  $f(x)$ , será necesario estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función en su dominio, lo que en ocasiones requerirá el cálculo de varias derivadas. A veces, bastará con ir estudiando cómo se va modificando el recorrido a través de los dominios de las funciones elementales en que se descompone la función  $f(x)$  dada. Concretamente, si  $f(x)$  resulta de la composición de las funciones  $g$  y  $h$ ,  $f(x) = g(h(x))$ , entonces el recorrido de  $f$  vendrá dado por el recorrido de  $g$  sobre la imagen de aplicar  $h$  al dominio de  $f$ .

Ilustramos este procedimiento calculando los recorridos de las funciones anteriores.

**Ejemplo B.1.4** Recorrido de  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $f(x) = \frac{(x-1)^3}{x \ln x}$

El dominio de  $f$  era  $D = (0, 1) \cup (1, \infty)$ . La función es continua en todo su dominio, por ser cociente de funciones continuas y no anularse el denominador. Por otra parte,  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^3}{x \ln x} = 0$ , de modo que la función se puede extender de manera continua en  $x = 1$  definiendo  $f(1) = 0$ .

Como  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-1)^3}{x \ln x} = +\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^3}{x \ln x} = \infty$ , basta localizar cuál es el mínimo  $c$  de la función, para concluir que el recorrido viene dado por el intervalo  $[f(c), \infty)$ .

Determinamos el punto  $c$  en el que  $f(x)$  alcanza el mínimo absoluto:

$$f'(x) = \frac{3(x-1)^2 x \ln x - (\ln x + 1)(x-1)^3}{x^2 \ln^2 x} = \frac{(x-1)(2x \ln x + \ln x - x + 1)}{x^2 \ln^2 x},$$

de modo que  $f'(x) = 0$  si, y sólo si,  $x = 1$  ó  $g(x) = 2x \ln x + \ln x - x + 1 = 0$ .

Estudiando el crecimiento de  $g(x)$  podemos averiguar cuándo es  $g(x) = 0$ . Se tiene que  $g'(x) = 2 \ln x + 2 + \frac{1}{x} - 1$ . Necesitamos recurrir a  $g''(x)$  para ver el comportamiento de  $g'(x)$ . Como  $g''(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} \left(2 - \frac{1}{x}\right)$ , que es negativa en  $(0, 0.5)$ , se anula para  $x = 0.5$  y es positiva en  $(0.5, \infty)$ , resulta que  $g'(x)$  es decreciente en  $(0, 0.5)$ , tiene un mínimo en  $x = 0.5$  y crece en  $(0.5, \infty)$ .

Ahora, como  $g'(0.5) = 1.61 \dots > 0$ , resulta que  $g'(x) > 0$  en  $(0, \infty)$ , de donde  $g(x)$  es estrictamente creciente en todo  $(0, \infty)$ . Como  $g(x)$  es continua,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ , según el teorema de Bolzano  $g(x)$  posee un cero, único por ser estrictamente creciente. Al ser  $g(1) = 0$ , se tiene que  $x = 1$  es el único cero de  $g(x)$ . Por tanto,  $x = 1$  es el único punto en que se anula  $f'(x)$ . Como  $\lim_{x \rightarrow 1} f''(x) = 2 > 0$ , resulta que  $f(x)$  tiene en  $x = 1$  un mínimo (que podemos entender como  $f(1) = 0$ , según habíamos visto antes). De modo que el recorrido de  $f(x)$  es  $R = (0, \infty)$ , o bien  $R' = [0, \infty)$  si entendemos que se puede extender la función en  $x = 1$  como  $f(1) = 0$ .

■

**Ejemplo B.1.5** Recorrido de  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $f(x) = e^{\sqrt{2 \sin x - 1}}$

Siendo  $D = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\right]$ , se tiene que  $0 \leq 2 \sin x - 1 \leq 1$ . La función  $f(x)$  tendrá por recorrido la imagen por  $e^x$  de la imagen por  $\sqrt{x}$  del intervalo  $[0, 1]$ , a saber:  $R = [1, e]$ .

■



**Ejemplo B.1.6** Recorrido de  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $f(x) = \sqrt{\ln(2 \cos e^x)}$

El dominio venía dado por

$$D = (-\infty, \ln \frac{\pi}{3}] \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [\ln(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi), \ln(\frac{\pi}{3} + 2k\pi)].$$

Para determinar el recorrido, observamos que la función resulta de la composición de 5 funciones elementales,  $f(x) = f_5(f_4(f_3(f_2(f_1(x)))))$ , donde

$$f_1(x) = e^x, \quad f_2(x) = \cos x, \quad f_3(x) = 2x, \quad f_4(x) = \ln x \quad \text{y} \quad f_5(x) = \sqrt{x}.$$

La imagen de  $f_1$  sobre el dominio  $D$  de  $f$  viene dada por

$$I_1 = (0, \frac{\pi}{3}] \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi].$$

La imagen de  $f_2$  sobre  $I_1$  viene dada por  $I_2 = [\frac{1}{2}, 1]$ . La imagen de  $f_3$  sobre  $I_2$  viene dada por  $I_3 = [1, 2]$ . La imagen de  $f_4$  sobre  $I_3$  resulta ser  $I_4 = [0, \ln 2]$ . Finalmente, el recorrido de  $f$  coincide con la imagen de  $f_5$  sobre  $I_4$ , que viene dada por

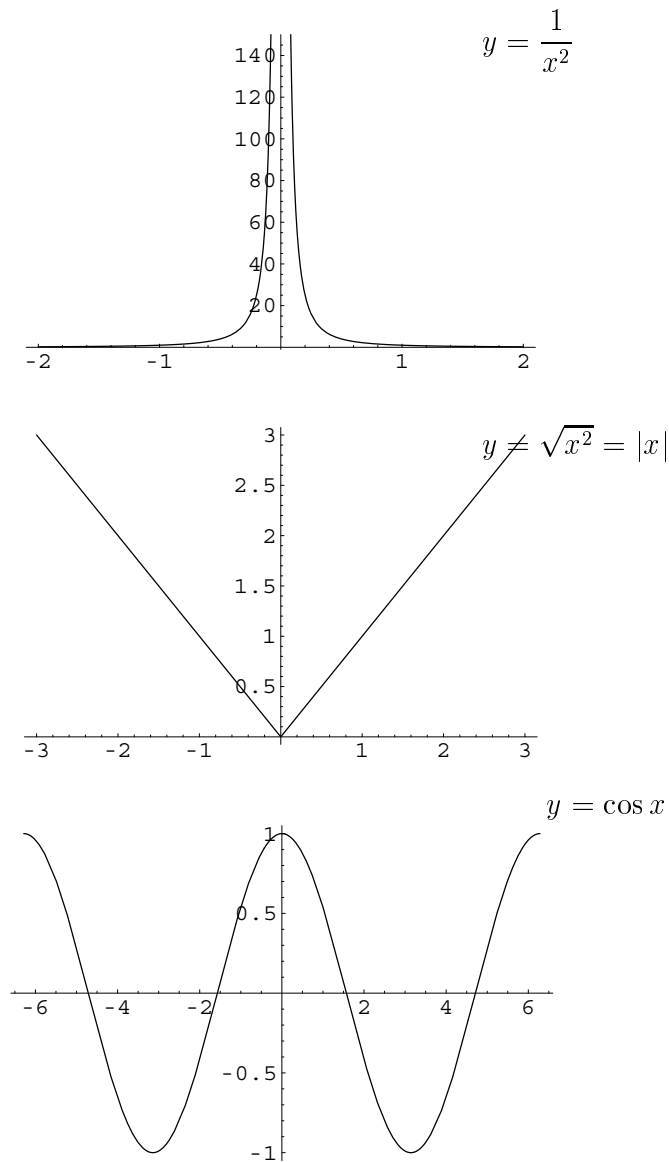
$$R = I_5 = [0, \sqrt{\ln 2}].$$

## B.2 Simetrías

Cuando una función  $f(x)$  presenta simetrías respecto del eje de ordenadas o del origen de coordenadas, el estudio de su representación gráfica se puede reducir a los valores no negativos del dominio.

