

Capítulo 3

Aproximación de funciones por polinomios

3.1 Fórmula de Taylor para funciones de una variable

Como de todos es conocido, los polinomios son funciones muy fáciles de estudiar -por ejemplo, son fáciles de evaluar, de derivar, integrar, etc-. Por este motivo a lo largo de la historia ha sido grande el interés por tratar de “aproximar” algunas funciones por polinomios.

Supongamos por ejemplo que queremos obtener el valor aproximado de $\sqrt[10]{e} = e^{0.1}$. Es decir tratamos de obtener el valor aproximado de la función $f(x) = e^x$, en el punto $x = 0.1$, cercano al punto $x = 0$. Para ello trataremos de encontrar polinomios cuyo comportamiento, en las proximidades del origen, sea similar a $f(x) = e^x$. La Figura 3.1 muestra una representación gráfica de las funciones $f(x) = e^x$ y los polinomios $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = 1 + x$, $P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ y $P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$.

El polinomio $P_0(x) = 1$ está representado por una recta horizontal que pasa por el punto $P(0, 1)$, por lo tanto el polinomio $P_0(x)$ toma en $x = 0$ el mismo valor que la función $y = f(x)$ y decimos que ambas funciones tienen un contacto de orden 0 en el punto $P(0, 1)$.

El polinomio $P_1(x) = 1 + x$ representa la recta tangente a la función en dicho punto y por tanto en el punto $P(0, 1)$ coinciden, además de los valores de las funciones $f(x)$ y $P_1(x)$, los valores de sus derivadas. Por este motivo decimos que ambas funciones tienen en el punto $P(0, 1)$ un contacto de orden 1.

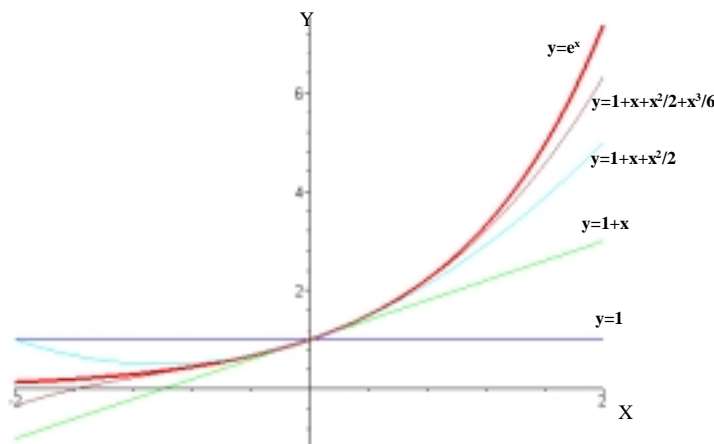


Figura 3.1: La función $f(x) = e^x$ aproximada por polinomios.

El polinomio $P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ representa una parábola que pasa también por dicho punto $P(0, 1)$. Esta función $P_2(x)$ tiene, en el punto $P(0, 1)$ el mismo valor que $f(x)$, coincidiendo también sus dos primeras derivadas con las de la función $f(x)$ en dicho punto. Se trata entonces de un contacto de orden 2.

Por el mismo motivo diremos que el polinomio $P_3(x)$ y la función $f(x)$ tienen un contacto de orden 3 en el punto $P(0, 1)$.

Estos polinomios se conocen con el nombre de *polinomios de Taylor* de la función $y = e^x$ en el punto P .

De una forma general, si una función es suficientemente regular en un punto a , en tanto en cuanto admite varias derivadas sucesivas en el punto, se la va a poder aproximar en un entorno suficientemente pequeño del punto mediante polinomios expresados en potencias de $(x - a)$, llamados *polinomios de Taylor* o *desarrollos limitados de Taylor*, de manera que cuando aumenta el grado mejora la aproximación.

Concretamente, si $f(x)$ es una función $n + 1$ veces derivable en un entorno del punto $a \in \mathbb{R}$ (o simplemente $n + 2$ veces derivable en el punto a), se llama *polinomio de Taylor*, o *desarrollo limitado de Taylor*, de orden n de $f(x)$ en $x = a$ y lo representaremos por $T_n(f, a)(x)$ al único polinomio $P_n(x)$ de grado menor o igual que n , que verifica:

$$P_n(a) = f(a), \quad P'_n(a) = f'(a), \quad P''_n(a) = f''(a), \quad \dots, \quad P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$$

¹ Este polinomio viene dado por la expresión

$$T_n(f, a)(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Cuando no haya lugar a confusión lo denotaremos por $T_n(x)$, en lugar de $T_n(f, a)(x)$.

En el caso particular en que el punto en cuestión sea el origen $x = 0$, el polinomio de Taylor recibe el nombre de *polinomio de MacLaurin*. Por lo tanto el polinomio de MacLaurin de orden n de una función $f(x)$ será:

$$T_n(f, 0)(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Ejemplo 3.1.1 Dada la función $f(x) = e^x$, obtener su polinomio de Taylor de tercer grado en $x = 0$.

Las derivadas de la función $f(x) = e^x$, así como sus valores en el origen son:

$$f'(x) = f''(x) = f'''(x) = e^x \quad f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 1$$

Por lo tanto el polinomio de Taylor pedido será

$$T_3(f, 0)(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

■

Dada una función $f(x)$, su polinomio de Taylor en un punto a aproxima entonces a la función en las proximidades de dicho punto. De hecho cuanto mayor es el grado del polinomio, mayor es el grado de aproximación. Este hecho queda de manifiesto en el siguiente teorema:

¹La existencia y unicidad del polinomio de Taylor de una función en un punto constituyen el **Teorema de Taylor**.

Teorema. Dada una función $f(x)$, $n + 1$ veces derivable en un entorno del punto $x = a$, y sea $T_n(f, a)(x)$ su polinomio de Taylor de orden n , entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_n(f, a)(x)}{(x - a)^n} = 0$$

Este resultado nos permite afirmar que $f(x) - T_n(f, a)(x)$ es un **infinitésimo de orden al menos $n + 1$** , en el punto a , es decir $f(x) - T_n(f, a)(x) = O((x - a)^{n+1})$.

Por lo tanto podemos afirmar que el polinomio de Taylor aproxima a la función, en un entorno de $f(x)$, y cuanto más pequeño es el entorno, mejor es la aproximación:

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

Si tomamos como valor de $f(x)$ el valor dado por su polinomio de Taylor verdaderamente estamos obteniendo una aproximación del valor verdadero de la función. El error cometido por dicha aproximación, que también dependerá de x , se conoce con el nombre de *resto de Taylor* de orden n de $f(x)$ en $x = a$:

$$R_n(f, a)(x) = f(x) - T_n(f, a)(x)$$

Lógicamente no existe una expresión elemental para este resto, independientemente de la función considerada. No obstante existen algunas expresiones que nos permitirán acotar este resto y por tanto tener algún control sobre el error cometido cuando utilizamos polinomios de Taylor para aproximar funciones. Una vez consideradas estas expresiones, la fórmula que permite expresar, de forma “exacta”, el valor de $f(x)$ en función de su polinomio de Taylor con el correspondiente resto, recibe el nombre de *fórmula de Taylor* de la función:

$$\begin{aligned} f(x) &= T_n(f, a)(x) + R_n(f, a)(x) = \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R_n(f, a)(x) \end{aligned}$$

o de una forma más escueta (si no existiera ambigüedad)

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

Una expresión del resto, llamada *forma infinitesimal del resto*, viene dada por el teorema previamente demostrado: $R_n(x) = O((x-a)^{n+1})$. Entonces

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + O((x-a)^{n+1})$$

Ejemplo 3.1.2 *Los desarrollos de Mac Laurin más usuales son:*

- a) Para $x \in \mathbb{R}$, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1})$.
- b) Para $x \in \mathbb{R}$, $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+2})$.
- c) Para $x \in \mathbb{R}$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+1})$.
- d) Para $x > -1$, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + O(x^{n+1})$.
- e) Para $x > -1$, $(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha \cdots (\alpha-n+1)}{n!}x^n + O(x^{n+1})$.

Queda resuelto en el boletín de problemas resueltos. ■

A la hora de determinar el desarrollo de Taylor (con resto en forma infinitesimal), con frecuencia resulta útil utilizar alguno de los desarrollos conocidos de algunas funciones. En particular, consideremos sendas funciones $f(x)$ y $g(x)$, y los polinomios de Taylor de orden n en un punto a a ellas asociados, $p_n(x)$ y $q_n(x)$, respectivamente. Entonces:

- El polinomio de Taylor de orden n en a de $\lambda f(x) + \mu g(x)$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, resulta ser $\lambda p_n(x) + \mu q_n(x)$.

Ejemplo 3.1.3 *Calcular los polinomios de Taylor $s_n(x)$ y $c_n(x)$ de orden n en $x = 0$ del seno y del coseno hiperbólicos (funciones que vienen definidas como $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ y $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$).*

Estos polinomios los podemos calcular en función del polinomio de Taylor $p_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ correspondiente a $e^x = p_n(x) + O(x^{n+1})$.

Así, el polinomio de Taylor del seno hiperbólico resulta ser

$$s_n(x) = \frac{p_n(x)}{2} - \frac{p_n(-x)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \frac{x^i - (-x)^i}{i!} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{2x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

Esto es, $\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1}}{(2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1)!} + O(x^{n+1})$.

Del mismo modo, el polinomio de Taylor del coseno hiperbólico resulta ser

$$c_n(x) = \frac{p_n(x)}{2} + \frac{p_n(-x)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \frac{x^i + (-x)^i}{i!} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{2x^{2i}}{(2i)!}$$

Esto es, $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{(2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)!} + O(x^{n+1})$. ■

- El polinomio de Taylor de orden n en a de $f(x) \cdot g(x)$ coincide con el resultante de prescindir en $p_n(x) \cdot q_n(x)$ de los términos de grado mayor que n .

Ejemplo 3.1.4 Calcular el polinomio de Taylor de grado 3, en $x = 0$, de $e^x \cos x$.

El polinomio de Taylor $t_3(x)$ de $e^x \cos x$ en $x = 0$ queda determinado por los polinomios de Taylor $p_3(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$ y $c_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2!}$ de e^x y $\cos x$, respectivamente.

Así, el desarrollo de Taylor de $e^x \cos x$ de grado 3 en $x = 0$ es

$$\begin{aligned} t_3(x) + O(x^4) &= (p_3(x) + O(x^4)) \cdot (c_3(x) + O(x^4)) = \\ &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{2!} + O(x^4) = 1 + x - \frac{x^3}{3} + O(x^4) \end{aligned}$$

■

- Si $g(a) \neq 0$, el polinomio de Taylor de orden n en el punto a de la función $\frac{f(x)}{g(x)}$ viene dado por el cociente que se obtiene al dividir $p_n(x)$ entre $q_n(x)$, según las potencias crecientes, hasta el grado n inclusive.

Ejemplo 3.1.5 Calcular el desarrollo de Taylor de orden n de la función $\frac{1}{1-x}$ en $x = 0$.

Este desarrollo se puede obtener a partir de los desarrollos de $1 = 1 + O(x^{n+1})$ y $1 - x = 1 - x + O(x^{n+1})$, para $n > 1$.

De hecho, $1/(1-x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + O(x^{n+1})$. Este desarrollo también se podría haber obtenido a partir del de $(1+x)^\alpha$ tomando $-x$ en lugar de x y $\alpha = -1$. ■

Ejemplo 3.1.6 Obtener el desarrollo de orden 7 de la función $\operatorname{tg} x$.

Podemos considerar el desarrollo de $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ de orden 7 en $x = 0$, en función de los desarrollos de $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+2})$ y $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+1})$.

Los desarrollos de orden 7 de $\operatorname{sen} x$ y $\frac{1}{\cos x}$ son $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + O(x^8)$ y $\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + O(x^8)$; de modo que el desarrollo de orden 7 de $\operatorname{tg} x$ queda $\operatorname{sen} x \cdot \frac{1}{\cos x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + O(x^8)$. ■

- Supuesto que $q_n(x)$ es el desarrollo de $g(x)$ en $f(a)$, la función $g \circ f$ admite desarrollo limitado de orden n en a , dado por el polinomio que se obtiene al prescindir en $g \circ p$ de los términos de grado mayor que n .

Ejemplo 3.1.7 Obtener el desarrollo de orden 5 de $e^{\cos x}$ en $x = 0$.

Como el desarrollo que conocemos de e^x es en $x = 0$, necesitamos que el exponente de $e^{\cos x}$ sea 0. Dado que en el punto a tomar el desarrollo ($x = 0$) es $\cos x = 1$, tomamos $e^{\cos x} = e^{1+\cos x-1} = e \cdot e^{\cos x-1}$, de modo que $\cos x - 1$ vale 0 en $x = 0$. Así, tomando $f(x) = \cos x - 1$ y $g(x) = e^x$ vamos a desarrollar en $x = 0$ la composición $g \circ f(x) = e^{\cos x-1}$. El desarrollo buscado será el producto del anterior por e .