Nótese que una función es *simétrica respecto del eje de ordenadas* ó *par* cuando  $f(x) = f(-x)$  para todo  $x$  del dominio; mientras que será *simétrica respecto del origen* ó *impar* cuando  $f(-x) = -f(x)$  para todo  $x$  del dominio.

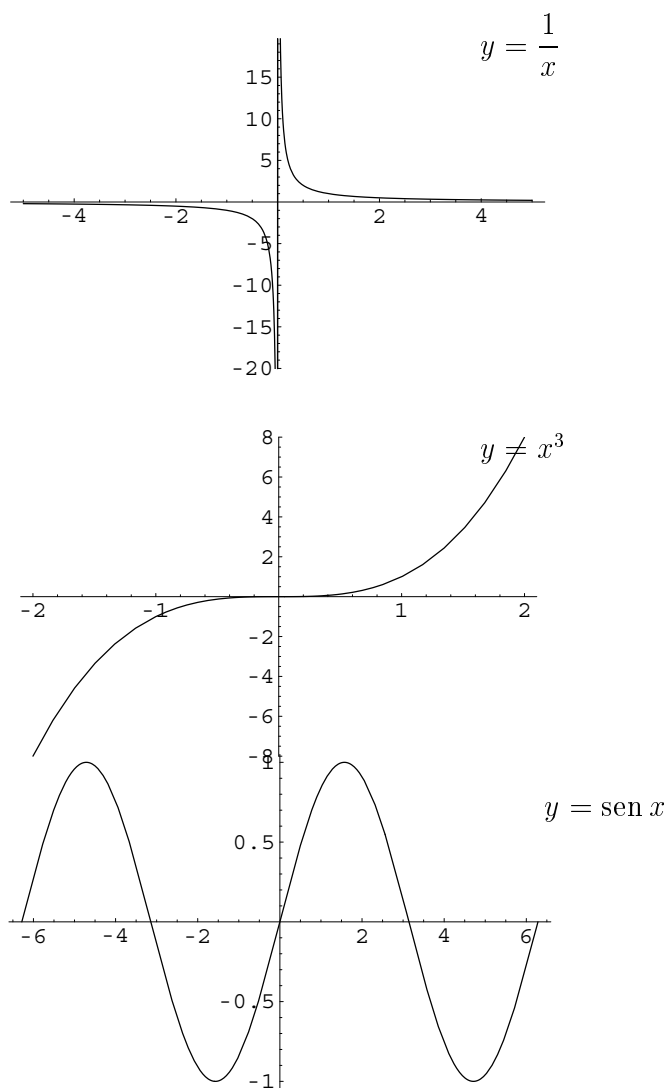
**Ejemplo B.2.1** Las funciones  $\frac{1}{x^2}$ ,  $|x|$ ,  $\cos x$  son todas simétricas respecto del eje de ordenadas.



**Figura B.1:** Ejemplos de funciones pares

■

**Ejemplo B.2.2** Las funciones  $\frac{1}{x}$ ,  $x^3$ ,  $\sin x$  son todas simétricas respecto del origen.

**Figura B.2:** Ejemplos de funciones impares

■

A veces es conveniente estudiar la gráfica simétrica de  $f(x)$  respecto de la recta  $y = x$ , la cual tiene relación con la función inversa de  $f$ ,  $x = f^{-1}(y)$ . Éste es el caso de la función  $f(x) = \frac{1}{x}$  considerada previamente. Sobre este hecho incidimos al final del apéndice.

### B.3 Puntos de corte con ejes

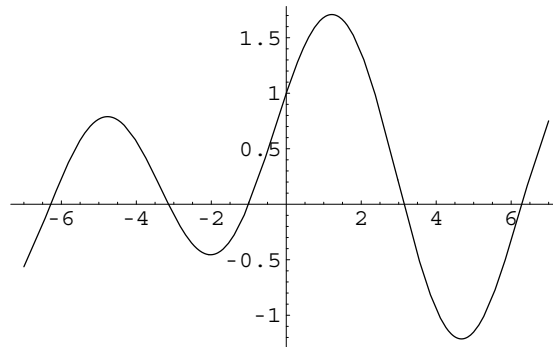
Suele ser particularmente interesante conocer en qué puntos  $x$  cruza una función  $f(x)$  dada el eje de abscisas, en los que se puede originar (no siempre, desde luego, caso de  $x^2$ ) un cambio de signo de la función. Son los llamados *ceros* o *raíces* de la función, los  $x$  del dominio con  $f(x) = 0$ .

Hay que tener especialmente cuidado a la hora de determinar los ceros de una función racional  $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ : si bien es cierto que los ceros de  $g(x)$  que estén en el dominio de  $f(x)$  constituyen ciertamente, por ende, ceros de  $f(x)$ ; no es, sin embargo, verdad que todo cero de  $g(x)$  sea cero de  $f(x)$  (hablamos entonces de ceros de  $g(x)$  que no están en el dominio de  $f(x)$  como función racional).

**Ejemplo B.3.1** Sea la función  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $s(x) = \frac{(x+1)\sin x}{x}$

Tiene por dominio de definición  $D = \mathbb{R} - \{0\}$ , aunque se puede extender de manera continua a todo  $\mathbb{R}$  definiendo  $f(x) = \begin{cases} s(x), & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Los ceros de  $f(x)$  son los de  $s(x)$ , dado que  $f(0) = 1 \neq 0$ . Como función racional, uno trataría de encontrar los ceros de  $s(x)$  en función de los ceros del numerador,  $(x+1)\sin x$ , que son  $x = -1$  y  $x = k\pi$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ . Sin embargo, esto es un error, porque  $x = 0$  no es un cero de  $s(x)$  (ni por tanto de  $f(x)$ ), puesto que  $s(x)$  no está definida en  $x = 0$ , siendo además  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)\sin x}{x} = 1 \neq 0$ .



**Figura B.3:** La función no presenta un cero en  $x = 0$

■

Para determinar los ceros de una función continua, normalmente se recurre al Teorema de Bolzano y al estudio del crecimiento de la función, para determinar hipotéticos *ceros múltiples* de multiplicidad  $n$ , en los que además de anularse la función, se anulan las  $n - 1$  primeras derivadas  $f(x) = f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n-1)}(x) = 0$ , pero no la  $n$ -ésima,  $f^{(n)}(x) \neq 0$  (bien es un número real distinto de cero, bien infinito, o bien no existe tal límite). Éste es el caso de la parábola  $y = x^2$ , que tiene un cero doble en  $x = 0$ .