Como $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + O(x^6)$ y $\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6)$; se sigue de manera inmediata el desarrollo

$$e^{\cos x-1} = 1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6)\right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6)\right)^2 + O(x^6) =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{8} + O(x^6) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + O(x^6);$$

de modo que el desarrollo buscado es $e^{\cos x} = e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^4 + O(x^6)$. ■

Lógicamente la forma infinitesimal del resto no nos permite tener una idea de su valor aproximado. No obstante existen otras expresiones para el resto de Taylor que si nos permiten aproximar su valor. Una de estas expresiones es la siguiente:

Fórmula de Taylor con resto de Lagrange: Si la función $f(x)$, y sus primeras n derivadas $f'(x), \dots, f^{(n)}(x)$, son continuas en un entorno $E(a, \delta)$ de a , y existe la derivada de orden $n+1$, $f^{(n+1)}$, en dicho entorno, entonces para cada $x \in E(a, \delta)$ existe un valor intermedio $\xi \in (a, x)$ (o $\xi \in (x, a)$ dependiendo de que $x > a$ o $x < a$, respectivamente), de forma que

$$\begin{aligned} f(x) &= T_n(f, a)(x) + R_n(f, a)(x) = \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(f, a)(x) \end{aligned}$$

siendo

$$R_n(f, a)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-a)^{n+1}$$

Es decir, la fórmula de Taylor con resto de Lagrange será:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots \\ &\dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-a)^{n+1}, \quad \xi \in (a, x) \quad [\text{ó } \xi \in (x, a)] \end{aligned}$$

En el caso particular en que el punto sea $x = 0$, obtendremos la fórmula de MacLaurin con resto de Lagrange:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}x^{n+1}, \quad \xi \in (0, x)$$

Ejemplo 3.1.8 *Los desarrollos de Mac Laurin, con restos de Lagrange, de las funciones más usuales son:*

- a) Para $x \in \mathbb{R}$, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\xi x^{n+1}}{(n+1)!}$, siendo $\xi \in (0, x)$.
- b) Para $x \in \mathbb{R}$, $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + (-1)^{n+1} \frac{\cos \xi}{(2n+2)!} x^{2n+2}$, siendo $\xi \in (0, x)$.
- c) Para $x \in \mathbb{R}$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{\sin \xi}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, siendo $\xi \in (0, x)$.
- d) Para $x > -1$, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$, siendo $\xi \in (0, x)$.
- e) Para $x > -1$, $(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha \cdots (\alpha-n+1)}{n!}x^n + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n)(\xi+1)^{\alpha-n-1}}{(n+1)!}x^{n+1}$, siendo $\xi \in (0, x)$.

Esta forma del resto es más difícil de obtener, no obstante nos permitirá tener una idea del error cometido cuando si tomamos como valor aproximado de la función $f(x)$ en un punto, el valor $T_n(f, a)(x)$ de su polinomio de Taylor en dicho punto. Veamos un ejemplo:

Ejemplo 3.1.9 *Obtener valores aproximados de $\cos 1$ y de $\cos 5$, utilizando polinomios de Taylor de distinto grado en $x = 0$, acotando el error cometido con cada uno de ellos.*

Recordemos que el desarrollo de MacLaurin de la función $f(x) = \cos x$ en el origen, con resto de Lagrange, es:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{\sin c}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \text{siendo } c \in (0, x)$$

Entonces si queremos obtener el valor de $f(1) = \cos 1$, y para ello utilizamos el valor del polinomio de MacLaurin $T_n(f, a)(1)$, el error cometido vendrá dado por el resto de Taylor:

$$|\varepsilon| = |f(1) - T_n(f, a)(1)| = |R_n(1)|$$

Veamos estos valores para polinomios de distinto grado:

1. Si utilizamos el polinomio de Taylor de orden 2 tendremos

$$f(1) = \cos 1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen} c}{6}, \quad \text{para } c \in (0, 1)$$

de modo que $\cos 1 \simeq 0.5$, con un error $\varepsilon = \frac{\operatorname{sen} c}{6}$, y por tanto acotado por $|\varepsilon| \leq \frac{\operatorname{sen} 1}{6} < 0.1402452$, al ser $|\operatorname{sen} c| \leq \operatorname{sen} 1$ para $c \in (0, 1)$. De este modo, $T_2(1)$ no garantiza en principio ninguna cifra decimal exacta.

2. Si utilizamos el polinomio de Taylor de orden 2 tendremos

$$f(1) = \cos 1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} - \frac{\operatorname{sen} c}{120}, \quad \text{para } c \in (0, 1)$$

de modo que $\cos 1 \simeq 0.541666\dots$, con un error $\varepsilon = -\frac{\operatorname{sen} c}{120}$, y por tanto acotado por $|\varepsilon| \leq \frac{\operatorname{sen} 1}{120} < 0.00701226$, al ser $|\operatorname{sen} c| \leq \operatorname{sen} 1$ para $c \in (0, 1)$. Así, $T_4(1)$ aproxima a $\cos 1$ al menos con dos cifras decimales exactas.

3. Si el polinomio de Taylor es de orden 6:

$$f(1) = \cos 1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} - \frac{1}{720} + \frac{\operatorname{sen} c}{5040}, \quad \text{para } c \in (0, 1)$$

de modo que $\cos 1 \simeq 0.5402777\dots$, con un error $\varepsilon = \frac{\operatorname{sen} c}{5040}$, y por tanto acotado por $|\varepsilon| \leq \frac{\operatorname{sen} 1}{5040} < 0.00016696$, al ser $|\operatorname{sen} c| \leq \operatorname{sen} 1$ para $c \in (0, 1)$. En esta ocasión, $T_6(1)$ aproxima a $\cos 1$ al menos con 3 cifras decimales exactas.

4. Por último, si el polinomio es de orden 8:

$$f(1) = \cos 1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} - \frac{1}{720} + \frac{1}{40320} - \frac{\operatorname{sen} c}{362880}, \quad \text{para } c \in (0, 1)$$

de modo que $\cos 1 \simeq 0.540302579365079\dots$, con un error $\varepsilon = -\frac{\operatorname{sen} c}{362880}$ acotado por $|\varepsilon| \leq \frac{\operatorname{sen} 1}{362880} < 0.0000023189$, al ser $|\operatorname{sen} c| \leq \operatorname{sen} 1$ para $c \in (0, 1)$. Finalmente, $T_8(1)$ aproxima a $\cos 1$ al menos con 5 cifras decimales exactas.

De hecho, $\cos 1 = 0.5403023058681397174\dots$, y la aproximación obtenida es buena.

En cambio, si pretendemos aproximar el valor de $\cos 5$ con los mismos polinomios, el resultado probablemente no sea igual de satisfactorio, dado que 5 no está suficientemente próximo al punto en el que estamos desarrollando ($a = 0$).

1. $f(5) = \cos 5 = p_2(5) + \frac{\operatorname{sen} c}{6} 5^3$, para $c \in (0, 5)$; de modo que $\cos 5 \simeq -11.5$, con un error $\varepsilon = \frac{125}{6} \operatorname{sen} c$ acotado por $|\varepsilon| \leq \frac{125}{6} < 20.84$, al ser $|\operatorname{sen} c| \leq 1$ para $c \in (0, 5)$. De este modo, la aproximación no es nada fiable.
2. $f(5) = \cos 5 = p_4(5) - \frac{\operatorname{sen} c}{120} 5^5$, para $c \in (0, 5)$; de modo que ahora la aproximación será $\cos 5 \simeq 14.541666\dots$, con un error $\varepsilon = -\frac{\operatorname{sen} c}{120} 5^5$ acotado por $|\varepsilon| \leq \frac{3125}{120} < 26.042$, al ser $|\operatorname{sen} c| \leq 1$ para $c \in (0, 5)$. De nuevo, la estimación no es adecuada, por la incertidumbre que da la acotación del error.
3. $f(5) = \cos 5 = p_6(5) + \frac{\operatorname{sen} c}{5040} 5^7$, para $c \in (0, 5)$; de modo que ahora la aproximación será $\cos 5 \simeq -7.1597222\dots$, con un error $\varepsilon = \frac{\operatorname{sen} c}{5040} 5^7$ acotado por $|\varepsilon| \leq \frac{78125}{5040} < 15.501$, al ser $|\operatorname{sen} c| \leq 1$ para $c \in (0, 5)$. En esta ocasión, la acotación del error vuelve a exceder lo razonable.
4. $f(5) = \cos 5 = p_8(5) - \frac{\operatorname{sen} c}{362880} 5^9$, para $c \in (0, 5)$; y será $\cos 5 \simeq 2.5283978\dots$, con un error $\varepsilon = -\frac{\operatorname{sen} c}{362880} 5^9$ acotado por $|\varepsilon| \leq \frac{1953125}{362880} < 5.3823$, al ser $|\operatorname{sen} c| \leq 1$ para $c \in (0, 5)$. Esta última es la menos mala de entre todas las aproximaciones realizadas, pero en ningún caso es satisfactoria, dado que por todos es sabido que el coseno oscila entre 1 y -1 , y la aproximación que se maneja es de $2.5283978\dots$

En verdad, $\cos 5 = 0.28366218546322626447\dots$, y lo que se tendría que haber hecho es desarrollar por Taylor la función coseno en un punto próximo a $x = 5$ (por ejemplo $x = \frac{3\pi}{2}$, para garantizar la bonanza de las aproximaciones. ■

3.2 Aplicaciones de la fórmula de Taylor

3.2.1 Aplicación al cálculo de valores aproximados

Hemos estudiado anteriormente cómo podemos utilizar la fórmula de Taylor para el cálculo aproximado de valores de una función. No obstante veamos otro ejemplo:

Ejemplo 3.2.1 *Utilizando desarrollos de MacLaurin, indicar el número de términos necesarios para obtener el valor de \sqrt{e} con un error menor que 10^{-3} .*

El desarrollo de MacLaurin de $f(x) = e^x$ de orden n , con resto de Lagrange, viene dado por

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad c \in (0, x)$$

Si utilizamos un polinomio de MacLaurin $P_n(x)$ de orden n , el error cometido al aproximar $\sqrt{e} = e^{1/2}$ por $P_n(1/2)$ será $|R_n(1/2)|$. Entonces

$$|R_n(1/2)| = \left| \frac{e^c}{2^{n+1}(n+1)!} \right|, \quad c \in (0, \frac{1}{2})$$

Entonces

$$|R_n(1/2)| = \left| \frac{e^c}{2^{n+1}(n+1)!} \right| < \frac{3}{2^{n+1}(n+1)!} < 10^{-3}$$

Hemos de encontrar el menor valor de n que hace $2^{n+1}(n+1)! > 3000$, es decir $n = 4$, ya que $2^4 \cdot 4! = 384$ y $2^5 \cdot 5! = 3840$.

Por lo tanto el valor aproximado de \sqrt{e} dado por $P_4(\frac{1}{2})$, siendo

$$P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

comete un error menor que 10^{-3} . Este valor será

$$\sqrt{e} \approx P_4(\frac{1}{2}) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{384} = \frac{211}{128} = 1.6484375$$

■

3.2.2 Aplicación al estudio local de una función

El desarrollo de Taylor de una función en un punto permite leer de manera inequívoca cuál es el comportamiento de la función en el punto (si es creciente, decreciente, tiene un extremo o un punto de inflexión), en función de la primera derivada no nula.

Es de común conocimiento que el crecimiento de una función $f(x)$ en un punto $x = a$ depende del signo que tome la derivada primera de la función en dicho punto: si $f'(a) > 0$, entonces la función es estrictamente creciente en a , de modo que, si $f'(x)$ es continua, para todo x, w en un entorno suficientemente pequeño $(a - \delta, a + \delta)$ se tiene que $x < w$ implica $f(x) < f(w)$; por el contrario, si $f'(a) < 0$, entonces la función es estrictamente decreciente en a , de modo que, si $f'(x)$ es continua, para todo x, w en un entorno suficientemente pequeño $(a - \delta, a + \delta)$ se tiene que $x < w$ implica $f(x) > f(w)$. Si $f'(a) = 0$ ó no existe $f'(a)$, la función puede tener en a un extremo local (máximo o mínimo), un punto de inflexión, o un punto de crecimiento dudoso; para determinar el comportamiento en el punto en cuestión basta estudiar cómo se comporta la función en sus alrededores.

Es en el caso $f'(a) = 0$ en el que el desarrollo de Taylor desempeña un relevante papel.

El procedimiento general dice que si $f'(a) = 0$ y la primera derivada no nula en a es de orden par, digamos $f'(a) = \dots = f^{2n-1}(a) = 0, f^{2n}(a) \neq 0$, entonces la función tiene en a un máximo local si $f^{2n}(a) < 0$ y un mínimo local si $f^{2n}(a) > 0$. En caso de que $f'(a) = 0$ y la primera derivada no nula en a sea de orden impar, $f'(a) = \dots = f^{2n}(a) = 0, f^{2n+1}(a) \neq 0$, entonces la función tiene en a un *punto de inflexión*, en el que la función cambia su carácter cóncavo/convexo. En caso de que todas las derivadas sean nulas en a , este método no aporta información, y hay que estudiar el crecimiento de la función en un entorno de a .

Veamos la explicación de este hecho.