En realidad, si  $f(c) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{(x - c)^{n-1}} = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{(x - c)^n} \neq 0$  (bien es un número real distinto de cero, bien infinito, o bien no existe tal límite), entonces  $f(x)$  tiene un cero múltiple en  $x = c$  de multiplicidad  $n$ . En particular, si  $n = 1$ , se habla de cero simple, y si  $n > 1$  se habla de cero múltiple. Geométricamente, un cero múltiple se identifica porque el eje de abscisas es tangente a la función de dicho punto; de hecho, a mayor multiplicidad, mayor tangencia en el punto.

Es fácil probar que si  $f(x)$  tiene en  $c$  un cero de multiplicidad  $n$  y  $g(x)$  tiene en  $c$  un cero de multiplicidad  $m$ , entonces  $f(x) + g(x)$  tiene en  $c$  un cero de multiplicidad  $\min\{n, m\}$ ,  $f(x) \cdot g(x)$  tiene en  $c$  un cero de multiplicidad  $n + m$  y  $\frac{f(x)}{g(x)}$  tiene en  $c$  un cero de multiplicidad  $n - m$  (suponiendo que  $n > m$ ). Por otro lado, si  $f(x)$  tiene en  $c$  un cero de multiplicidad  $n$  y  $g(x)$  tiene en  $f(c)$  un cero de multiplicidad  $m$ , entonces  $g(f(x))$  tiene en  $c$  un cero de multiplicidad  $n \cdot m$ .

**Ejemplo B.3.2** Calcular los ceros, incluyendo las multiplicidades correspondientes, de la función  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} (\cos x - 1)^3 \ln |x|, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

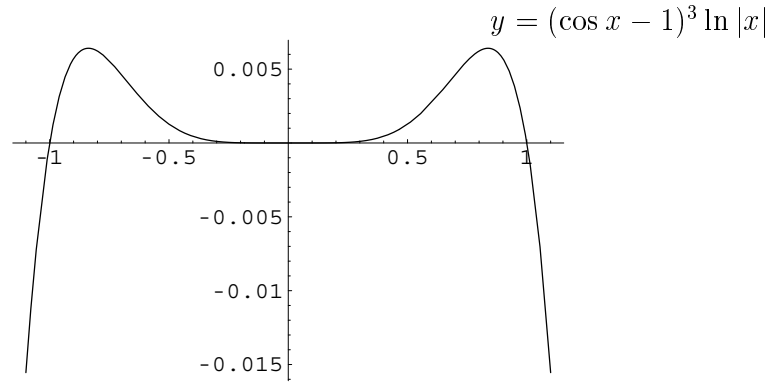
La función  $f(x)$  es el producto de  $(\cos x - 1)^3$  y  $\ln |x|$ ; por tanto, sus ceros son todos los  $x \in \mathbb{R}$  tales que  $\cos x = 1$  y  $|x| = 1$ , esto es, los puntos del conjunto  $\{-1, 1, 2k\pi\}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Los ceros  $x = 1, -1$  son simples, puesto que

$$\lim_{x \rightarrow \pm 1} \frac{f(x)}{x - (\pm 1)} = -(\pm)8 \sin^6(0.5) \neq 0.$$

Sin embargo, los ceros  $x = 2k\pi$  son de multiplicidad 6, puesto que

$$\lim_{x \rightarrow 2k\pi} \frac{f(x)}{(x - 2k\pi)^5} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 2k\pi} \frac{f(x)}{(x - 2k\pi)^6} = \begin{cases} -\frac{\ln(2k\pi)}{8}, & \text{si } k \neq 0 \\ +\infty, & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Nótese que aunque  $|x|$  no es derivable en  $x = 0$ , y pese a que  $\ln |x|$  no está definido en  $x = 0$ , la función  $f(x)$  no sólo está definida en  $x = 0$ , sino que además es continua y derivable 5 veces en dicho punto. Sería conveniente que el alumno comprobara este hecho por sí mismo. En la gráfica adjunta se puede observar la tangencia pronunciada en  $x = 0$  (¡mírese los valores de ordenadas!).



**Figura B.4:** La función tiene en el origen un cero de multiplicidad 6

**Ejemplo B.3.3** Calcular los ceros, incluyendo las multiplicidades correspondientes, de la función  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

De nuevo, por ser  $f(x)$  un producto de dos factores, sus ceros los hemos de buscar en los ceros de los factores, que son

$$x = 0 \quad \text{y} \quad x = \frac{1}{2k\pi}, \text{ para } k \in \mathbb{Z} - \{0\}.$$

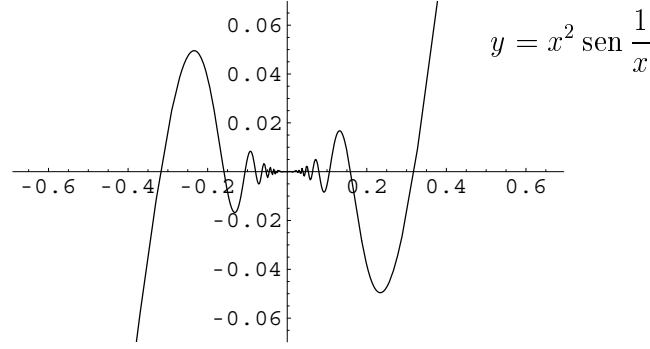
Los ceros  $x = \frac{1}{2k\pi}, k \neq 0$  son simples, puesto que

$$\lim_{x \rightarrow (2k\pi)^{-1}} \frac{f(x)}{x - (2k\pi)^{-1}} = (-1)^{k+1} \neq 0.$$

Sin embargo, el cero  $x = 0$  es doble, puesto que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0 \quad \text{y} \quad \nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}.$$

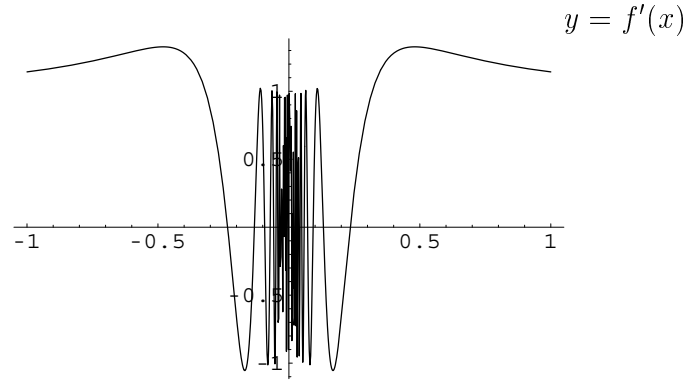
Esbozamos a continuación una parte de la gráfica de la función.



**Figura B.5:** Infinitos ceros simples y un cero doble en el origen

Es reseñable el hecho de que  $f'(x)$  está definida en todo  $\mathbb{R}$ ,  $f'(0) = 0$ , aunque  $f'(x)$  no es continua en  $x = 0$ :  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ , que no existe.

Es un ejercicio recomendable por parte del alumno la comprobación de que existe  $f'(0) = 0$ , aunque la gráfica de  $f'(x) = \begin{cases} -\cos \frac{1}{x} + 2x \sin \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$  sea de la forma



**Figura B.6:** No es intuitivo, pero la función es derivable en el origen

■

En ocasiones también se requiere saber por dónde corta la función al eje de ordenadas, necesariamente en un solo punto, por definición de función: en  $(0, f(0))$ . En los casos de las funciones anteriores, como  $x = 0$  era un cero de ambas, las gráficas cortaban al eje de ordenadas en el origen. Esto no siempre es así: la parábola  $y = x^2 + 5$  corta al eje de ordenadas en su vértice, sito en  $(0, 5)$ .

## B.4 Asíntotas y ramas infinitas

Las *asíntotas* son rectas a las que se acerca la curva de manera indefinida. Las hay de tres tipos:

- Verticales, de ecuación  $x = c$ .
- Horizontales, de ecuación  $y = n$ .
- Oblicuas, de ecuación  $y = mx + n$ .

En realidad, las asíntotas horizontales son un caso particular de las oblicuas, donde  $m = 0$ .

Un error común es pensar que toda función tiene un número limitado de asíntotas. Nada más lejos de la realidad: una función puede tener un número indeterminado de asíntotas, desde ninguna (como  $y = x^2$ ), hasta infinitas (como  $y = \operatorname{tg} x$ , que tiene asíntotas verticales en los puntos  $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ ). Eso sí, asíntotas oblicuas (en particular, horizontales) tiene a lo sumo 2: una, cuando  $x \rightarrow \infty$ ; y otra, cuando  $x \rightarrow -\infty$ .

Otro error frecuente es pensar que la gráfica de la función no puede cortar a una asíntota: si bien es cierto que, por definición de función, la gráfica no puede cortar nunca a ninguna asíntota vertical, sí puede cortar a alguna de las (a lo sumo 2) asíntotas oblicuas (en particular horizontales).

**Ejemplo B.4.1** Sea la función  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = 1 + \frac{x^2 - 1}{(x - 2)(e^{-x} + 1)}$$

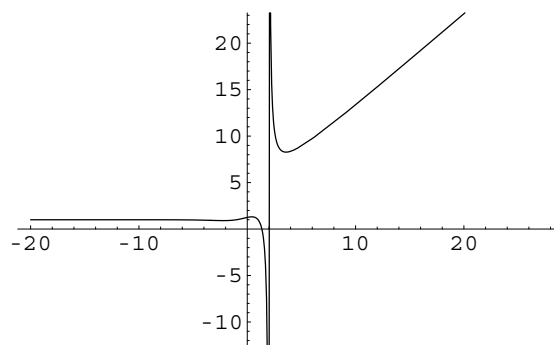
Esta función presenta una asíntota horizontal cuando  $x \rightarrow -\infty$ , de ecuación  $y = 1$ , dado que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 1 + \frac{x^2 - 1}{(x - 2)(e^{-x} + 1)} \right) = 1$$



Asimismo, presenta una asíntota oblicua cuando  $x \rightarrow \infty$ , de ecuación  $y = x + 2$ , puesto que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = 2$$



**Figura B.7:** Ambas asíntotas cortan a la función

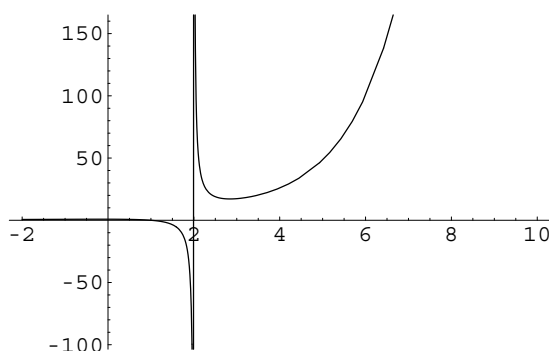
■

Las asíntotas verticales se localizan en aquellos puntos  $x_0$  de modo que

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = \pm\infty.$$

Las funciones racionales presentan con frecuencia (aunque no siempre) asíntotas verticales en los ceros del denominador, dependiendo de si el numerador tiene al mismo punto como cero o no.

**Ejemplo B.4.2** Sea la función  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \frac{e^x - e}{x - 2}$



**Figura B.8:** Asíntota vertical en  $x = 2$ , con límites laterales distintos

Tal como se muestra en la figura anterior, la función presenta una asíntota vertical en  $x = 2$ , toda vez que

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{e^x - e}{x - 2} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{e^x - e}{x - 2} = \infty.$$

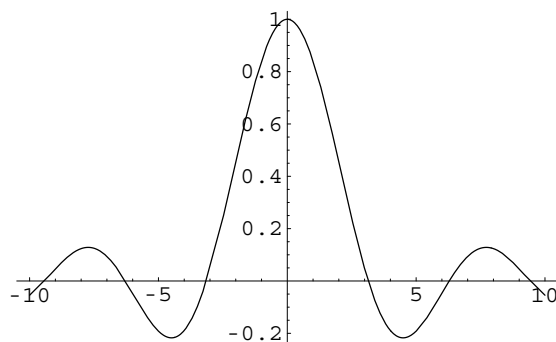
■

**Ejemplo B.4.3** Sea la función  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$

Esta función no tiene ninguna asíntota vertical, pues

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1.$$

Más aún, definiendo  $f(0) = 1$ , la función pasa a ser continua en todo  $\mathbb{R}$ .



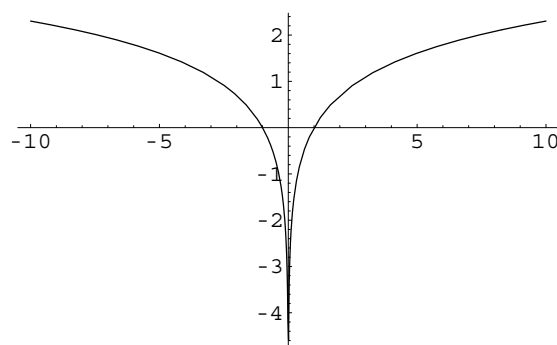
**Figura B.9:** La función carece de asíntotas verticales

■

**Ejemplo B.4.4** Sea la función  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \ln |x|$

Sin ser una función racional, presenta una asíntota vertical en  $x = 0$ , puesto que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln |x| = -\infty.$$



**Figura B.10:** Asíntota vertical en  $x = 0$ , con límites laterales coincidentes

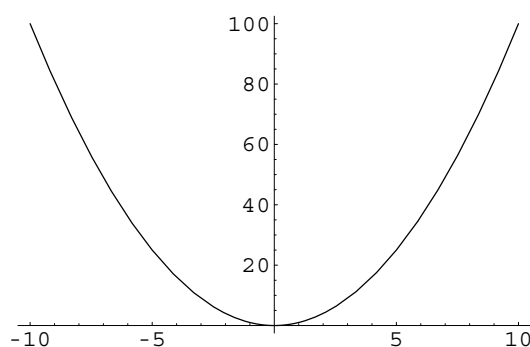
Si existe una asíntota oblicua  $y = mx + n$  cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ , entonces necesariamente es  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R}$  y  $n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) \in \mathbb{R}$ .

Las asíntotas horizontales son por tanto oblicuas con  $m = 0$ .

Si alguno de estos límites no existe, eso significa que en esa dirección no existe ninguna asíntota oblicua.

**Ejemplo B.4.5** *Analizar el caso de la parábola  $x^2$*

Puesto que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x} = \pm\infty$ , la parábola carece de asíntotas oblicuas (y, por ende, horizontales).