Supongamos que k es el orden de la primera derivada no nula de $f(x)$ en el punto a . Entonces, el desarrollo de Taylor de $f(x)$ en a de orden k resulta ser

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + O((x-a)^{k+1})$$

de modo que $\frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^k} = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} + O((x-a)^{k+1})$; de donde

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^k} = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

y por tanto $\frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^k}$ tiene el mismo signo que $\frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ en un entorno E suficientemente pequeño de a .

Así, si k es par, digamos $k = 2n$, se tiene:

- Si $f^{(2n)}(a) > 0$, entonces $\frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^{2n}} > 0$ en E , de donde $f(x) - f(a) > 0$ en dicho entorno; es decir, $f(x) > f(a)$ para todo x en E , por lo que la función tiene en a un mínimo local.
- Si $f^{(2n)}(a) < 0$, entonces $\frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^{2n}} < 0$ en E , de donde $f(x) - f(a) < 0$ en dicho entorno; es decir, $f(x) < f(a)$ para todo x en E , por lo que la función tiene en a un máximo local.

Análogamente, si k es impar, digamos $k = 2n + 1$, se tiene:

- Si $f^{(2n+1)}(a) > 0$, entonces $\frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^{2n+1}} > 0$ en E , de donde en dicho intervalo es $f(x) - f(a) > 0$ si $x - a > 0$ y $f(x) - f(a) < 0$ si $x - a < 0$; es decir, en E es $f(x) > f(a)$ si $x > a$, mientras que $f(x) < f(a)$ si $x < a$, por lo que la función es estrictamente creciente en a .
- Si $f^{(2n+1)}(a) < 0$, entonces $\frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^{2n+1}} < 0$ en E , de donde en dicho intervalo es $f(x) - f(a) < 0$ si $x - a > 0$ y $f(x) - f(a) > 0$ si $x - a < 0$; es decir, en E es $f(x) < f(a)$ si $x > a$, mientras que $f(x) > f(a)$ si $x < a$, por lo que la función es estrictamente decreciente en a .

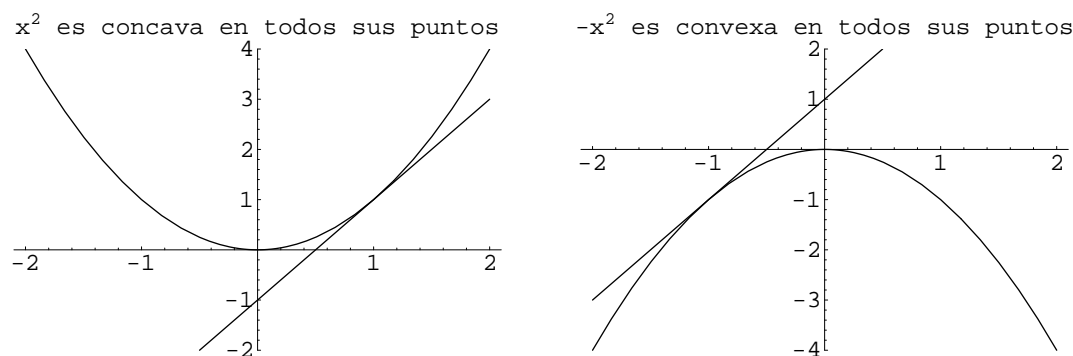
Ejemplo 3.2.2 Probar que la función $f(x) = x^4(xe^x + 1)$ tiene un mínimo relativo en $x = 0$.

Sin necesidad de derivar, podemos hallar cuál es su desarrollo de Mac Laurin, en función del desarrollo de $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1})$, de modo que

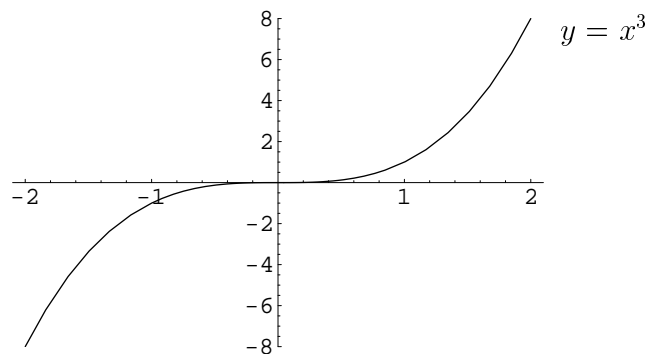
$$\begin{aligned} f(x) &= x^4(xe^x + 1) = x^4\left(x\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1})\right) + 1\right) = \\ &= x^4 + x^5 + x^6 + \frac{x^7}{2} + \cdots + \frac{x^n}{(n-5)!} + O(x^{n+1}) = x^4 + O(x^5) \end{aligned}$$

Por lo tanto, para valores próximos a 0, $f(x) > 0 = f(0)$, $\forall x$ y la función tiene un mínimo relativo en $x = 0$. ■

El estudio general de los puntos de inflexión de $y = f(x)$ concierne a las derivadas de orden superior a 2, y se reduce a estudiar la posición relativa de la curva con respecto de la recta tangente en el punto $(a, f(a))$: el punto será de inflexión si y sólo si la curva atraviesa la recta tangente en el punto; en otro caso, la función será cóncava o convexa en el punto, dependiendo de si la curva se queda por encima o debajo de la recta tangente, respectivamente.



Por tanto, si $r(x) = p_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ es la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$, tenemos que estudiar cómo varía el signo de la función diferencia $g(x) = f(x) - r(x)$. Si tiene signo constante en un entorno de $x = a$, la función será cóncava (si $g(x) \geq 0$ en dicho entorno) o convexa (si $g(x) \leq 0$ en dicho entorno); en caso de que $g(x) > 0$ a un lado de $x = a$ y $g(x) < 0$ al lado contrario de $x = a$, entonces la función tendrá en $x = a$ un punto de inflexión. Éste es el caso de $y = x^3$ en el origen.



En particular, si la función $f(x)$ es n veces derivable en $x = a$, con

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad f^{(n)}(a) \neq 0$$

se tiene que:

1. Si n es par y $f^{(n)}(a) > 0$, entonces $f(x)$ es cóncava en $x = a$.
2. Si n es par y $f^{(n)}(a) < 0$, entonces $f(x)$ es convexa en $x = a$.
3. Si n es impar, entonces $f(x)$ tiene en $x = a$ un punto de inflexión.

Esto es consecuencia directa del estudio de $g(x)$ en $x = a$: si $g(x)$ tiene un extremo relativo en $x = a$, entonces $f(x)$ es cóncava si $g(x)$ tiene un mínimo en $x = a$ ($g(a) = 0$, luego si es mínimo es porque $0 \leq g(x) = f(x) - r(x)$ en un entorno de $x = a$; esto es, $f(x) \geq r(x)$), y convexa si $g(x)$ tiene un máximo en $x = a$ ($g(a) = 0$, luego si es máximo es porque $0 \geq g(x) = f(x) - r(x)$ en un entorno de $x = a$; esto es, $f(x) \leq r(x)$).