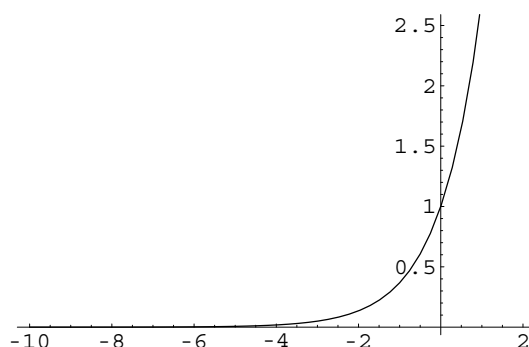


**Figura B.11:** La parábola  $y = x^2$  carece de asíntotas oblicuas

**Ejemplo B.4.6** *Considérese el caso de la función exponencial  $e^x$*

La función exponencial tiene sólo una asíntota oblicua, que es horizontal,  $y = 0$ , cuando  $x \rightarrow -\infty$ , puesto que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = \infty.$$

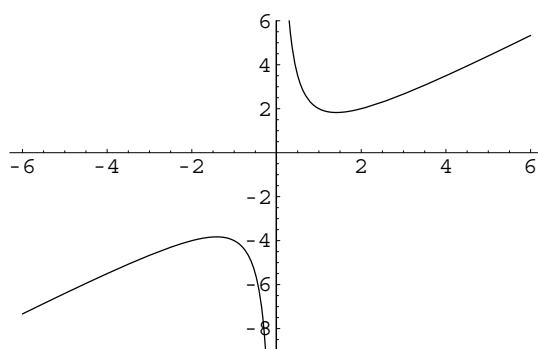


**Figura B.12:** La función  $e^x$  tiene una asíntota horizontal cuando  $x \rightarrow -\infty$

■

**Ejemplo B.4.7** Analizar el caso de la función dada por  $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x}$

De un lado,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^2} = 1$  y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2 - x + 2}{x} - x \right) = -1$ . De otro,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^2} = 1$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - x + 2}{x} - x \right) = -1$ . De manera que la función  $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x}$  tiene dos asíntotas oblicuas en la recta  $y = x - 1$ .



**Figura B.13:** Dos asíntotas oblicuas coincidentes

■

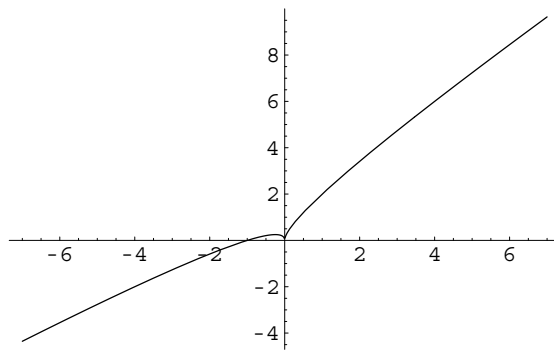
Previamente, en el Ejemplo B.4.1, se trató la función  $f(x) = 1 + \frac{x^2 - 1}{(x - 2)(e^{-x} + 1)}$ , que tiene dos asíntotas oblicuas distintas (ver Figura B.7).

Hay funciones, como las anteriores  $y = x^2$  e  $y = e^x$ , que tienden a infinito cuando  $x \rightarrow \pm\infty$  pero sin acercarse a una recta (asíntota). Este tipo de funciones se dice que presentan una *rama* hacia el infinito. Hay diversos tipos de ramas: parabólicas (típicas de  $y = x^2$ ), en espiral (típicas de curvas en coordenadas polares), oscilatorias propiciadas por funciones periódicas (por ejemplo,  $y = x \cdot \sin x$ ), etc.

Nosotros vamos a centrarnos exclusivamente en las *ramas parabólicas*, cuyo nombre procede de la comparación con las ramas de la parábola  $y = x^2$ . Si una función  $y = f(x)$  crece hacia el infinito en la misma proporción que lo hace una parábola de eje  $y = mx + n$ , se dice que  $f(x)$  tiene una rama parabólica de pendiente  $m$ . Si  $m = 0$  se habla de *rama parabólica horizontal*. Si la pendiente es infinito (esto es, la función crece como la parábola  $y = x^2$ ), se habla de *rama parabólica vertical*. Concretando, una función  $y = f(x)$  presenta una:

- Rama parabólica de pendiente  $m \in \mathbb{R}$ : si se tiene que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m$  y  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \pm\infty$ .

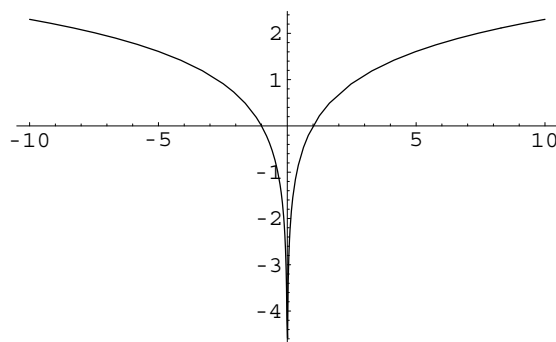
Éste es el caso de  $y = x + \sqrt{|x|}$  cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ , que presenta una rama parabólica de pendiente 1:



**Figura B.14:** Tiene dos ramas infinitas parabólicas

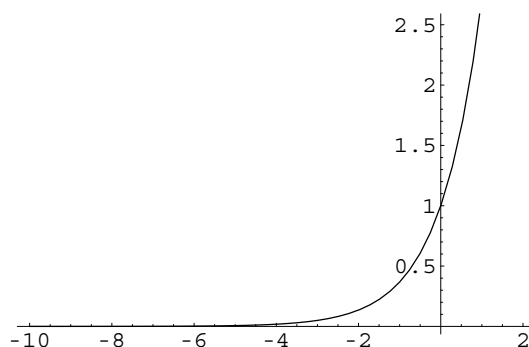
En el caso particular de que  $m = 0$  se habla de rama parabólica horizontal. Éste es el caso de  $y = \ln |x|$  cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ . El sentido de la *horizontalidad* tiene una segunda interpretación, en el hecho de que, aunque  $f(x)$  crece hacia

el infinito, lo hace siempre de manera progresivamente más lenta que cualquier recta de pendiente no nula.



**Figura B.15:** La función  $\ln|x|$  presenta dos ramas parabólicas distintas

- Rama parabólica vertical: se tiene que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ . Éste es el caso de  $y = e^x$  cuando  $x \rightarrow \infty$ . El sentido de la *verticalidad* tiene una segunda interpretación, en el hecho de que, aunque  $f(x)$  crece hacia el infinito, lo hace siempre de manera progresivamente más rápida que cualquier recta de pendiente no nula.



**Figura B.16:** La función exponencial presenta una rama parabólica vertical

■

## B.5 Regionamiento

El regionamiento consiste en el estudio del signo que toma una función  $f(x)$  en los intervalos del dominio que determinan los ceros de  $f(x)$  y las asíntotas verticales; de

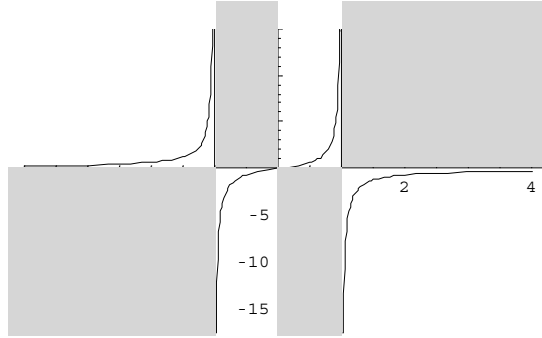
modo que se determina por dónde pasa la gráfica en cada uno de estos intervalos, si por el rectángulo superior (por encima del eje  $OX$ ) o el inferior (valores negativos del eje de ordenadas). Es claro que el signo de la función permanece constante en cada uno de estos intervalos, de ahí que se hable de *regiones por las que pasa la función* o simplemente *regionamiento*.