En caso de que $g(x)$ sea estrictamente monótona en $x = a$, cambia de signo en dicho punto, de donde $f(x) > r(x)$ a un lado y $f(x) < r(x)$ al otro, y $x = a$ es un punto de inflexión de la función.

3.2.3 Aplicación al cálculo de límites indeterminados

La fórmula de Taylor nos puede ayudar a resolver indeterminaciones, como muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.2.3 *Calcular, utilizando la fórmula de Taylor, el siguiente límite:*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}$$

En estos casos, podremos utilizar la fórmula de Taylor de la función $f(x) = e^x$, utilizando el resto en forma infinitesimal:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + O(x^4)$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + O(x^4) + 1) - 2(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + O(x^4) - 1)}{x^3} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + O(x^4)) - 2(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + O(x^4))}{x^3} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + O(x^5) - (2x + x^2 + \frac{x^3}{3} + O(x^4))}{x^3} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{6} + O(x^5)}{x^3} = \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

■

3.3 Fórmula de Taylor para funciones de varias variables

Introduciremos la fórmula de Taylor para funciones de varias variables de modo similar a como lo hicimos con funciones de una variable.

La Figura 3.2 muestra una representación gráfica, en las proximidades del punto $P(0, 0)$, de la función $f(x, y) = \sin(x + y) + \cos(x + y)$.

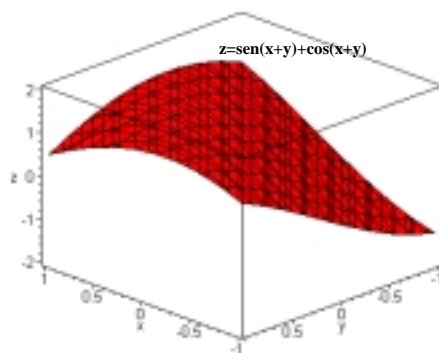


Figura 3.2: La superficie $z = \sin(x + y) + \cos(x + y)$.

En la Figura 3.3 se representa la función $f(x, y)$ y el polinomio de grado cero $p_0(x, y) = 1$. Vemos que ambas funciones toman el mismo valor en el punto $P(0, 0)$, es decir son superficies que pasan por el punto $P(0, 0, 1)$.

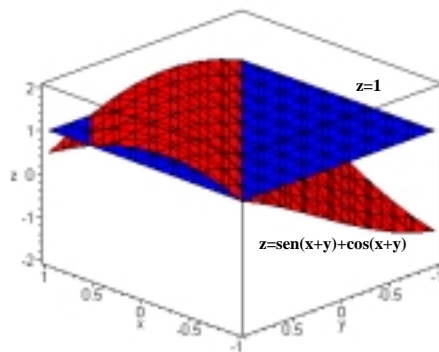


Figura 3.3: La superficie $z = \text{sen}(x + y) + \cos(x + y)$ y el plano $z = 1$.

En la Figura 3.4 se representa la función $f(x, y)$ y el polinomio de primer grado $p_1(x, y) = 1 + x + y$. Este polinomio representa el plano tangente a la superficie de ecuación $z = f(x, y)$ en el punto $P(0, 0, 1)$. Tiene por tanto en común con la función $z = f(x, y)$ el valor en el punto $P(0, 0)$ de su dominio, y el valor de las dos primeras derivadas parciales en dicho punto.

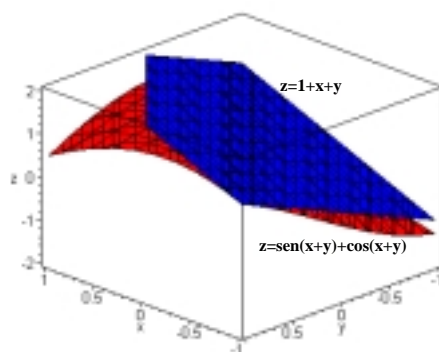


Figura 3.4: La superficie $z = \text{sen}(x + y) + \cos(x + y)$ y el plano tangente $z = 1 + x + y$.

La Figura 3.5 muestra la representación gráfica de la función $f(x, y)$ y el polinomio de segundo grado $p_2(x, y) = 1 + x + y - \frac{x^2}{2} - xy - \frac{y^2}{2}$. La superficie $z = p_2(x, y)$ representa un paraboloide elíptico (superficie cuádrica) y tiene en común con la función $z = f(x, y)$ el valor en el punto $P(0, 0)$ de su dominio, las dos primeras derivadas parciales y las derivadas parciales de segundo orden en dicho punto.

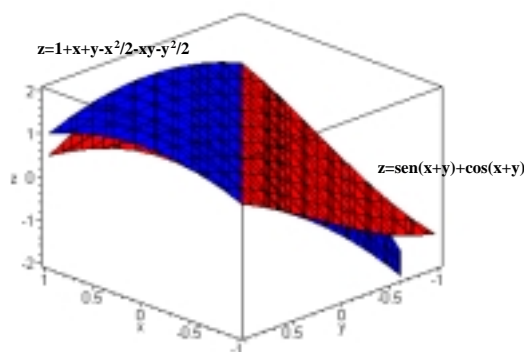


Figura 3.5: La superficie $z = \text{sen}(x + y) + \cos(x + y)$ y el paraboloide elíptico $z = 1 + x + y - \frac{x^2}{2} - xy - \frac{y^2}{2}$.

Por último la Figura 3.6 muestra la representación gráfica de la función $f(x, y)$ y el polinomio de tercer grado $p_3(x, y) = 1 + x + y - \frac{x^2}{2} - xy - \frac{y^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2y}{2} - \frac{xy^2}{2} - \frac{y^3}{6}$, que representa una superficie que tiene en común con $z = f(x, y)$ hasta las derivadas parciales de tercer orden en $P(0, 0)$.

Como puede apreciarse estos polinomios aproximan a la función $f(x, y)$ en las proximidades del origen, de forma que cuanto mayor es el grado del polinomio mejor es dicha aproximación.

A estos polinomios los denominaremos *polinomios de Taylor de la función* $f(x, y) = \text{sen}(x + y) + \cos(x + y)$ en el punto $P(0, 0)$.

Para definir los polinomios de Taylor de una función de dos variables, recordemos los operadores diferenciales sucesivas de una función de dos variables:

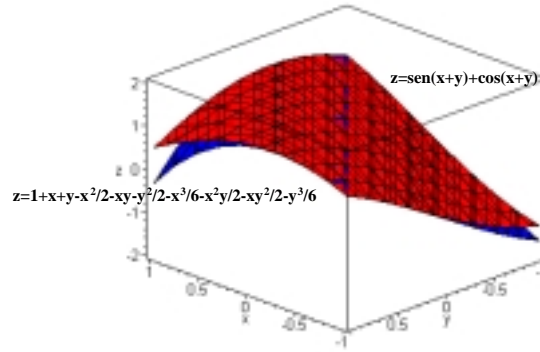


Figura 3.6: Las superficies $z = \text{sen}(x + y) + \cos(x + y)$ y $z = 1 + x + y - \frac{x^2}{2} - xy - \frac{y^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2y}{2} - \frac{xy^2}{2} - \frac{y^3}{6}$.

$$df(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right) f(x, y)$$

$$d^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} dy^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 f(x, y)$$

y en general:

$$d^n f(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n f(x, y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^{n-k} \partial y^k} dx^{n-k} dy^k$$

La *fórmula de Taylor para una función $f(x, y)$ en el punto $P(a, b)$* (en forma diferencial) es:

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{df(a, b)}{1!} + \frac{d^2 f(a, b)}{2!} + \dots + \frac{d^n f(a, b)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(\xi, \eta)}{(n+1)!}, \quad \xi \in (a, x), \eta \in (b, y)$$

y utilizando la notación de operadores diferenciales tendremos:

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right) f(a, b)}{1!} + \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 f(a, b)}{2!} + \dots$$

$$\begin{aligned} & \dots + \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f(a, b)}{n!} + \\ & + \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{n+1} f(\xi, \eta)}{(n+1)!}, \quad \xi \in (a, x), \eta \in (b, y) \end{aligned}$$

Esta expresión constituye la *fórmula de Taylor con resto de Lagrange* para la función $f(x, y)$ en el punto $P(a, b)$, siendo los $n+1$ primeros términos correspondientes al polinomio de Taylor y el último al resto de Lagrange:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= T_n(x, y) + R_n(x, y) \\ T_n(x, y) &= f(a, b) + \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right) f(a, b)}{1!} + \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f(a, b)}{2!} + \dots \\ & \dots + \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f(a, b)}{n!} \\ R_n(x, y) &= \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{n+1} f(\xi, \eta)}{(n+1)!}, \quad \xi \in (a, x), \eta \in (b, y) \end{aligned}$$

Y la *fórmula de Taylor con el resto en forma infinitesimal* será:

$$f(x, y) = T_n(x, y) + O(\|(x - a, y - b)\|^{n+1})$$

donde $O(\|(x - a, y - b)\|^{n+1})$ representa un infinitésimo de orden $n+1$ en $x = a$, $y = b$.

Si tenemos en cuenta que $dx = x - a$, $dy = y - b$, y utilizamos la notación

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f'_y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = f'''_{xxx}, \quad \dots$$

los polinomios de Taylor de una función $f(x, y)$ en un punto $P(x, a)$ son:

$$T_0(x, y) = f(a, b) \quad T_1(x, y) = f(a, b) + \frac{f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b)}{1!}$$

$$T_2(x, y) = T_1(x, y) + \frac{f''_{xx}(a, b)(x - a)^2 + 2f''_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + f''_{yy}(a, b)(y - b)^2}{2!}$$

$$T_3(x, y) = T_2(x, y) + \frac{f'''_{xxx}(a, b)(x - a)^3 + 3f'''_{xxy}(a, b)(x - a)^2(y - b) + f'''_{xyy}(a, b)(x - a)(y - b)^2 + f'''_{yyy}(a, b)(y - b)^3}{3!}$$

En el caso particular en que el punto P sea el origen de coordenadas ($x = 0$, $y = 0$) el polinomio recibe el nombre de *polinomio de MacLaurin*.

Ejemplo 3.3.1 *Obtener el polinomio de MacLaurin de tercer grado de la función $f(x, y) = \sin(x + y) + \cos(x + y)$.*

Obtengamos las derivadas parciales de la función $f(x, y) = \sin(x + y) + \cos(x + y)$:

$$f'_x(x, y) = f'_y(x, y) = \cos(x + y) - \sin(x + y)$$

$$f''_{xx}(x, y) = f''_{xy}(x, y) = f''_{yy}(x, y) = -\sin(x + y) - \cos(x + y)$$

$$f'''_{xxx}(x, y) = f'''_{xxy}(x, y) = f'''_{xyy}(x, y) = f'''_{yyy}(x, y) = -\cos(x + y) + \sin(x + y)$$

y en el origen:

$$f(0, 0) = 1 \quad f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 1 \quad f''_{xx}(0, 0) = f''_{xy}(0, 0) = f''_{yy}(0, 0) = -1$$

$$f'''_{xxx}(0, 0) = f'''_{xxy}(0, 0) = f'''_{xyy}(0, 0) = f'''_{yyy}(0, 0) = -1$$

Por lo tanto el polinomio de Taylor $T_3(x, y)$ de la función será:

$$T_3(x, y) = 1 + x + y - \frac{x^2}{2} - xy - \frac{y^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2y}{2} - \frac{xy^2}{2} - \frac{y^3}{6}$$

■

De la misma forma podemos obtener la fórmula de Taylor para funciones de más de dos variables. Por ejemplo si $f(x, y, z)$ es una función de tres variables, teniendo en cuenta los operadores diferenciales sucesivos:

$$\begin{aligned} df(x, y, z) &= \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} dy + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} dz = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right) f(x, y, z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^2 f(x, y, z) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right)^2 f(x, y, z) = \\ &= \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial z^2} dz^2 + \\ &+ 2 \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial x \partial y} dx dy + 2 \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial x \partial z} dx dz + 2 \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial y \partial z} dy dz \end{aligned}$$

.....

tendremos el polinomio de Taylor de una función de tres variables en un punto $P(a, b, c)$:

$$\begin{aligned} T_n(x, y, z) &= f(a, b, c) + \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right) f(a, b, c)}{1!} + \\ &+ \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right)^2 f(a, b, c)}{2!} + \dots + \\ &\dots + \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right)^n f(a, b, c)}{n!} \end{aligned}$$

siendo el resto

$$R_n(x, y, z) = \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right)^{n+1} f(\xi, \eta, \kappa)}{(n+1)!}$$

$$\xi \in (a, x), \eta \in (b, y), \kappa \in (c, z)$$

Ejemplo 3.3.2 Obtener el polinomio de MacLaurin de segundo grado de la función $f(x, y, z) = e^x \operatorname{sen}(y + z)$.