**Ejemplo B.5.1** Estudiar el regionamiento de la función  $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$

Los ceros de  $f(x)$ , como función racional que es, corresponden a los ceros de la función del numerador que *estén en el dominio de definición*,  $D = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ . En este caso, el único cero de la función es  $x = 0$ .

Por otra parte,  $f(x)$  tiene dos asíntotas verticales, en los ceros del denominador (que no son ceros del numerador):  $x = -1$  y  $x = 1$ .

De modo que la función atraviesa cuatro regiones:  $(-\infty, -1)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, 1)$  y  $(1, \infty)$ . Determinando el signo de la función en cada uno de estos intervalos, obtendremos su regionamiento. Se tiene que  $f(-2) = \frac{2}{3} > 0$ ,  $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{2}{3} < 0$ ,  $f(\frac{1}{2}) = \frac{2}{3} > 0$ ,  $f(2) = -\frac{2}{3} < 0$ ; así, la función es positiva en  $(-\infty, -1)$  y  $(0, 1)$ , y negativa en  $(-1, 0)$  y  $(1, \infty)$ .



**Figura B.17:** Regionamiento de  $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$

■

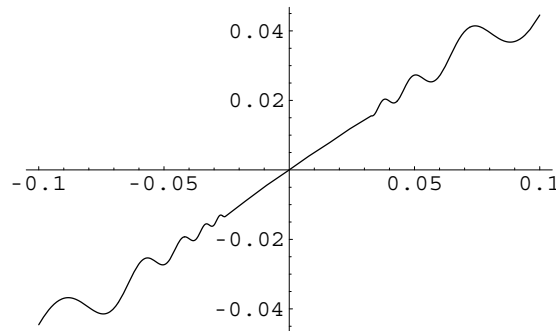
## B.6 Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.

El crecimiento de una función  $f(x)$  en un punto  $x = a$  depende del signo que tome la derivada primera de la función en dicho punto: si  $f'(a) > 0$ , entonces la función es estrictamente creciente en  $a$ , de modo que si  $f'$  es continua en  $a$  resulta que para todo  $x, w$  en un entorno suficientemente pequeño  $(a - \delta, a + \delta)$  se tiene que  $x < w$  implica  $f(x) < f(w)$ ; por el contrario, si  $f'(a) < 0$ , entonces la función es estrictamente decreciente en  $a$ , de modo que si  $f'$  es continua en  $a$  resulta que para todo  $x, w$  en un entorno suficientemente pequeño  $(a - \delta, a + \delta)$  se tiene que  $x < w$  implica  $f(x) > f(w)$ .

Es conveniente incidir en el hecho de que si  $f'$  no es continua en  $a$ , por mucho que  $f$  sea creciente (o decreciente) en dicho punto, puede ocurrir que  $f$  no mantenga este crecimiento en ningún entorno de  $a$ .

**Ejemplo B.6.1** Sea la función  $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

La función es derivable en  $\mathbb{R} - \{0\}$ , siendo  $g'(x) = \frac{1}{2} + 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ . Es evidente que  $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} g'(x)$ .



**Figura B.18:** Alrededor del origen no hay un crecimiento monótono

No obstante, la función es derivable en el origen, siendo

$$g'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2} + h \operatorname{sen} \frac{1}{h} \right) = \frac{1}{2}.$$



Como  $g'(0) > 0$ , la función es estrictamente creciente en  $x = 0$ . Aún así, en cualquier entorno de  $x = 0$  no se mantiene este comportamiento, puesto que  $\lim_{x \rightarrow 0} g'(x)$  rellena el intervalo comprendido entre  $-\frac{1}{2}$  y  $\frac{3}{2}$ .

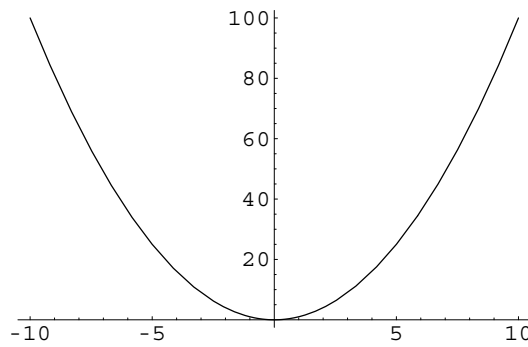
■

Por otra parte, si  $f'(a) = 0$  ó no existe  $f'(a)$ , la función puede tener en  $a$  un extremo local (máximo o mínimo), un punto de inflexión, o un punto de crecimiento dudoso; para determinar el comportamiento en el punto en cuestión basta estudiar cómo se comporta la función en sus alrededores.

Más concretamente, si  $f'(a) = 0$  y la primera derivada no nula en  $a$  es de orden par, digamos  $f'(a) = \dots = f^{(2k-1)}(a) = 0, f^{(2k)}(a) \neq 0$ , entonces la función tiene en  $a$  un máximo local si  $f^{(2k)}(a) < 0$  y un mínimo local si  $f^{(2k)}(a) > 0$ . En caso de que  $f'(a) = \dots = f^{(2n)}(a) = 0, f^{(2n+1)}(a) \neq 0$  (i.e.  $f'(a) = 0$  y la primera derivada no nula en  $a$  es de orden impar), entonces la función tiene en  $a$  un *punto de inflexión*, en el que la función cambia su carácter cóncavo/convexo.

Otra posibilidad que no requiere el cálculo de más funciones derivadas consiste en analizar si el signo de la derivada primera de la función cambia a ambos lados de  $x = a$ : de ser así, en  $x = a$  hay un extremo local (máximo si  $f'(a^-) > 0$  y  $f'(a^+) < 0$ , mínimo si  $f'(a^-) < 0$  y  $f'(a^+) > 0$ ); en otro caso, un punto de inflexión.

**Ejemplo B.6.2** Sea la parábola definida por  $f(x) = x^2$



**Figura B.19:** La parábola tiene un mínimo absoluto en su vértice

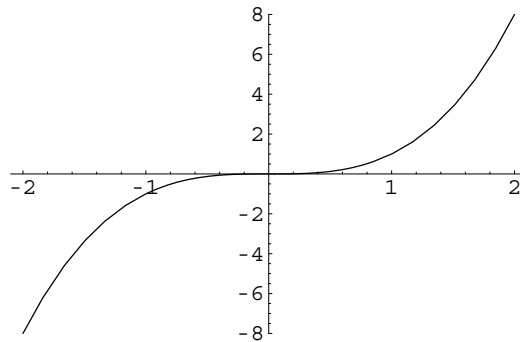
Tiene un solo extremo, que es mínimo (absoluto) en  $x = 0$ :  $f'(x) = 2x$  (que

se anula sólo en  $x = 0$ ) y  $f''(x) = 2 > 0$  para todo  $x$  (en particular para  $x = 0$ ). Adicionalmente,  $f'(0^-) < 0$  y  $f'(0^+) > 0$ .