Obtenemos las derivadas parciales de la función $f(x, y, z)$:

$$\begin{aligned} f'_x(x, y, z) &= e^x \operatorname{sen}(y + z), & f'_y(x, y, z) &= f'_z(x, y, z) = e^x \cos(y + z), \\ f''_{xx}(x, y, z) &= e^x \operatorname{sen}(y + z), & f''_{xy}(x, y, z) &= f''_{xz}(x, y, z) = e^x \cos(y + z), \\ f''_{yy}(x, y, z) &= f''_{yz}(x, y, z) = f''_{zz}(x, y, z) &= -e^x \operatorname{sen}(y + z) \end{aligned}$$

y en el origen:

$$\begin{aligned} f(0, 0, 0) &= 0, & f'_x(0, 0, 0) &= 0, & f'_y(0, 0, 0) &= f'_z(0, 0, 0) = 1, \\ f''_{xx}(0, 0, 0) &= 0, & f''_{xy}(0, 0, 0) &= f''_{xz}(0, 0, 0) = 1, & f''_{yy}(0, 0, 0) &= f''_{yz}(0, 0, 0) = f''_{zz}(0, 0, 0) = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto el polinomio de MacLaurin $T_2(x, y)$ de la función será:

$$T_2(x, y, z) = y + z + xy + xz$$

■

3.4 Aplicaciones de la fórmula de Taylor

Al igual que en el caso de funciones de una variable, la fórmula de Taylor para funciones de varias variables tiene diversas utilidades. Entre ellas su aplicación al cálculo de valores aproximados de una función en un punto; al estudio local de una función y a la resolución de límites indeterminados.

3.4.1 Aplicación al cálculo de valores aproximados

La fórmula de Taylor para funciones de varias variables es utilizada igualmente para obtener valores aproximados de una función en un punto:

Ejemplo 3.4.1 *Obtener un valor aproximado de $\sqrt{1.03}\sqrt[3]{0.98}$, utilizando la fórmula de Taylor hasta las derivadas de segundo orden.*

Si consideramos la función $f(x, y) = \sqrt{x}\sqrt[3]{y}$, pretendemos obtener un valor aproximado de $f(1.03, 0.98)$ que es el valor en un punto cercano al punto $P(1, 1)$. Utilizaremos por tanto el polinomio de Taylor de segundo orden de la función $f(x, y) = \sqrt{x}\sqrt[3]{y}$, en el punto $P(1, 1)$.

Las derivadas de la función $f(x, y) = \sqrt{x}\sqrt[3]{y} = x^{1/2}y^{1/3}$ son:

$$f'_x(x, y) = \frac{1}{2}x^{-1/2}y^{1/3} \quad f'_y(x, y) = \frac{1}{3}x^{1/2}y^{-2/3}$$

$$f''_{xx}(x, y) = \frac{-1}{4}x^{-3/2}y^{1/3} \quad f''_{xy}(x, y) = \frac{1}{6}x^{-1/2}y^{-2/3} \quad f''_{yy}(x, y) = \frac{-2}{9}x^{1/2}y^{-5/3}$$

y en el punto $P(1, 1)$:

$$f(1, 1) = 1, \quad f'_x(1, 1) = \frac{1}{2}, \quad f'_y(1, 1) = \frac{1}{3}, \quad f''_{xx}(1, 1) = \frac{-1}{4},$$

$$f''_{xy}(1, 1) = \frac{1}{6}, \quad f''_{yy}(1, 1) = \frac{-2}{9}$$

Por lo tanto el polinomio de Taylor será:

$$\begin{aligned} T_2(x, y) &= f(1, 1) + \frac{f'_x(1, 1)(x - 1) + f'_y(1, 1)(y - 1)}{1!} + \\ &+ \frac{f''_{xx}(1, 1)(x - 1)^2 + 2f''_{xy}(1, 1)(x - 1)(y - 1) + f''_{yy}(1, 1)(y - 1)^2}{2!} = \\ &= 1 + \frac{1}{2}(x - 1) + \frac{1}{3}(y - 1) - \frac{1}{8}(x - 1)^2 + \frac{1}{6}(x - 1)(y - 1) - \frac{1}{9}(y - 1)^2 \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \sqrt{1.03}\sqrt[3]{0.98} &= f(1.03, 0.98) \approx T_2(1.03, 0.98) = \\ &= 1 + \frac{0.03}{2} - \frac{0.02}{3} - \frac{0.0009}{8} - \frac{0.0006}{6} - \frac{0.0004}{9} \approx 1.0080763889 \end{aligned}$$

■

3.4.2 Aplicación al cálculo de límites

Veamos cómo podemos utilizar la fórmula de Taylor para la obtención de límites de funciones de varias variables.

Ejemplo 3.4.2 Calcular el límite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\operatorname{sen} x - y}{x - \operatorname{sen} y}$

Para obtener este límite utilicemos el desarrollo de MacLaurin de la función $\operatorname{sen} x = x + O(x^3)$. Entonces

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\operatorname{sen} x - y}{x - \operatorname{sen} y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x + O(x^3) - y}{x - y + O(y^3)} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x - y + O(x^3)}{x - y + O(y^3)}$$

Si calculamos el límite según cualquier trayectoria $F(x, y) = 0$ que pase por el origen ($F(0, 0) = 0$), podemos hacer el cambio de variable $x - y = t$:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ F(x,y)=0}} \frac{x - y + O(x^3)}{x - y + O(y^3)} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ F(x,y)=0 \\ x-y=t}} \frac{x - y + O(x^3)}{x - y + O(y^3)} = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ F(x,y)=0}} \frac{t + O(t^3)}{t + O(t^3)} = 1$$

Ejemplo 3.4.3 Calcular el límite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x}{xy}$.

Sea $f(x, y) = x \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x$. Veamos el polinomio de Taylor de grado 2 de la función en el origen.

De un lado, $f_x(x, y) = \operatorname{sen} y + y \cos x$ y $f_y(x, y) = x \cos y + \operatorname{sen} x$; de modo que $f_x(0, 0) = 0 = f_y(0, 0)$.

De otro, $f_{x^2}(x, y) = -y \operatorname{sen} x$, $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = \cos y + \cos x$ y $f_{y^2}(x, y) = -x \operatorname{sen} y$; de modo que $f_{x^2}(0, 0) = 0 = f_{y^2}(0, 0)$ y $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0) = 2$.

Como $f(0, 0) = 0$, se tiene que $p_2(0 + x, 0 + y) = \frac{1}{2}(2xy + 2yx) = 2xy$; es decir, $f(x, y) = 2xy + O(\|(x, y)\|^3)$.

$$\text{Así, } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y)}{xy} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy + O(\|(x, y)\|^3)}{xy} = 2.$$

■

En el caso de funciones de varias variables también se utiliza la fórmula de Taylor para estudiar el comportamiento local de la función $f(x, y)$. En el capítulo siguiente

veremos cómo podemos aplicar la fórmula de Taylor al estudio de extremos de una función.