■

**Ejemplo B.6.3** Analizar el comportamiento de la función  $f(x) = x^3$

La función  $f(x) = x^3$  no tiene extremos locales, pero sí un punto de inflexión en  $x = 0$ :  $f'(x) = 3x^2$  sólo se anula en  $x = 0$ ;  $f''(x) = 6x$ , de modo que  $f''(0) = 0$ ; y  $f'''(x) = 6 > 0$  para todo  $x$ , en particular para  $x = 0$ . Adicionalmente,  $f'(0^-) > 0$  y  $f'(0^+) > 0$ .

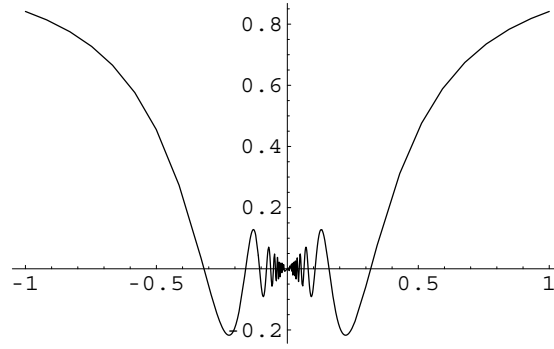


**Figura B.20:** La función  $f(x) = x^3$  tiene un punto de inflexión en el origen

■

**Ejemplo B.6.4** Considerar el caso de la función  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$  si  $x \neq 0$  y  $f(0) = 0$

Esta función es derivable en  $\mathbb{R} - \{0\}$ , con  $f'(x) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cdot \cos \frac{1}{x}$ , y no tiene derivada en  $x = 0$ , dado que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$  no existe. Por otra parte, la función presenta un número infinito de extremos locales (máximos y mínimos) en cualquier entorno del punto  $x = 0$ , y por este mismo motivo, en  $x = 0$  (donde no tiene derivada definida) presenta un punto de crecimiento dudoso (la función ni crece, ni decrece, ni tiene un punto de inflexión: a ambos lados de  $x = 0$ , la función toma indistintamente valores mayores y menores que  $f(0)$ ).

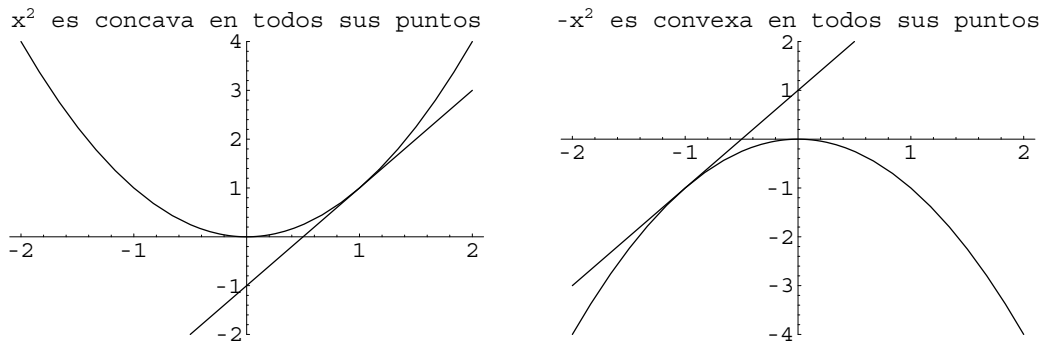


**Figura B.21:** En el origen no hay crecimiento definido

■

## B.7 Concavidad, convexidad y puntos de inflexión

El carácter cóncavo o convexo de una función en un punto se refiere a la posición relativa de la gráfica de la función con respecto de la recta tangente a la curva en el punto dado: si la función toma valores mayores que la recta tangente en un entorno del punto  $x = a$  se dice que es *cóncava* en  $a$ ; por el contrario, si la función toma valores menores que la recta tangente en un entorno de  $x = a$  se dice que es *convexa* en  $a$ .



**Figura B.22:** La posición relativa respecto de la recta tangente es crucial

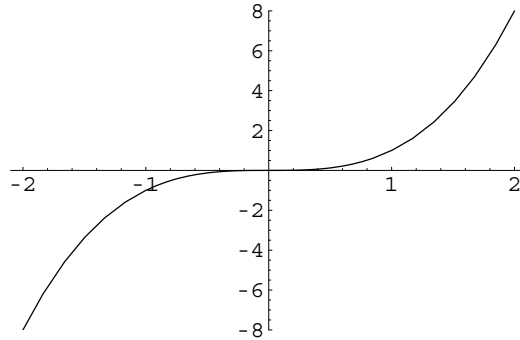
Este comportamiento se puede traducir de manera analítica mediante el estudio del signo de la segunda derivada: si  $f''(a) > 0$ , entonces  $f'(x)$  es creciente en  $x = a$  y  $f(x)$  está por encima de su recta tangente en  $a$ , de modo que  $f(x)$  es cóncava en  $a$ ; en el caso de que  $f''(a) < 0$ , entonces  $f'(x)$  es decreciente en  $x = a$  y  $f(x)$  está por debajo de su recta tangente en  $a$ , de modo que  $f(x)$  es convexa en  $a$ . En los ejemplos anteriores,  $f(x) = x^2$  tiene por función derivada a  $f'(x) = 2x$  y por derivada segunda

a  $f''(x) = 2 > 0$  para todo  $x$ . Por otra parte,  $f(x) = -x^2$  tiene por derivada segunda a  $f''(x) = -2 < 0$  para todo  $x$ .

En aquellos puntos  $a$  en los que  $f''(a) = 0$  (independientemente de que  $f'(a)$  sea nula o no) puede haber un punto de inflexión, a expensas de que el signo de  $f''(x)$  cambie a cada lado de  $x = a$ , o equivalentemente,  $f'''(a) \neq 0$ .

**Ejemplo B.7.1** Considerar una vez más el caso de la función  $f(x) = x^3$

La función  $f(x) = x^3$ , estrictamente creciente en todo  $\mathbb{R}$  ( $f'(x) = 3x^2 > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ ), es convexa en  $(-\infty, 0)$ , cóncava en  $(0, \infty)$  y tiene por tanto un punto de inflexión en  $x = 0$ . De hecho,  $f''(x) = 6x$  se anula en  $x = 0$ , mientras que  $f'''(0) = 6 \neq 0$ ; también,  $f''(0^-) < 0$  y  $f''(0^+) > 0$ .



**Figura B.23:** Pasa de convexa a cóncava en el punto de inflexión

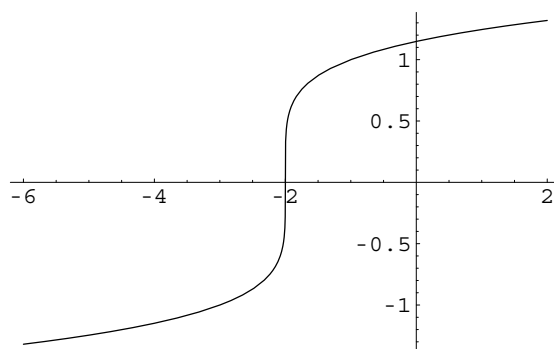
■

Por último, hemos de destacar que para que en  $x = a$  haya un punto de inflexión, no siempre es necesario que  $f''(a) = 0$ : a veces, una función tiene un punto de inflexión en puntos en los que la función tiene derivada segunda.

**Ejemplo B.7.2** Sea la función  $f(x) = \sqrt[5]{(x+2)^2}$

En el punto  $x = -2$ , pese a no admitir derivada (tiene pendiente infinita en dicho punto), presenta un punto de inflexión.

En efecto, la función se puede extender de manera continua definiendo  $f(-2) = 0$ . Además,  $f''(x) = -\frac{4}{25(x+2)^{\frac{9}{5}}}$ , de modo que  $f''(-2^-) > 0$  y  $f''(-2^+) < 0$ .



**Figura B.24:** Punto de inflexión en el que la función no es derivable

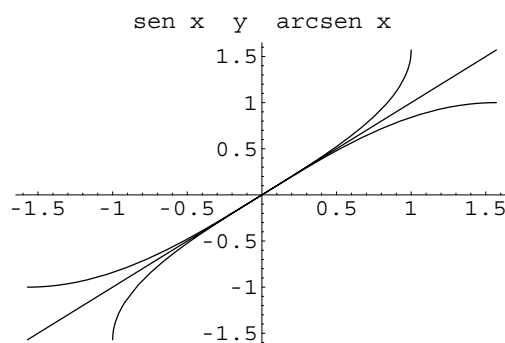
■

## B.8 Función inversa

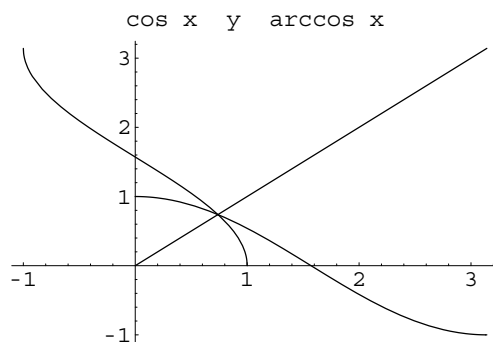
No todas las funciones admiten una función inversa. Para que ello sea posible, cada valor del dominio tiene que poseer una imagen distinta a las de los demás puntos del dominio: dicho de otro modo,  $x \neq w$  implica  $f(x) \neq f(w)$ . En definitiva, la función tiene que establecer una biyección del dominio a la imagen.

Éste es el caso de las funciones trigonométricas periódicas, tales como  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\tan x$ , etc. Para poder considerar funciones inversas de éstas, hay que reducir el dominio de definición a algún intervalo básico en el que no se repita ninguna imagen; por ejemplo, intervalo  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  para  $\sin x$ , intervalo  $[0, \pi]$  para  $\cos x$ , intervalo  $[0, \pi)$  para  $\tan x$ , etc.

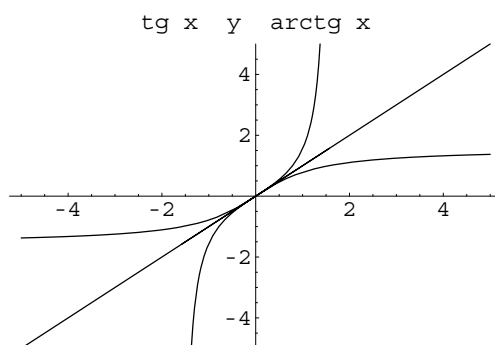
Gráficamente, es fácil determinar cuándo una función  $y = f(x)$  admite una función inversa  $x = f^{-1}(y)$ , y en caso afirmativo, cuál es la gráfica de dicha función inversa.



**Figura B.25:** El seno y el arcoseno son simétricas respecto de  $y = x$



**Figura B.26:** El coseno y el arccoseno son simétricas respecto  $y = x$



**Figura B.27:** La tangente y el arcotangente son simétricas respecto  $y = x$

Basta observar que si  $(x, f(x))$  es un punto de la gráfica de  $y = f(x)$  y  $f(x)$  admite función inversa  $f^{-1}$ , entonces  $(f(x), x)$  es un punto de la gráfica de la función  $x = f^{-1}(y)$ . En definitiva, la gráfica de  $f^{-1}$  es la simétrica de la gráfica de  $f(x)$  respecto de la bisectriz del primer cuadrante,  $y = x$ .

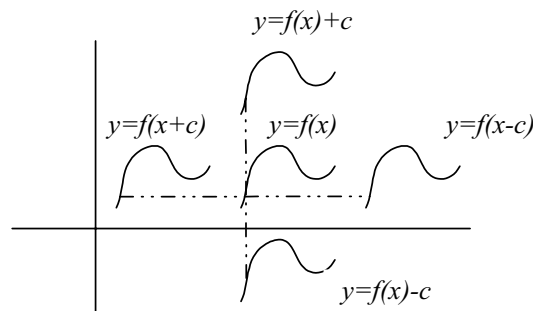
## B.9 Transformaciones de una gráfica

Una función se puede someter a transformaciones de traslación, estiramiento, compresión y reflexión.

Si  $c > 0$ :

1. La gráfica de  $y = f(x + c)$  consiste en trasladar la gráfica de  $y = f(x)$  horizontalmente en  $c$  unidades a la izquierda.

2. Análogamente, la gráfica de  $y = f(x - c)$  consiste en trasladar la gráfica de  $y = f(x)$  horizontalmente en  $c$  unidades a la derecha.
3. La gráfica de  $y = f(x) + c$  consiste en trasladar la gráfica de  $y = f(x)$  verticalmente en  $c$  unidades hacia arriba.
4. Análogamente, la gráfica de  $y = f(x) - c$  consiste en trasladar la gráfica de  $y = f(x)$  verticalmente en  $c$  unidades hacia abajo.

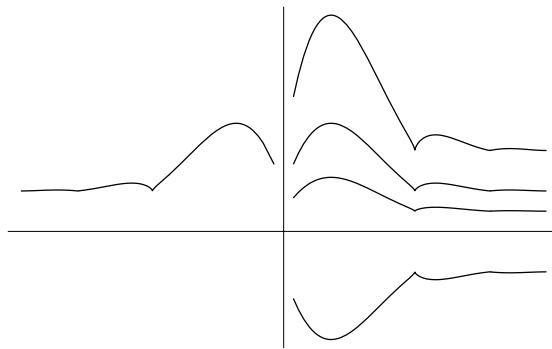


**Figura B.28:** Traslaciones a las que se puede someter una función

■

Si  $c > 1$ :

1. La gráfica de  $y = c \cdot f(x)$  consiste en estirar la gráfica de  $y = f(x)$  verticalmente en un factor de  $c$ .
2. Análogamente, la gráfica de  $\frac{f(x)}{c}$  consiste en comprimir la gráfica de  $y = f(x)$  verticalmente en un factor de  $c$ .
3. La gráfica de  $y = f(cx)$  consiste en comprimir la gráfica de  $y = f(x)$  horizontalmente en un factor de  $c$ .
4. La gráfica de  $y = f\left(\frac{x}{c}\right)$  consiste en estirar la gráfica de  $y = f(x)$  horizontalmente en un factor de  $c$ .
5. La gráfica de  $y = -f(x)$  consiste en reflejar la gráfica de  $y = f(x)$  respecto del eje  $OX$ .
6. La gráfica de  $y = f(-x)$  consiste en reflejar la gráfica de  $y = f(x)$  respecto del eje  $OY$ .



**Figura B.29:** Transformaciones de  $f(x)$  por reflexiones y estiramientos

